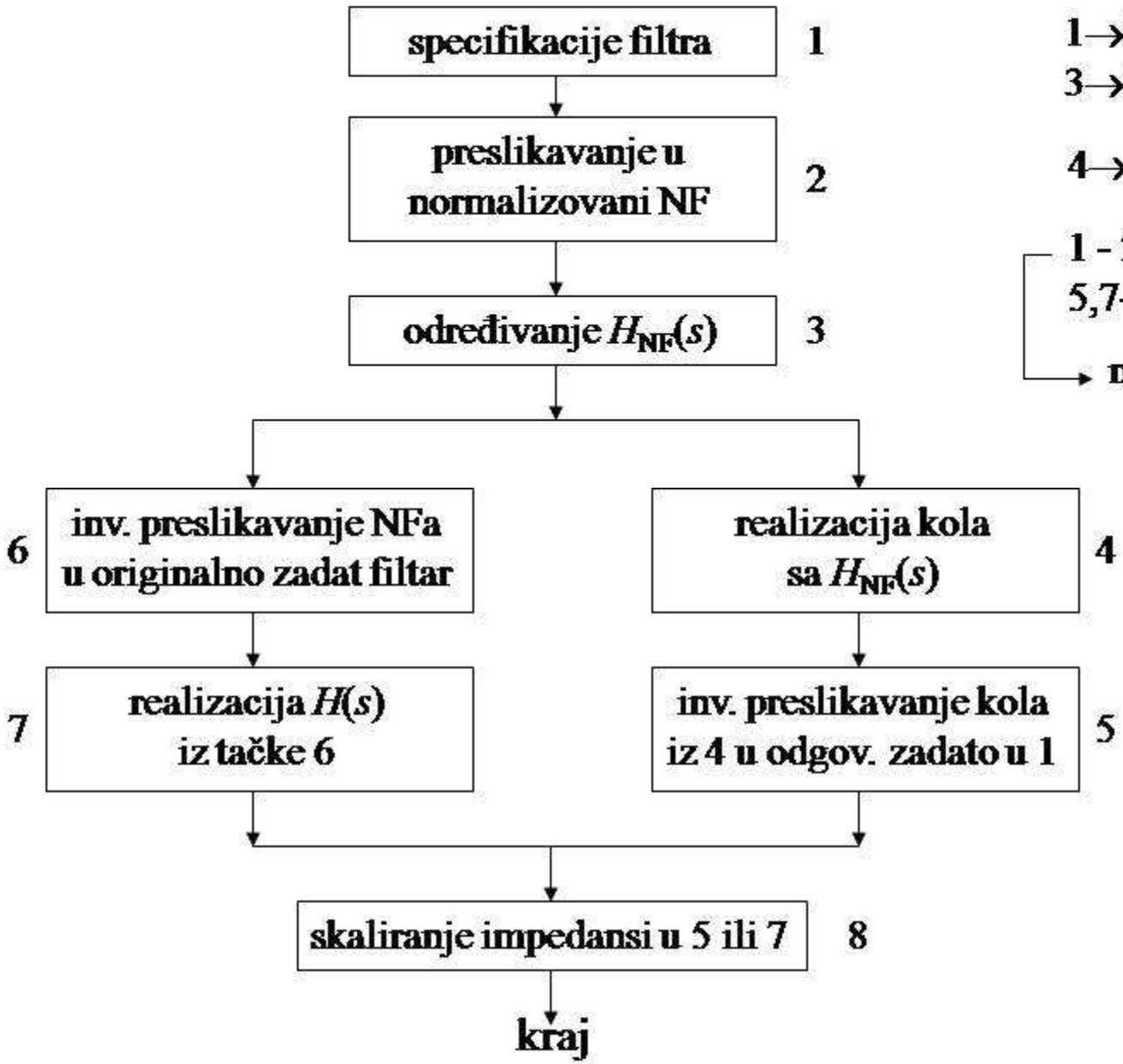
OSNOVNE TRANSFORMACIJE UČESTANOSTI I KOLA



1→2, 3→6 } transformacije učestanosti

4→5 transformacije kola

1 - 2, 5,7-8 } skaliranje impedansi

→ normalizacija amplitude

transformacija NF → NF

- obično se preslikava normalizovan NF u NF sa zadatim ω_g i obrnuto;

$$|H_N(j\omega_N)|^2 = \frac{1}{1+\omega_N^{2n}} \qquad |H_N(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^{2n}} \qquad |H_N(j\omega_g)|^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_g = \omega_{3dB}$$

- transformacija: $\omega_N \to \frac{\omega}{\omega_g}$ tj. $s_N \to \frac{s}{\omega_g}$ denormalizacija učestanosti

- ova transformacija se koristi u funkciji prenosa ili se primenjuje na elemente kola;

