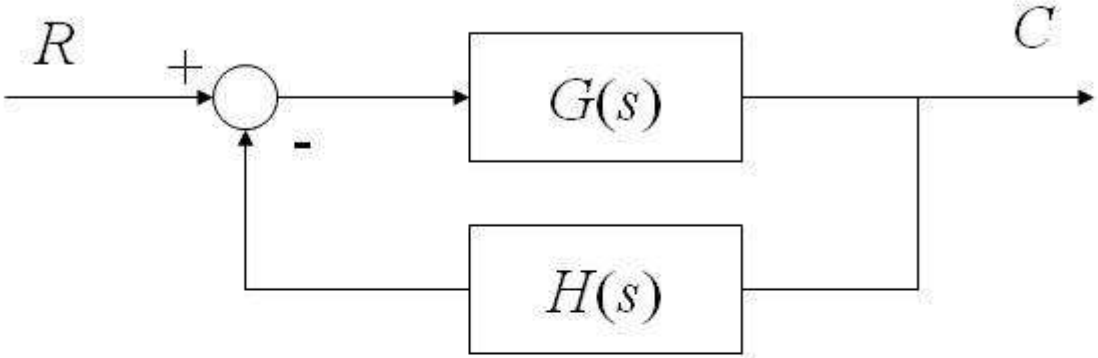
Geometrijska mesta korenova (Root locus)



$$F = \frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH}$$

$$GH = \frac{KN(s)}{D(s)} = \frac{K(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \ldots\ldots a_0)}{s^n + b_{n-1} + \ldots\ldots b_0}$$

Relativno kružno pojačanje

$$m \le n$$

$$F = \frac{G}{1+KN/D} = \frac{GD}{D+KN}$$

Prenosna funkcija sa povratnom spregom

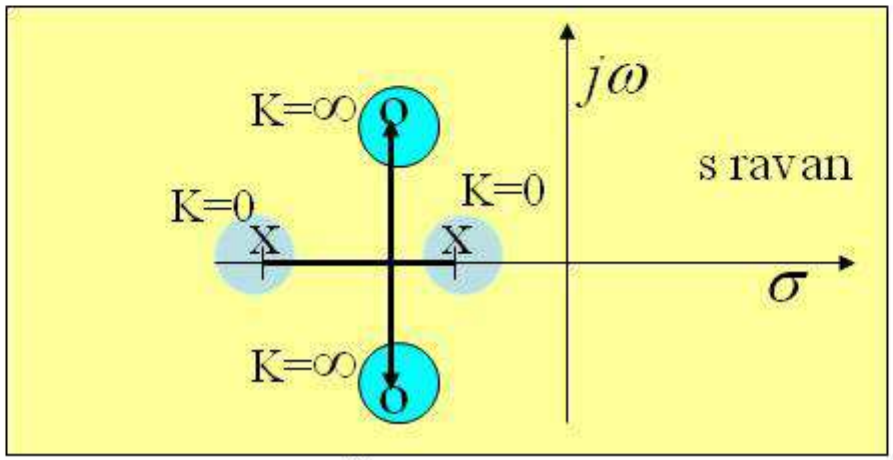
Polovi prenosne funkcije sa povratnom spregom su korenovi karakteristične jednačine

$$D(s) + KN(s) = 0$$

$$\boxed{P(s) = D(s) + KN(s) = 0} \qquad K \geq 0$$

- Geometrijska mesta korenova u *s* ravni zavise od K
- Za K=0 rešenja P(s) su jednaka rešenjima D(s) (Polovima GH(s))
- Za K=∞ rešenja P(s) su jednaka rešenjima N(s) (Nulama GH(s))

Polovi kružnog pojačanja $\xrightarrow{K=0 \qquad K=\infty}$ Nule kružnog pojačanja



Pravila za crtanje geometrijskih mesta korenova

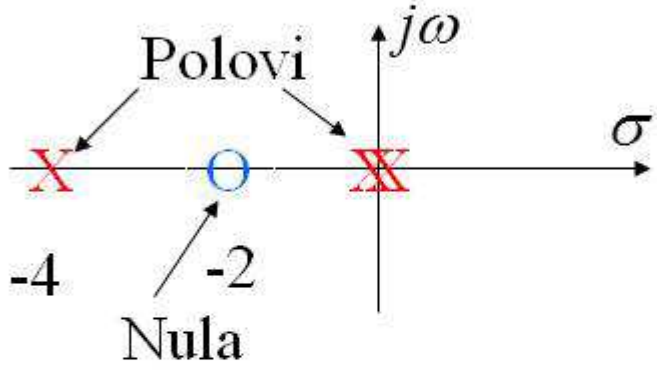
•Pravilo 1:

Broj grana je jednak broju polova kružnog pojačanja (redu karakteristične jednačine).

$$GH = \frac{K(s+2)}{s^2(s+4)}$$

↑

Tri grane geom. mesta

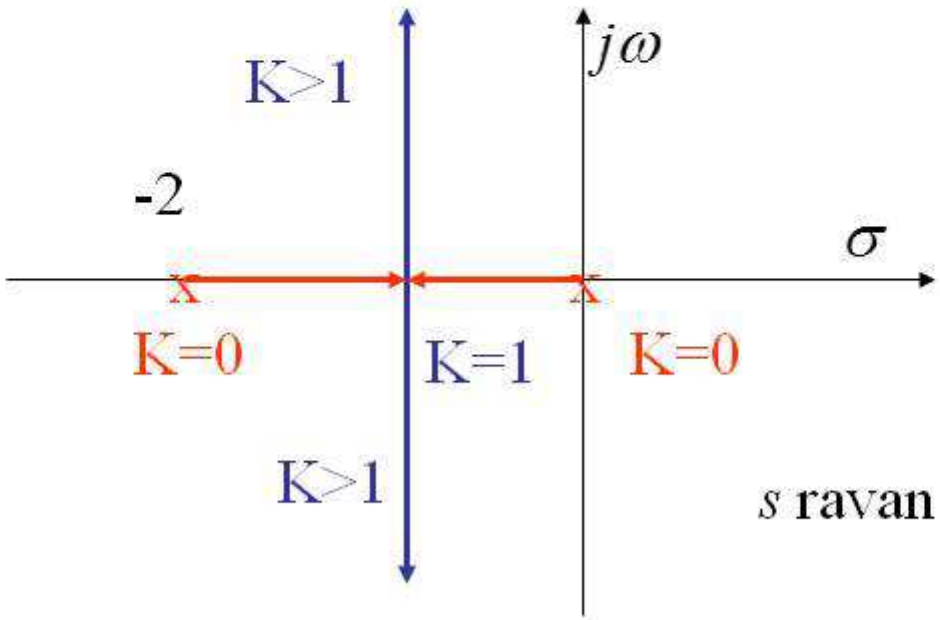


• Pravilo 2:

Svaka grana polazi iz jednog pola kružnog pojačanja, za K=0, i završava ili u konačnoj nuli kružnog pojačanja ili u beskonačnosti, za K= ∞.