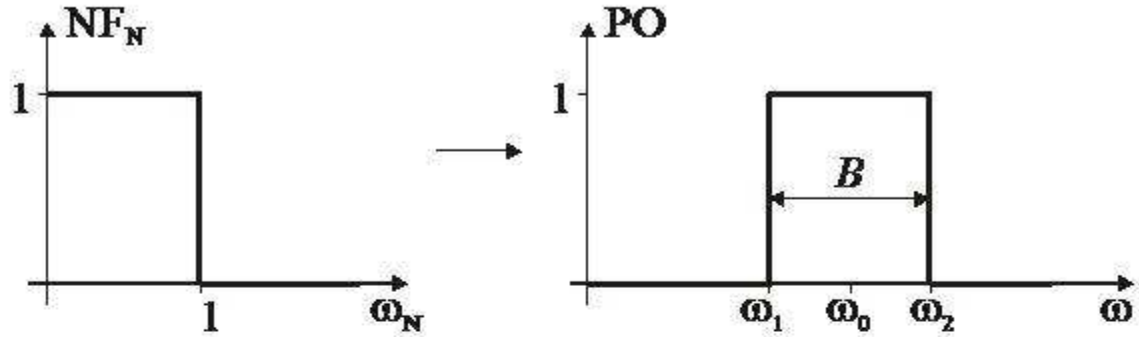
$$\frac{1}{s_N C} \to \frac{1}{\frac{s}{\omega_g} C} = \frac{1}{s\frac{C}{\omega_g}}$$

$$s_N L \to \frac{s}{\omega_g} L = s\frac{L}{\omega_g}$$

← svaki element u normalizovanom kolu se transformiše

$$R \to R$$

transformacija NF → propusnik opsega učestanosti



ω_0 - centralna učestanost propusnika opsega učestanosti

B - širina propusnog opsega

$B = \omega_2 - \omega_1$

$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$

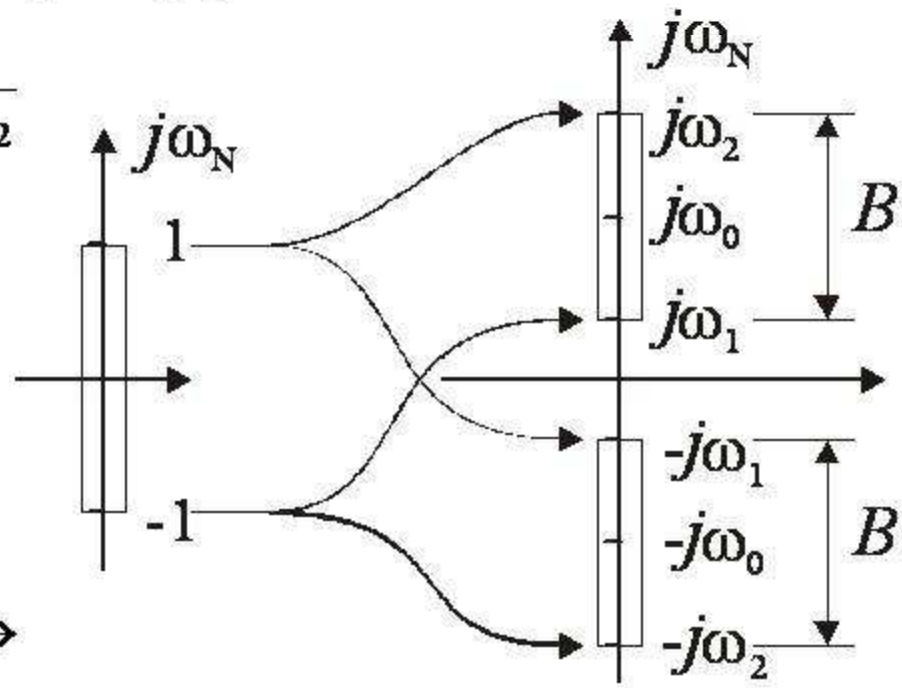
$$s_N \rightarrow \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}$$

- osobina:

$$\frac{\left(\frac{\omega_0^2}{s}\right)^2 + \omega_0^2}{B \cdot \frac{\omega_0^2}{s}} = \frac{\omega_0^4 + s^2\omega_0^2}{Bs\omega_0^2} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}$$

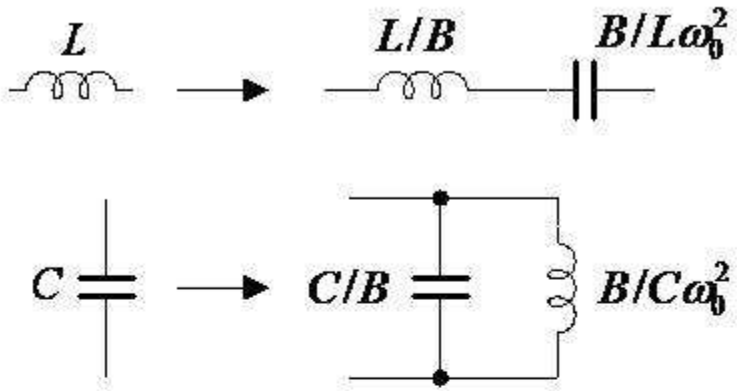
→ s_N se preslikava u dve tačke u s-ravni;

pozitivan i "negativan" PO →



- transformacija elemenata:

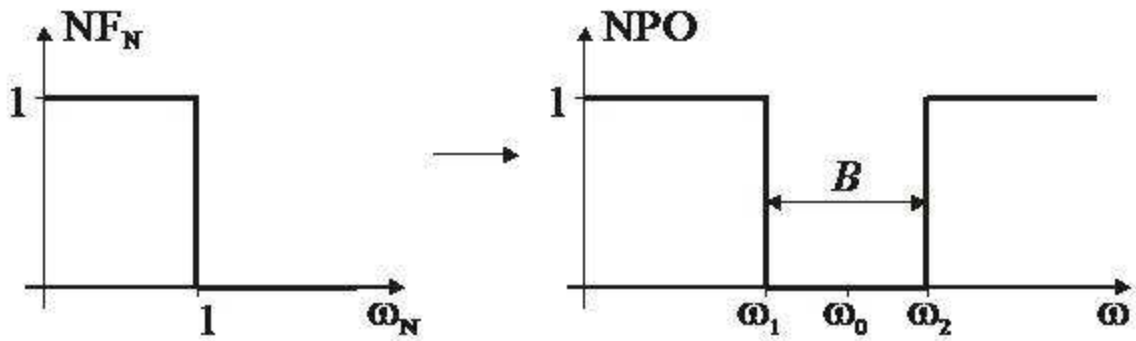
$$s_N L \rightarrow \frac{s^2+\omega_0^2}{Bs} L = s\frac{L}{B} + \frac{\omega_0^2 L}{Bs}$$



$$s_N C \rightarrow s\frac{C}{B} + \frac{\omega_0^2 C}{Bs}$$

$$R \rightarrow R$$

transformacija NF → nepropusnik opsega učestanosti



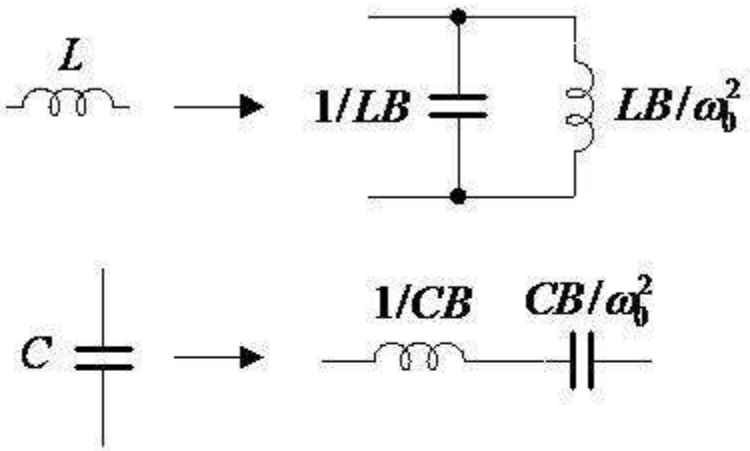
$$s_N \rightarrow \frac{Bs}{s^2+\omega_0^2}$$

- transformacija elemenata:

$$s_N L \rightarrow \frac{Bs}{s^2+\omega_0^2} L = \frac{1}{s\frac{1}{LB}+\frac{\omega_0^2}{LBs}}$$

$$s_N C \rightarrow \frac{1}{s\frac{1}{CB}+\frac{\omega_0^2}{CBs}}$$

$$R \rightarrow R$$



transformacija NF → VF

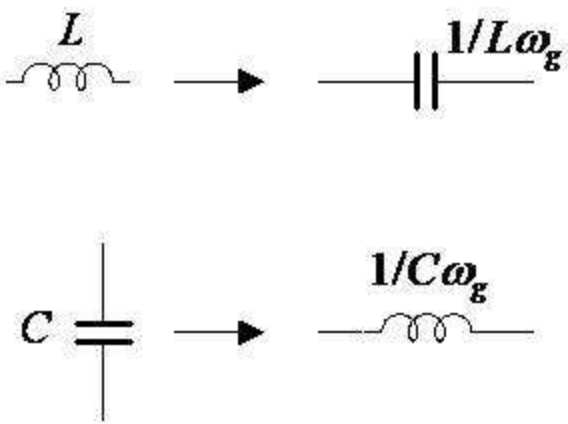
$$s_N \rightarrow \frac{\omega_g}{s}$$

- transformacija elemenata:

$$s_N L \rightarrow \frac{\omega_g L}{s}$$

$$s_N C \rightarrow \frac{\omega_g C}{s}$$

$$R \rightarrow R$$



SKALIRANJE IMPEDANSI

- U prethodnim transformacijama se R nije menjalo (obično je R=1Ω u normalizovanim filtrima);

$Z_N \rightarrow AZ_N$ $\qquad$ A - const.