• Pravilo 3

Grane se poklapaju sa realnom osom ili se javljaju u konjugovano kompleksnim parovima.

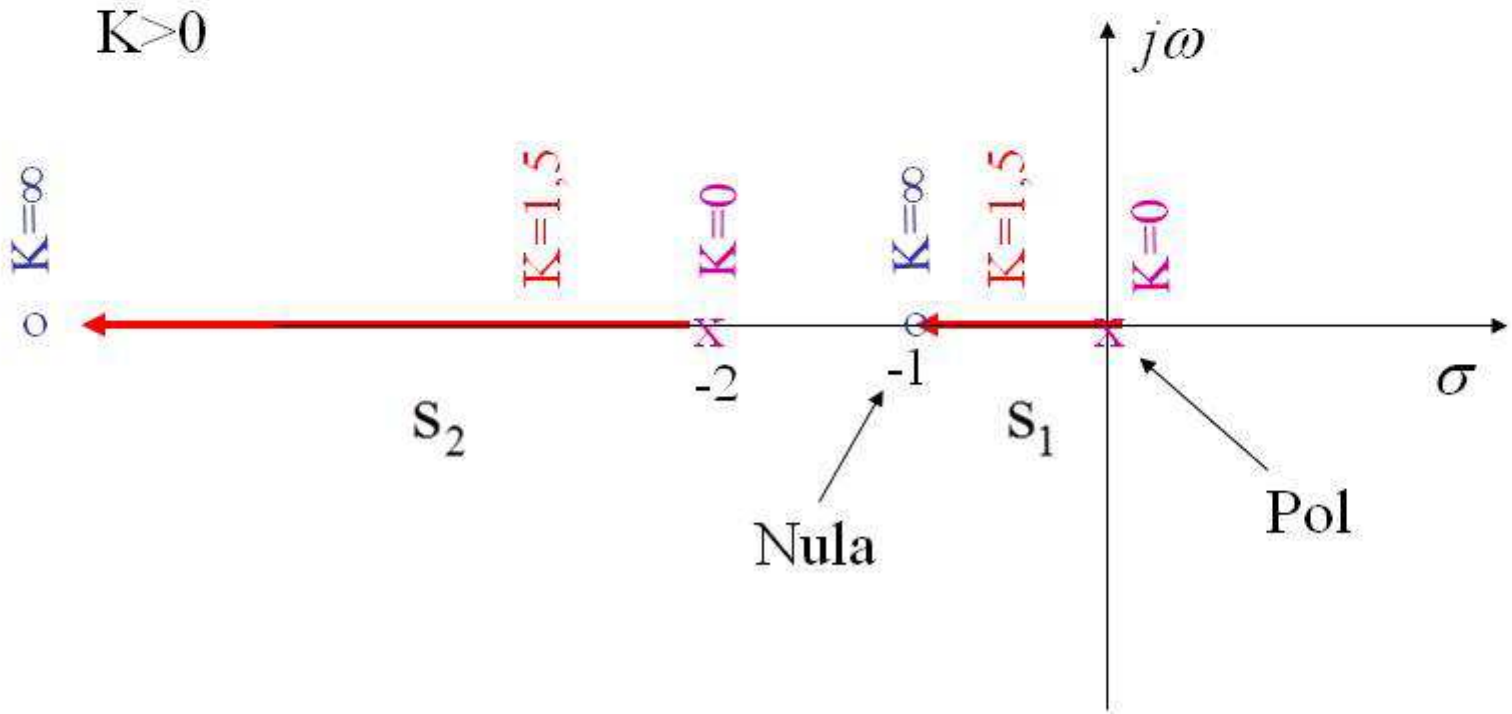


$$GH = \frac{K}{s(s+2)}$$

$$m = 0, n = 2$$

• Pravilo 4

Geometrijskom mestu pripadaju delovi realne ose levo od neparnog broja singulariteta (polova i nula) funkcije GH, za K>0.

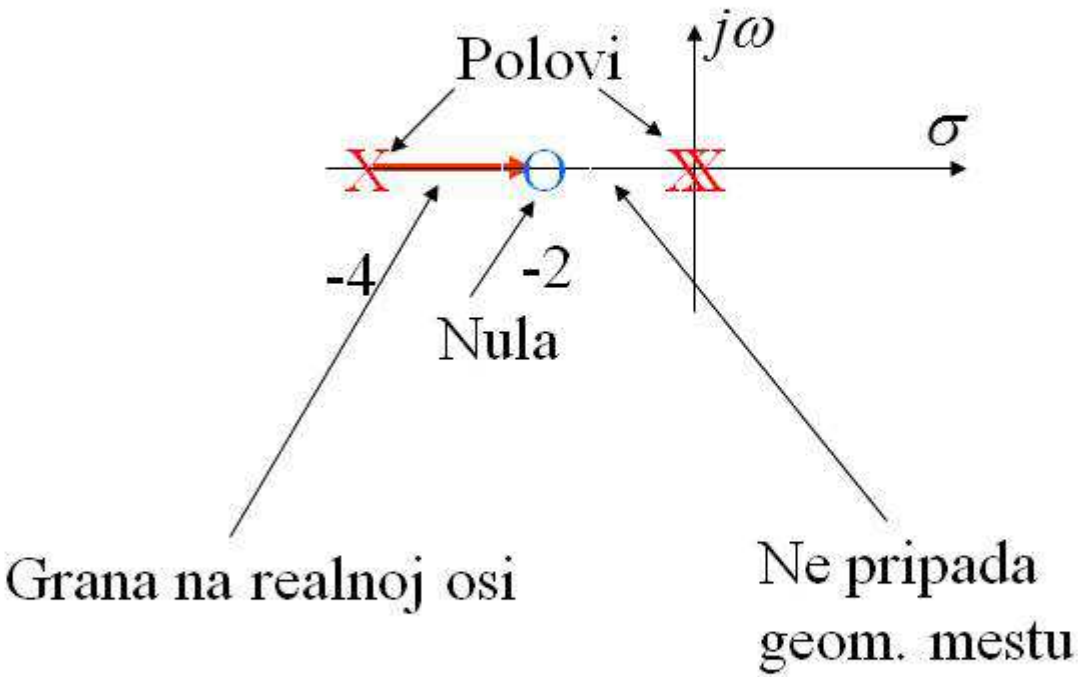


Primer:

$$GH = \frac{K(s+2)}{s^2(s+4)}$$

↑

Tri grane



• Pravilo 5

Ako kružno pojačanje ima n polova i m konačnih nula, asimptote grana zaklapaju sa realnom osom uglove:

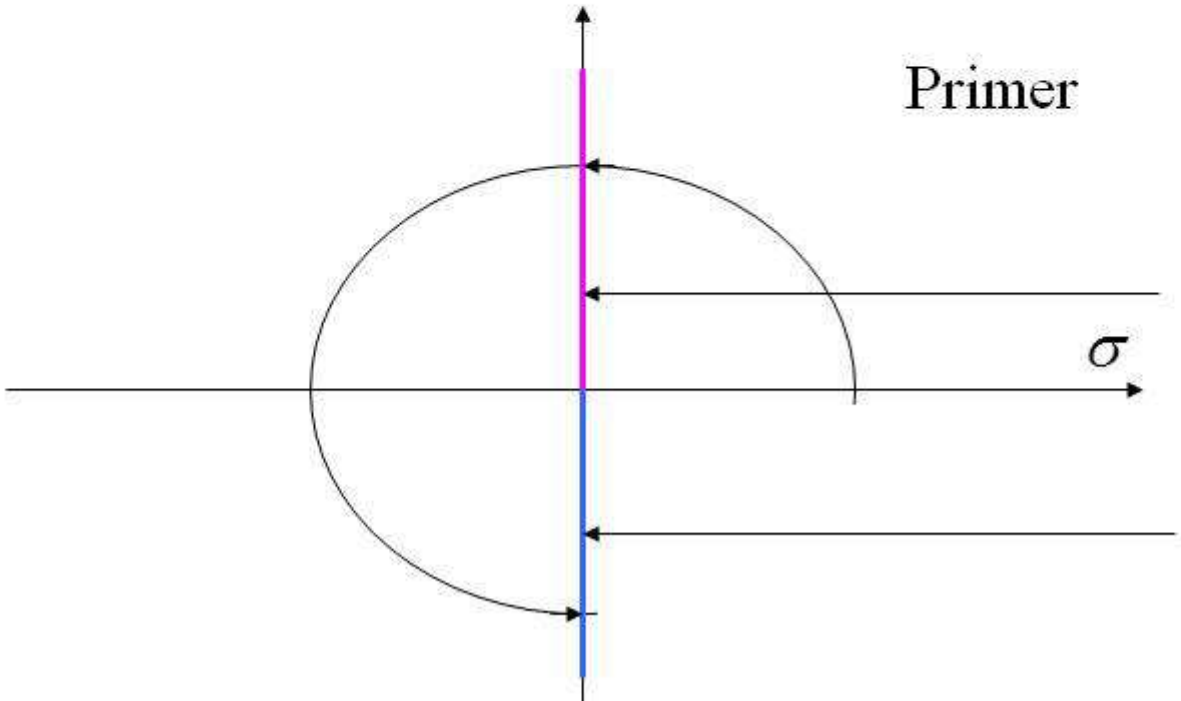
$$\boxed{\Phi = \frac{(2L+1)\cdot 180}{n\text{-}m}}$$

L=0,1,2,3…..,(n-m-1)

Postoji n-m asimptota

Primer

$$\boxed{GH = \frac{K}{s(s+2)} \quad m = 0, n = 2}$$

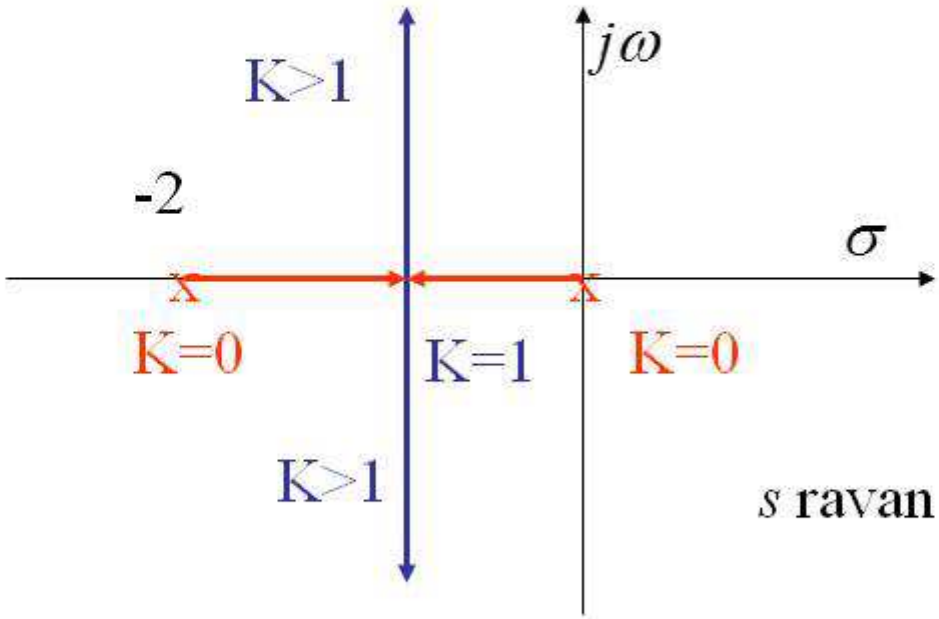


$$\frac{180°}{n\text{-}m}(L=0) = 90°$$

$$\frac{3\cdot 180°}{n\text{-}m}(L=1) = 270°$$

$$GH = \frac{K}{s(s+2)}$$

$$m = 0, n = 2$$



• Pravilo 6

Asimptote se seku na realnoj osi u tački σ_a datoj izrazom

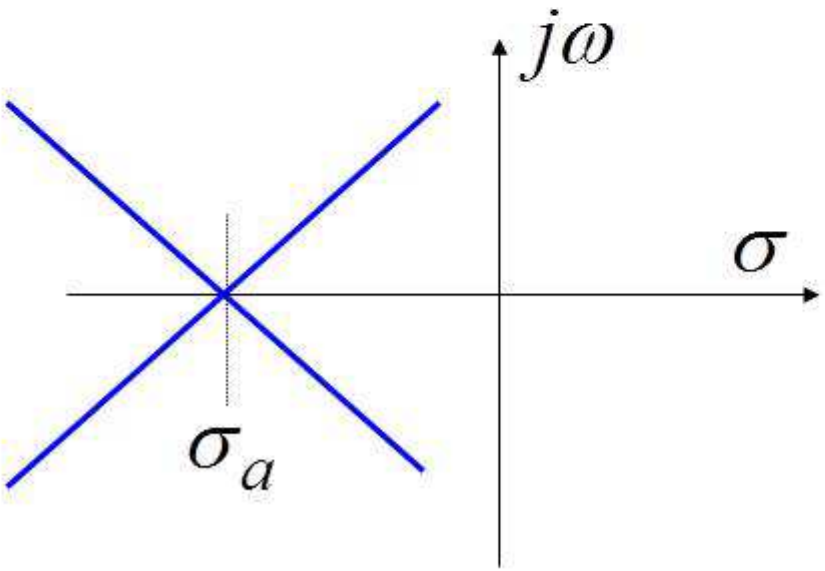
$$\boxed{\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{\text{n-m}}}$$

primer:

$\boxed{\text{n} - \text{m} = 4}$

$p_i = \text{pol}$

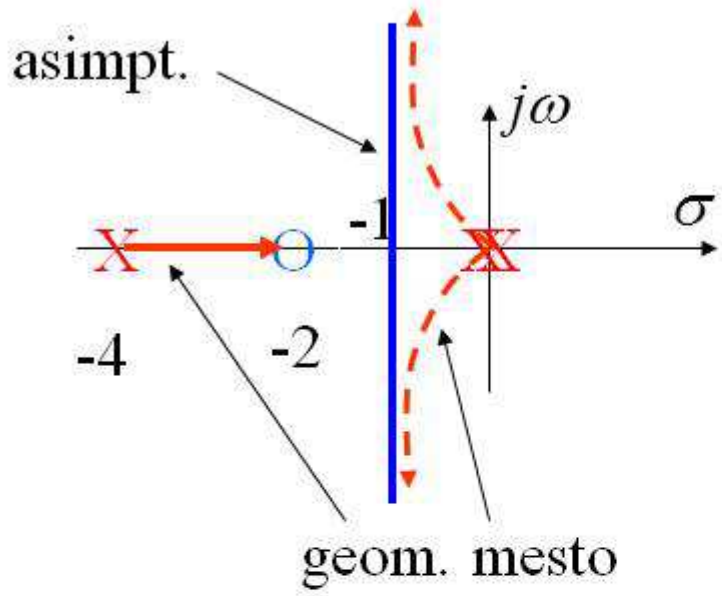
$z_i = \text{nula}$



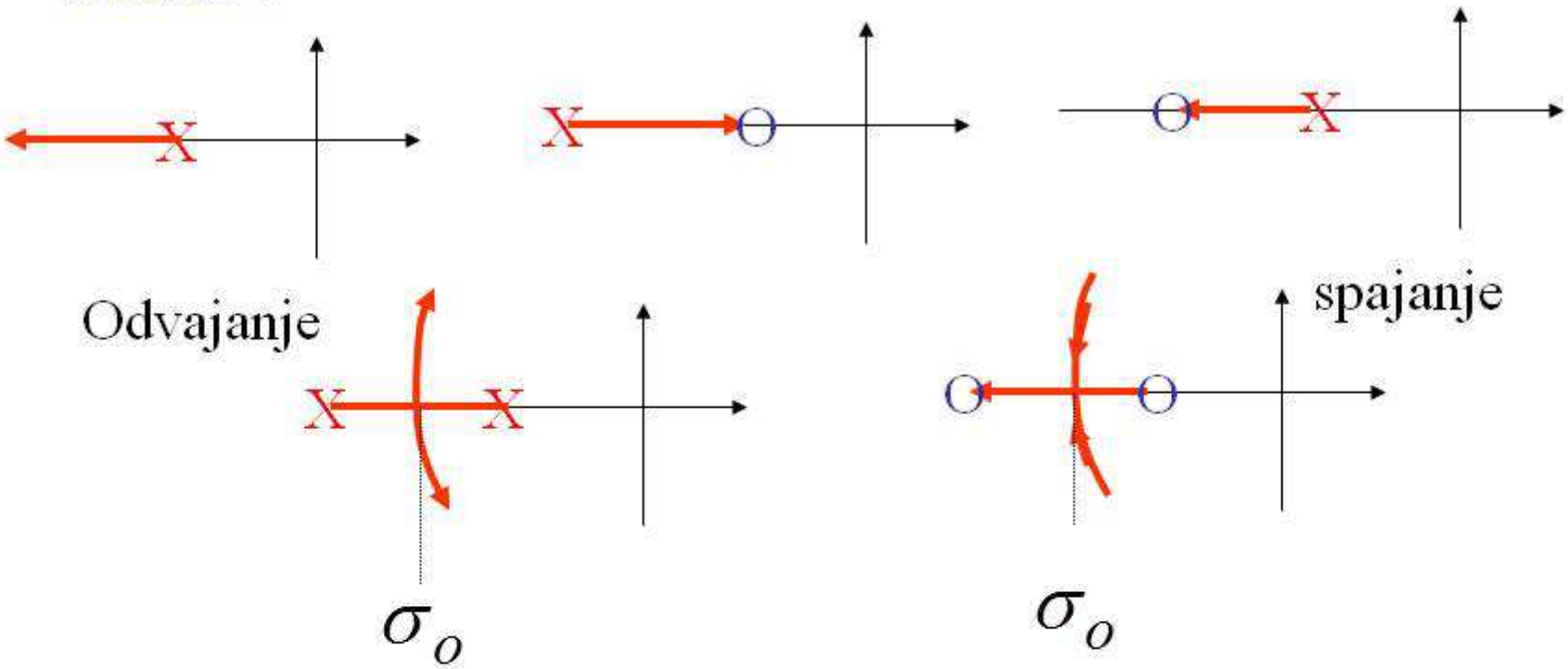
• Primer:

$$GH = \frac{K(s+2)}{s^2(s+4)}$$

$$\sigma_a = \frac{-4+2}{2} = -1$$



• Pravilo 7



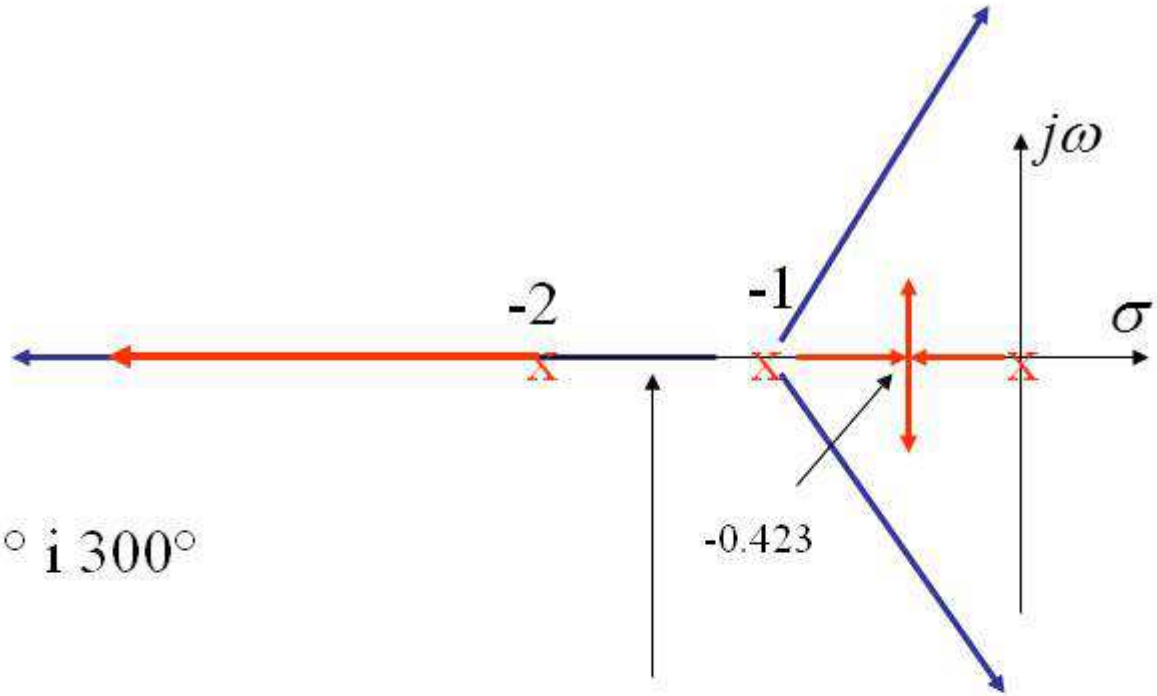
Tačka odvajanja od realne ose (između dva pola) ili spajanja (izmedju dve nule), σ_o je data izrazom:

(Prvi način)

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_o - p_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sigma_o - z_i}}$$

Primer:

$$GH = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$



3 asimptote: 60 °,180 ° i 300°

$$\sigma_a = \frac{-1-2}{3} = -1$$

Deo realne ose koji ne pripada geom. mestu

Tačka odvajanja:

$$\frac{1}{\sigma_o} + \frac{1}{\sigma_o+1} + \frac{1}{\sigma_o+2} = 0 \quad 3\sigma_o^2 + 6\sigma_o + 2 = 0$$

Odgovarajuća vrednost K je negativna

$$\boxed{\sigma_o = -0.423, -1.577}$$

Drugi način:

Tačka odvajanja se dobija diferenciranjem $V(s)$ po s i izjednačavanjem sa nulom, gde je

$$\boxed{V(s)=\frac{1}{\mathrm{GH}}}$$

Primer: $$\mathrm{GH}=\frac{\mathrm{K}}{s(s+1)(s+2)}$$

$$V(s)=\frac{s(s+1)(s+2)}{\mathrm{K}}=\frac{s^3+3s^2+2s}{\mathrm{K}}$$

$$\frac{dV}{ds}=\frac{3s^2+6s+2}{\mathrm{K}}=0$$

$$s_{\sigma_o}=-1.577,-0.423$$

• Pravilo 8

Presek geometrijskog mesta korenova sa imaginarnom osom:
Granična vrednost K za stabilnost može da se odredi
Rut-Hurvicovim kriterijumom, a zatim i vrednosti na imaginarnoj osi u tačkama presecanja.

Karakteristična jednačina $$1+\mathrm{K}\frac{N(j\omega_1)}{D(j\omega_1)}=0$$

Primer: $$\mathrm{GH}=\frac{\mathrm{K}}{s(s+1)(s+2)}$$

Karakteristična jednačina $$\mathrm{s}^3+3\mathrm{s}^2+2\mathrm{s}+\mathrm{K}=0$$

$$\boxed{s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0}$$

Rut – Hurvicova tabela:

s^3	1	2
s^2	3	K
s^1	$(6-K)/3$	0
s^0	K	0

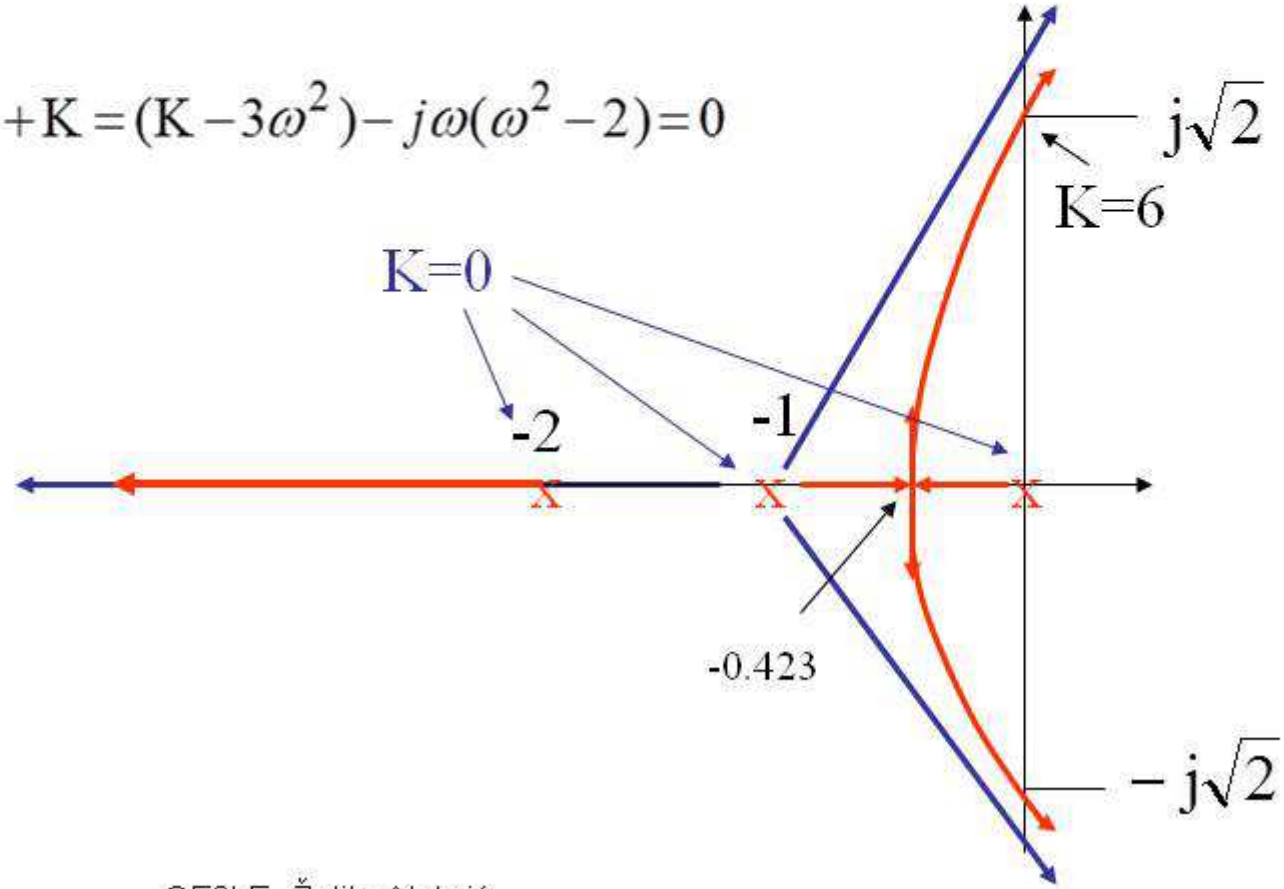
Za K=6 dobijaju se dva pola na imaginarnoj osi

Primer: $\boxed{s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0}$

$$s = j\omega$$

$$-j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + K = (K - 3\omega^2) - j\omega(\omega^2 - 2) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega^2 &= 2 \\ K &= 3\omega^2 = 6 \end{aligned}}$$



Razlika između sume argumenata svih vektora povučenih iz konačnih nula relativnog kružnog pojačanja u bilo koju tačku s_i geometrijskog mesta, i sume argumenata svih vektora povučenih u tu tačku iz polova relativnog kružnog pojačanja je -180° + $2k\pi$.