$R_N \rightarrow AR_N$

$L_N \rightarrow AL_N$ $\qquad$ sve impedanse se skaliraju $\Rightarrow$ $H(s)$ se ne menja

$$\frac{1}{sC_N} \rightarrow \frac{A}{sC_N} = \frac{1}{s\frac{C_N}{A}}$$

- primer:

1. Projektovati VF filtar, koji zadovoljava specifikacije:
   - donja granična učestanost je f_0=10kHz;
   - slabljenje naponske funkcije prenosa na f_1=5kHz je veće od 22dB;
   - slabljenje naponske funkcije prenosa na f_2=20kHz je manje od 1dB.

a) odrediti gabarite normalizovanog VF, a zatim odgovarajućeg normalizovanog NF filtra.

b) odrediti red i funkciju prenosa Batervortovog normalizovanog NF filtra, koji zadovoljava gabarite izračunate pod a).

$$20\log|H_{max}(jf)| - 20\log|H(jf_1)| \geq 22\,dB$$

$$20\log\frac{|H_{max}|}{|H(jf_1)|} \geq 22 \quad \Rightarrow \quad |H(jf_1)| \leq 0{,}0794 \cdot |H_{max}|$$

$$|H(jf_1)|^2 \leq 6{,}31 \cdot 10^{-3} \cdot |H_{max}|^2$$

$$20\log|H_{max}(jf)| - 20\log|H(jf_2)| \leq 1\,dB$$

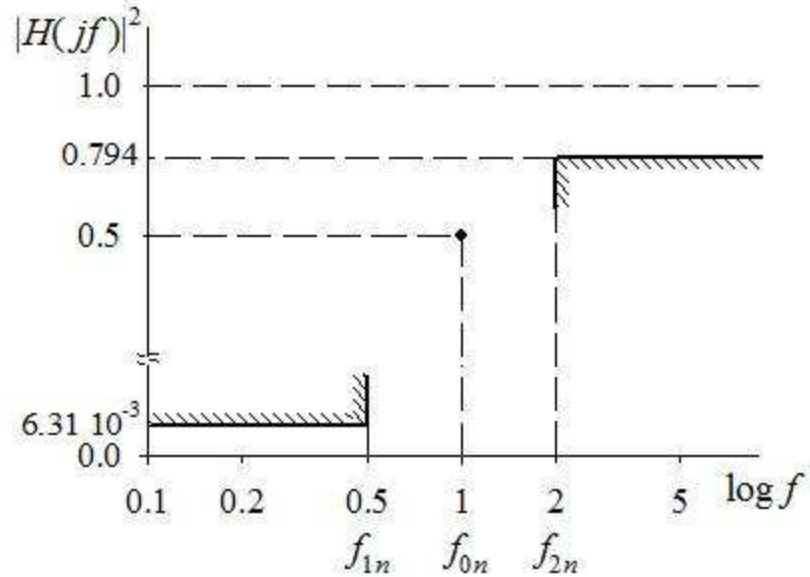
$$20\log\frac{|H_{max}|}{|H(jf_2)|} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |H(jf_2)| \geq 0{,}891 \cdot |H_{max}|$$

$$|H(jf_2)|^2 \geq 0{,}794 \cdot |H_{max}|^2$$

-prelazak na VF_N:

$$f_{1N} = \frac{f_1}{f_0} = 1/2 \qquad f_{2N} = \frac{f_2}{f_0} = 2$$

$$\left|H_N(j\tfrac{1}{2})\right|^2 \leq 6{,}31 \cdot 10^{-3} \qquad |H_N(j2)|^2 \geq 0{,}794$$

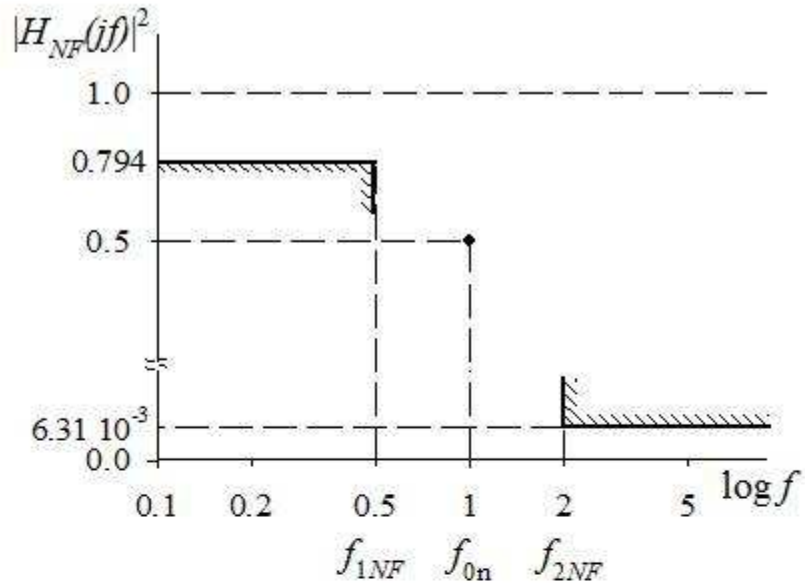


$\mathbf{VF_N \rightarrow NF_N}$:

$$s \rightarrow \frac{1}{s}$$

$$f_{1NF} = \frac{1}{f_{1N}} = 2 \quad \Rightarrow \quad |H_{NF}(j2)|^2 \leq 6{,}31 \cdot 10^{-3}$$

$$f_{2NF} = \frac{1}{f_{2N}} = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \left|H_{NF}(j\frac{1}{2})\right|^2 \geq 0{,}794$$



*** - direktna transformacija VF → NF$_N$:** $s \rightarrow \frac{\omega_0}{s}$ $\quad f_{1NF} \rightarrow \frac{f_0}{f_1} = 2$

b) $$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^{2n}}$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} \geq 0{,}794 \quad \Rightarrow \quad n \geq 1$$

← usvaja se n=4

$$\frac{1}{1+(2)^{2n}} \leq 6{,}31 \cdot 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad n \geq 4$$

* - transformacija gabarita POU → normalizovan NF:

$$s_N \leftrightarrow \frac{s^2+\omega_0^2}{Bs}$$

$$j\omega_N \leftrightarrow \frac{(j\omega)^2+\omega_0^2}{B\cdot j\omega}$$

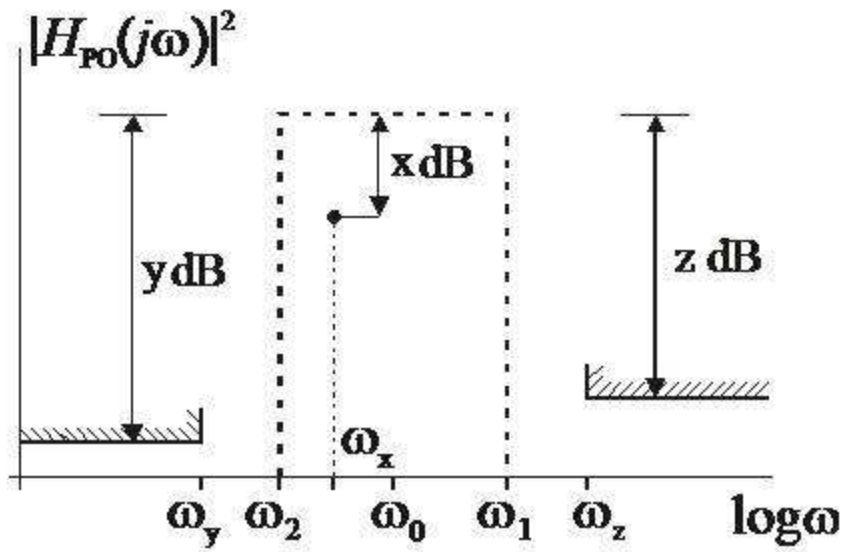
$$B=\omega_1-\omega_2 \qquad \omega_0^2=\omega_1\cdot\omega_2$$

$$\rightarrow \quad \frac{(j\omega_0)^2+\omega_0^2}{B\cdot j\omega_0}\rightarrow 0$$

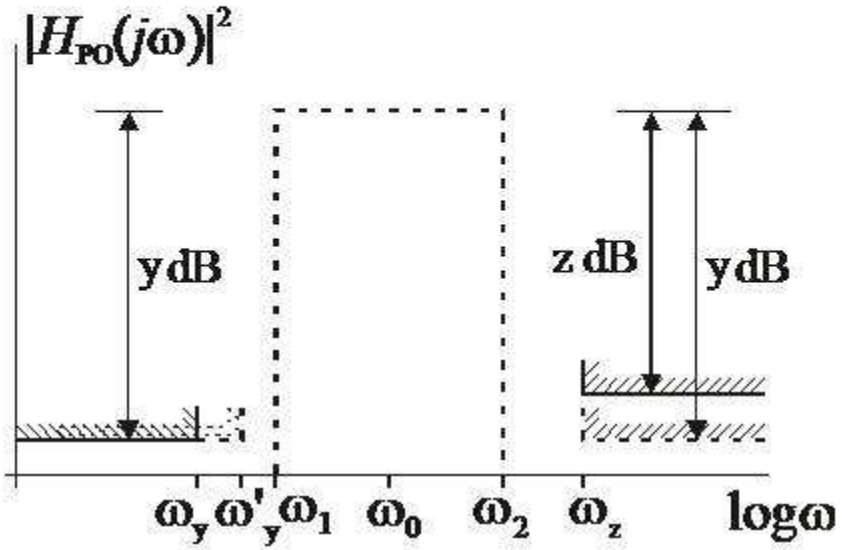
$$\frac{(j\omega_1)^2+\omega_0^2}{(\omega_1-\omega_2)\cdot j\omega_1}=-j\frac{\omega_0^2-\omega_1^2}{\omega_1^2-\omega_1\cdot\omega_2}=j\cdot 1$$

(slično za $j\omega_2 \rightarrow -j1$)

$$\frac{(j\omega_x)^2+\omega_0^2}{B\cdot j\omega_x}$$ → odgovarajuća normalizovana učestanost $j\omega_{Nx}$



- gabariti u PO i u NPO moraju da budu zadati simetrično, a to znači da učestanosti daju ω_0 u geometrijskoj sredini, jer je samo tada jednoznačno preslikavanje u NF_N;
- ako nije ispunjena geometrijska simetrija, obično se usvaja strožiji zahtev i u pogledu učestanosti i u pogledu slabljenja.