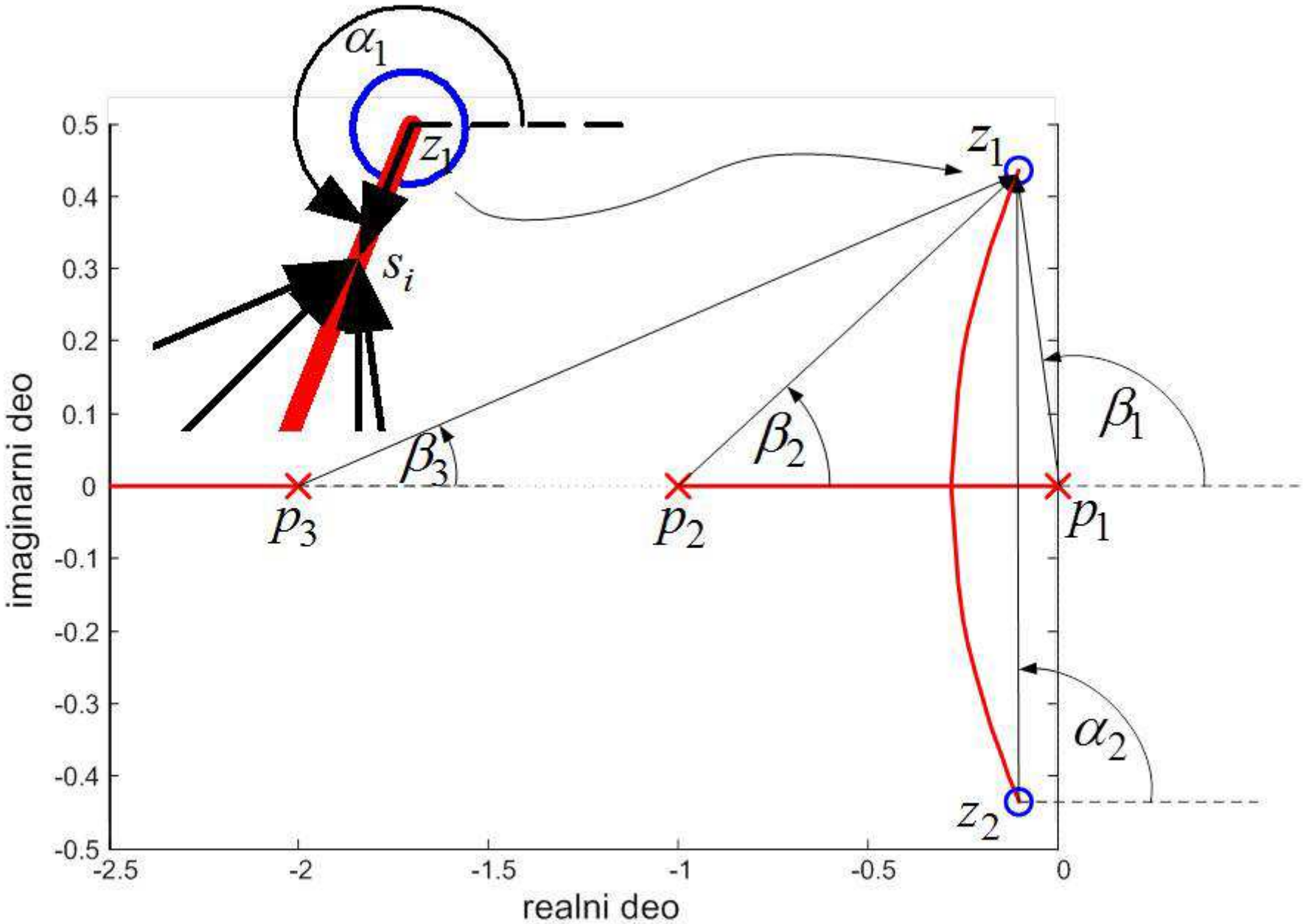
$$\mathrm{K}\frac{(s_i - z_1)\ldots(s_i - z_\mathrm{m})}{(s_i - p_1)\ldots(s_i - p_\mathrm{n})} = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\mathrm{m}} \alpha_k - \sum_{k=1}^{\mathrm{n}} \beta_k = -180° + k \cdot 360°$$

• Pravilo 9

Ugao pod kojim grana geometrijskog mesta napušta pol ili završava u konačnoj nuli kružnog pojačanja je

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{m}} \alpha_k - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{\mathrm{n}} \beta_k - \beta_i = -180° \qquad \alpha_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{\mathrm{m}} \alpha_k - \sum_{k=1}^{\mathrm{n}} \beta_k = -180°$$

pri čemu su uglovi α_k, β_k računati u odnosu na $s_i \cong z_i$ tj. $s_i \cong p_i$.



Primer određivanja ugla α_1, pod kojim grana završava u nuli z_1.

Za n – m ≥ 2 ukupan pomeraj po granama u levo i desno je isti

$$D(s)+KN(s)=s^{n}+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_{1}s+a_{0}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n-1}=\text{const}=-\sum \text{ korenova jednačine}$$

Vrednost pojačanja K koja odgovara tački s_i na geometrijskom mestu se određuje kao

$$\boxed{\mathrm{K}=-\frac{(s_i-p_1)(s_i-p_2)\ldots(s_i-p_{\mathrm{n}})}{(s_i-z_1)(s_i-z_2)\ldots(s_i-z_{\mathrm{m}})}}$$

Primer:

$$\boxed{GH(s)=\frac{K(s+2)}{(s+1)^2}}$$

Jedna nula u –2

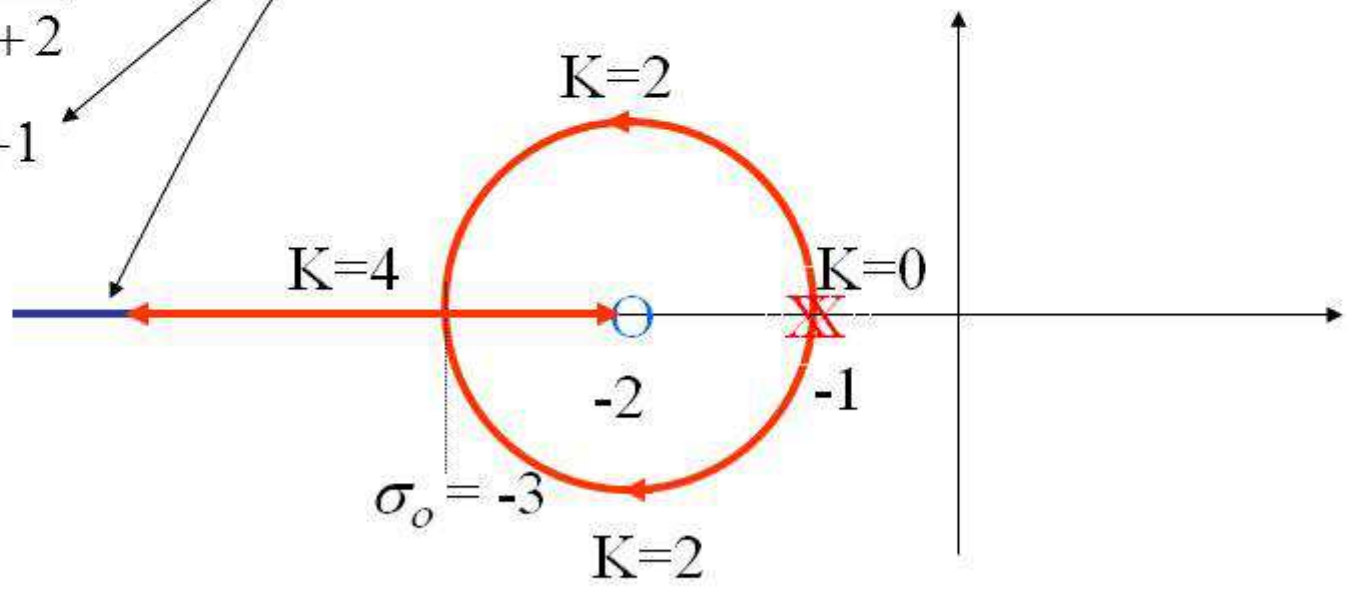
Dva pola u –1 (to je i tačka odvajanja)

Tačka spajanja u -3

Jedna asimptota pod uglom od 180°

$$2\cdot\frac{1}{\sigma_o+1}=\frac{1}{\sigma_o+2}$$

$$2\sigma_o+4=\sigma_o+1$$



Geometrijsko mesto van realne ose predstavlja krug:

Karakteristična jednačina: $s^2 + s(2+K) + 2K + 1 = 0$

Za K<4

$$s_{1,2} = \frac{-(2+K) \pm j\sqrt{K(4-K)}}{2}$$

Za K>4

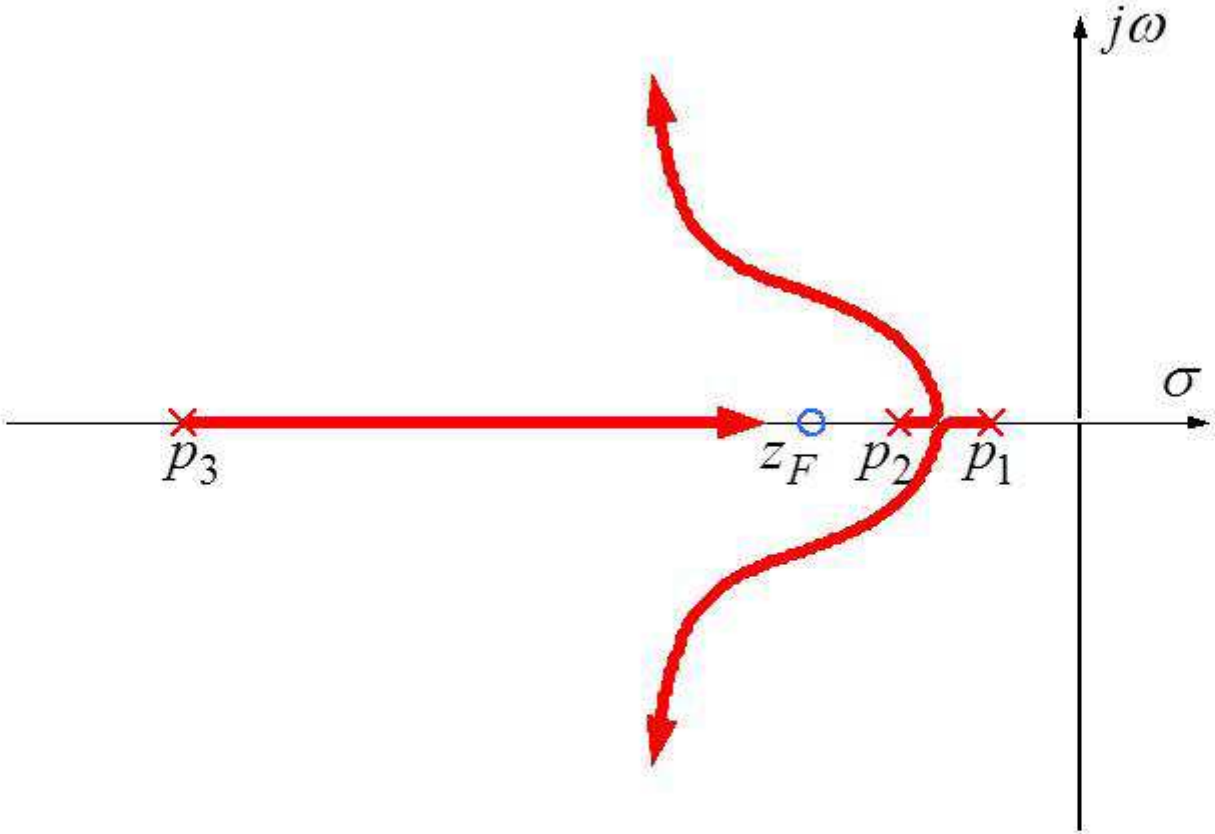
$$s_{1,2} = \frac{-(2+K) \pm \sqrt{K(K-4)}}{2}$$