→ aproksimacija višeg reda (složenije $H(j\omega)$, skuplja realizacija)

- postoje i metode direktne realizacije PO sa nesimetričnim gabaritima.

FUNKCIJA PRENOSA BIKVADRATNE SEKCIJE

- sinteza aktivnih filtara višeg reda obično se izvodi na sledeći način:
  1- $H_n(j\omega)$ dobijeno iz aproksimacije se prikaže kao proizvod funkcija prenosa (prvog i) drugog reda;
  2- svaka sekcija drugog reda se realizuje kao nezavisna sekcija, pa se rednim (kaskadnim) sprezanjem ostvari $H_n(j\omega)$;
  * međusobni uticaj sekcija treba da bude mali ($Z_{izl} \to 0$, $Z_{ul} \to \infty$)

- funkcija bikvadratne sekcije:

$$H(s) = k \cdot \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} = k' \cdot \frac{s^2 + \frac{\omega_z}{Q_z} s + \omega_z^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} s + \omega_p^2}$$

$$s_{p1,2} = \sigma_p \pm j\Omega_p$$

$$s_{p1,2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{\omega_p}{Q_p} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_p}{Q_p}\right)^2 - 4\omega_p^2} \right]$$

- gde su ω_p i Q_p učestanost i Q faktor pola:

$$\omega_p = |s_{p1,2}| = \sqrt{\sigma_p^2 + \Omega_p^2}$$

$$Q_p = \frac{\omega_p}{2\sigma_p}$$

$Q_p > 1/2$ - konjugovano kompleksni polovi

$Q_p = 1/\sqrt{2}$ - max ravna amplitudska karakteristika (Batervortova)

$$H_2(j\omega) = \frac{1}{s^2 + 2(\sin\frac{\pi}{2\cdot 2})s + 1} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}\cdot s + 1} \quad \Rightarrow \quad Q_p = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- za: $a_1 = a_2 = 0$ dobija se NF

$a_1 = a_0 = 0$ dobija se VF

OSETLJIVOSTI

- zbog neidealnosti komponenata realizacija funkcije prenosa uvek odstupa od projektovane;
- uticaj: tolerancije elemenata, promene temperature, vlažnosti, starenja itd.
- kaskadne realizacije su posebno loše, jer se zbog izolovanosti sekcija ne može postići interna kompenzacija ovih promena, već se one sabiraju;
- kod složenijih realizacija moguće je topologijom kola umanjiti uticaj promena vrednosti komponenata na funkciju prenosa;

- diferencijalna osetljivost $y=f(x)$ je relativna promena y nastala usled relativne promene x:

$$S_x^y = \frac{\frac{\partial y}{y}}{\frac{\partial x}{x}} = \frac{\partial(\ln y)}{\partial(\ln x)} = \frac{x}{y}\frac{\partial y}{\partial x}$$

- osobine osetljivosti:

1. $y=\text{const}=a \quad \Rightarrow \quad S_x^a=0$
2. $S_x^{a\cdot y}=S_{a\cdot x}^y=S_x^y$
3. $S_x^x=S_x^{a\cdot x}=1$
4. $S_{1/x}^y=S_x^{1/y}=-S_x^y$
5. $S_x^{y_1\cdot y_2}=S_x^{y_1}+S_x^{y_2}$ - posledica: $S_x^{y^n}=n\cdot S_x^y$ ili $S_x^{y_1/y_2}=S_x^{y_1}-S_x^{y_2}$
6. $S_x^{y_1\pm y_2}=\dfrac{y_1\cdot S_x^{y_1}\pm y_2\cdot S_x^{y_2}}{y_1\pm y_2}$
7. $y=x_1^a\cdot x_2^b\cdot x_3^c\ldots \Rightarrow S_{x_1}^y=a \quad S_{x_2}^y=b\ldots$

- najčešće se određuju osetljivosti nula i polova funkcije drugog reda na promene elemenata u kolu:

$$H(j\omega)=k\cdot\frac{s^2+\frac{\omega_z}{Q_z}s+\omega_z^2}{s^2+\frac{\omega_p}{Q_p}s+\omega_p^2}$$

$k,\omega_z,Q_z,\omega_p,Q_p,\ldots$ - su funkcije R, C, ...

$$S_{C_1}^{\omega_p}=\frac{C_1}{\omega_p}\frac{\partial\omega_p}{\partial C_1}\qquad S_{R_2}^{\omega_p}=\frac{R_2}{\omega_p}\frac{\partial\omega_p}{\partial R_2}\qquad\ldots\qquad S_{C_i,R_i}^{Q_p},\quad S_{C_i,R_i}^{\omega_z},\quad S_{C_i,R_i}^{Q_z},\quad S_{C_i,R_i}^{k}$$

- u zavisnosti od realizacije filtra postižu se manje ili veće osetljivosti;

$\omega_p=f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ $\quad x_i$ - parametri komponenata

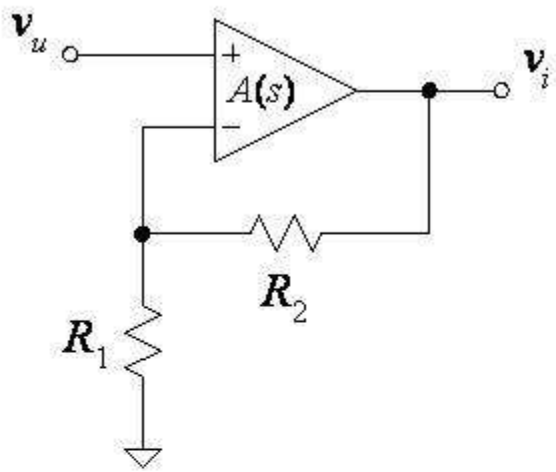
$$\Delta\omega_p=\frac{\partial\omega_p}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial\omega_p}{\partial x_2}\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial\omega_p}{\partial x_n}\Delta x_n$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\omega_p}{\partial x_j}\Delta x_j\frac{x_j}{\omega_p}\frac{\omega_p}{x_j}=\sum_{j=1}^{n}S_{x_j}^{\omega_p}\frac{\Delta x_j}{x_j}\omega_p\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\Delta\omega_p}{\omega_p}=\sum_{j=1}^{n}S_{x_j}^{\omega_p}\underbrace{\frac{\Delta x_j}{x_j}}_{\text{varijabilnost komponente}}$$

- najčešće je:

$$\frac{\Delta\omega_p}{\omega_p}=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}S_{C_i}^{\omega_p}\frac{\Delta C_i}{C_i}+\sum_{i=1}^{m}S_{R_i}^{\omega_p}\frac{\Delta R_i}{R_i}}_{\text{uticaj pasivnih elemenata}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{l}S_{k_i}^{\omega_p}\frac{\Delta k_i}{k_i}}_{\text{uticaj aktivnih elemenata (pojačavača)}}$$

- ako je npr. korišćen pojačavač:

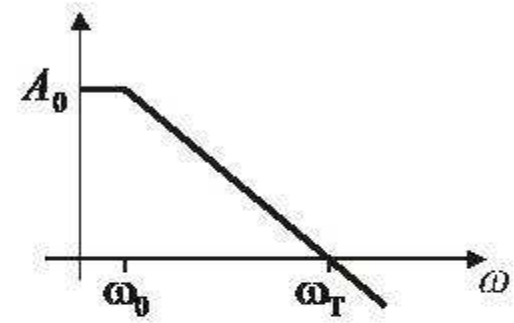


- za idealni OP $\frac{v_i}{v_u}=k_1=1+\frac{R_2}{R_1}$

- međutim, OP se ne može smatrati idealnim:

$$A(s)=\frac{A_0}{1+\frac{s}{\omega_0}}$$

$$A(j\omega)=\frac{A_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\Bigg|_{\omega>>\omega_0}\approx\frac{A_0\omega_0}{j\omega}$$



jer je mali propusni opseg

$\Rightarrow$ opravdana je aproksimacija: $A(s)\approx\frac{A_0\omega_0}{s}=\frac{\omega_T}{s}$

Zato se uvode aktivne osetljivosti:

- OP je neidealan sa $A(s)=\omega_T/s \Rightarrow$ izračuna se ω_{pa}, Q_{pa}, ω_{za}, ...
- izračunaju se osetljivosti tih funkcija na parametar ω_T

- često se lako računaju $S_x^{\omega_p}$ i $S_x^{\omega_p/Q_p}$

$$S_x^{\omega_p/Q_p}=S_x^{\omega_p}-S_x^{Q_p} \quad \Rightarrow \quad S_x^{Q_p}$$

- osetljivosti funkcije prenosa:

$$S_x^{H(s)} = \frac{\partial(\ln H(s))}{\partial(\ln x)} = \frac{x}{H(s)} \cdot \frac{\partial H(s)}{\partial x}$$

x - proizvoljan parametar

- za:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s - p_j)}$$

$$\Delta(\ln H(s)) = \frac{\Delta H(s)}{H(s)} = \frac{\Delta K}{K} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta z_i}{s - z_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta p_j}{s - p_j}$$

$$S_x^{H(s)} = \frac{x}{H(s)} \cdot \frac{\Delta H(s)}{\Delta x} = \frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta H(s)}{H(s)} = S_x^K - \sum_{i=1}^{m} \frac{x}{s - z_i} \cdot \frac{\Delta z_i}{\Delta x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{x}{s - p_j} \cdot \frac{\Delta p_j}{\Delta x}$$