↘

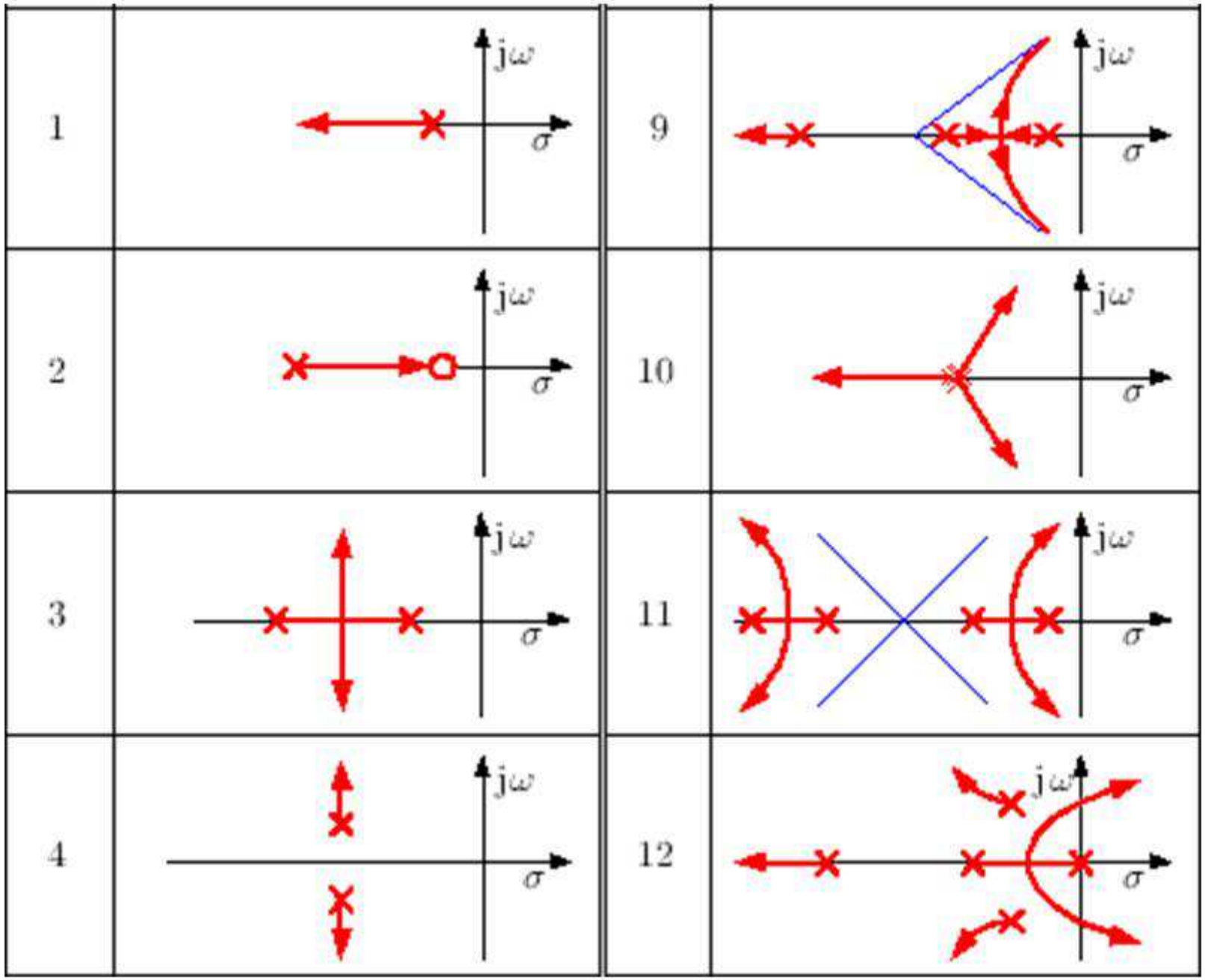
Smena: $$s_{1,2} + 2 = c_{1,2} = \frac{-(-2+K) \pm j\sqrt{K(4-K)}}{2}$$

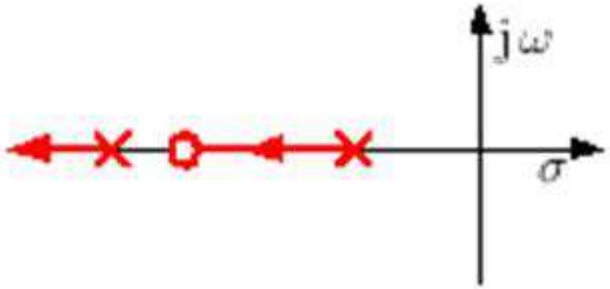
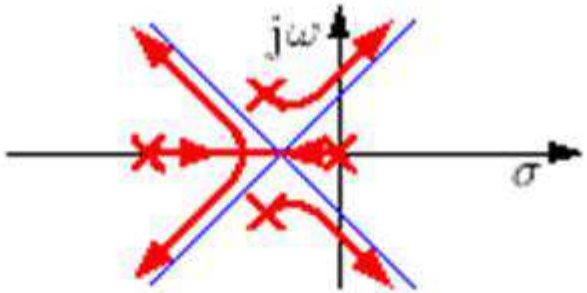
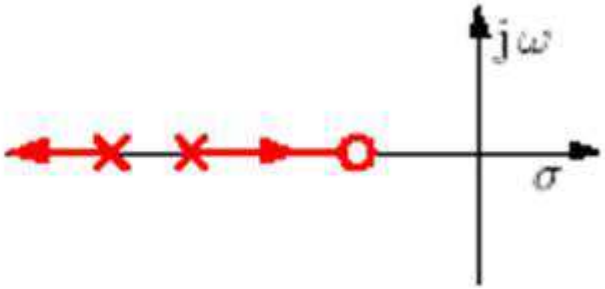
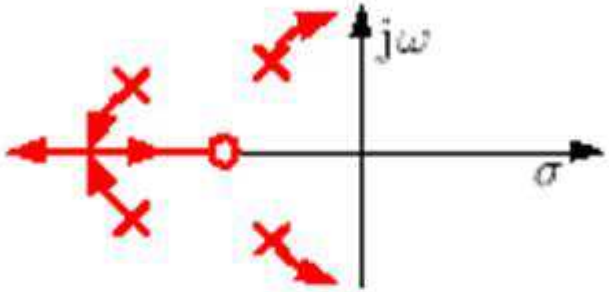
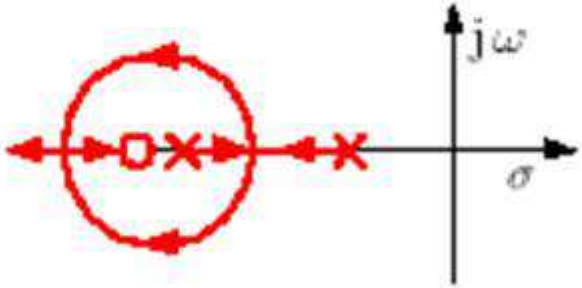
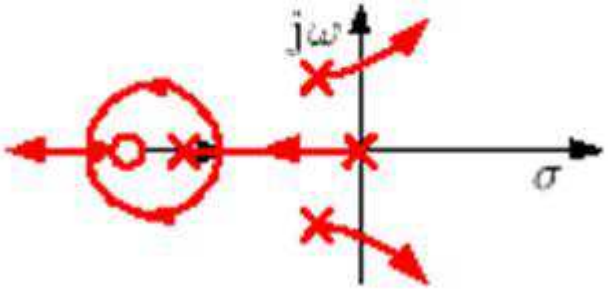
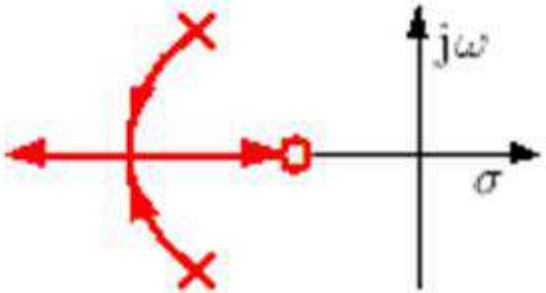
$$4\left|c_{1,2}\right|^2 = (K-2)^2 + K(4-K) = \cancel{K^2} \cancel{-4K} + 4 \cancel{+4K} \cancel{-K^2}$$

$$\left|c_{1,2}\right|^2 = 1$$



Mogući izgled geometrijskog mesta ako kružno pojačanje ima i treći, nedominantan pol


1
2
3
4
9
10
11
12
jω
σ

5		13	
6		14	
7		15	
8		16