- poluosetljivosti nula i polova:

$$S_x^{z_i} = \frac{\Delta z_i}{\Delta(\ln x)} = \frac{\partial z_i}{\partial(\ln x)} = x \cdot \frac{\partial z_i}{\partial x}$$

$$S_x^{p_i} = x \cdot \frac{\partial p_i}{\partial x}$$

$$S_x^{H(s)} = S_x^K - \sum_{i=1}^{m} \frac{S_x^{z_i}}{s - z_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{S_x^{p_j}}{s - p_j}$$

- nekad nije pogodno računati osetljivost funkcije prenosa preko nula i polova:

$$H(j\omega)=|H(j\omega)|\cdot e^{j\Phi(\omega)} \quad \Rightarrow \quad \ln H(j\omega)=\ln|H(j\omega)|+j\Phi(\omega)=\alpha(\omega)+j\Phi(\omega)$$

pojačanje u neperima

faza u [rad]

$$S_x^{H(j\omega)}=S_x^{\alpha(\omega)}+jS_x^{\Phi(\omega)}$$

- osobine:

NKNG, SKSG, NKSG, SKNG

$$H(s)=H(R_i,L_i,C_i,\mu_i,\alpha_i,g_i,r_i,s)$$

- ako se sve impedanse skaliraju impedansom a:

$$H\left(aR_i,aL_i,\frac{C_i}{a},\mu_i,\alpha_i,\frac{g_i}{a},ar_i,s\right)=H(R_i,L_i,C_i,\mu_i,\alpha_i,g_i,r_i,s)$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \quad \Rightarrow \quad \sum R_i\frac{\partial H}{\partial R_i}+\sum L_i\frac{\partial H}{\partial L_i}-\sum\frac{C_i}{a^2}\frac{\partial H}{\partial C_i}+\sum r_i\frac{\partial H}{\partial r_i}-\sum\frac{g_i}{a^2}\frac{\partial H}{\partial g_i}\Bigg|_{\substack{aR_i\\aL_i\\\vdots}}=0$$

$\Rightarrow$ u RC mreži sa NKNG (a to je i OP) za a=1:

$$\sum R_i\frac{\partial H}{\partial R_i}=\sum C_i\frac{\partial H}{\partial C_i} \quad /:H \quad \Rightarrow \quad \sum S_{R_i}^H=\sum S_{C_i}^H$$

- znači da je uticaj svih R i svih C na promene $H(s)$ isti, pa ako je $\Delta R/R$ i $\Delta C/C$ suprotnog znaka (npr. temperaturni koeficijenti za R_i i C_i), $H(s)$ se ne menja.

- za skaliranje učestanosti faktorom a:

$$\omega L \quad \rightarrow \quad a\omega L \quad \Leftrightarrow \quad aL$$

$$\frac{1}{\omega C} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a\omega C} \quad \Leftrightarrow \quad aC$$

$$H'(R_i, aL_i, aC_i, \mu_i, \alpha_i, g_i, r_i, s) = H(R_i, L_i, C_i, \mu_i, \alpha_i, g_i, r_i, as)$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \quad \Rightarrow \quad \sum L_i \frac{\partial H'}{\partial (aL_i)} + \sum C_i \frac{\partial H'}{\partial (aC_i)} = s \cdot \frac{\partial H}{\partial as}$$

- za a=1 i deljenjem sa H:

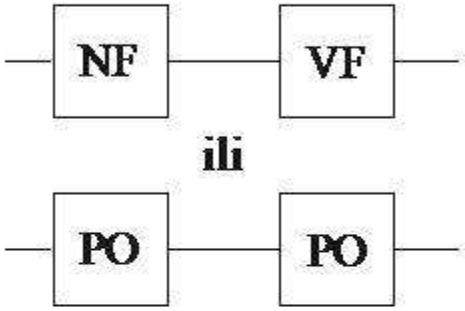
$$\sum S_{L_i}^H + \sum S_{C_i}^H = S_s^H$$

RAZLAGANJE FUNKCIJE PRENOSA VIŠEG REDA

- ako je filtar neparnog reda, dobija se jedna sekcija I i ostale II reda;
- sekcija I reda se prosto realizuje preko *RC* kola;
- ako se uzmu u obzir i nule u ∞, onda parna funkcija *n*-tog reda ima isti broj nula i polova i može se na (*n*/2)! načina razložiti na sekcije II reda;

$$H(s)=k\cdot\frac{s^2}{\left(s^2+\frac{\omega_{p1}}{Q_{p1}}s+\omega_{p1}^2\right)\left(s^2+\frac{\omega_{p2}}{Q_{p2}}s+\omega_{p2}^2\right)}$$

npr.



- kako upariti nule i polove, kakav da bude raspored bikvadratnih sekcija i kako raspodeliti *k*?

- postoje optimizacione metode, koje zahtevaju programsku podršku;

- praktična iskustva:
  1- uparuje se par polova sa najvećim *Q* faktorom (kritični par) sa nulama koje su najbliže propusnom opsegu filtra;
  2- redosled: prvo sekcija sa polovima koji imaju najmanji *Q* faktor i tako redom (korisno je npr. da NF bude na ulazu, da bi se eliminisale VF smetnje)