
9. SINTEZA SISTEMA SA KONAČNIM IMPULSNIM ODZIVOM

Poznato je da u analognim sistemima ne postoje funkcije prenosa koje imaju samo nule, jer se to protivi uslovima fizičke ostvarljivosti [R-20, P-1]. Zbog toga se funkcije prenosa sistema sa konačnim impulsnim odzivom (FIR tipa) sintetizuju direktnom sintezom u z -ravni, uglavnom uz upotrebu računara. U ovom poglavlju će biti razmotreno nekoliko postupaka sinteze FIR sistema od kojih svaki ima svoje prednosti i nedostatke. Najjednostavniji za primenu je metod sinteze koji koristi *prozorske funkcije* za ograničavanje impulsnog odziva. Nešto složeniji metod je *metod frekvencijskog odabiranja* koji je u tesnoj vezi sa metodom realizacije koji je opisan u odeljku 7.2.3. Najbolji rezultati se dobijaju korišćenjem *optimizacionih metoda projektovanja*, posebno Remezovog algoritma za izjednačavanje ekstremuma.

U poređenju sa IIR sistemima, može se lako uočiti da FIR sistemi koji zadovoljavaju iste specifikacije uvek imaju znatno viši red. Objašnjenje ove pojave je vrlo jednostavno: funkcija prenosa FIR tipa ima znatno manji broj slobodnih parametara od funkcije prenosa IIR tipa koja je istog reda. Stoga se može postaviti pitanje imaju li FIR filtri primenu u obradi signala. Odgovor na ovo pitanje je višestruko potvrđan. Pre svega, pomoću funkcija prenosa FIR tipa mogu se tačno ostvariti neke karakteristike koje IIR sistemi mogu samo aproksimativno da ostvare. Takve karakteristike su na primer: linearna faza, linearna amplitudska karakteristika, konstantan fazni pomeraj od 90° . Osim toga, mogu se jednostavno projektovati i selektivni filtri kod kojih su gabariti zadati na nestandardan način koji onemogućava primenu klasične sinteze u analognom domenu i preslikavanje.

Nagli porast interesovanja za FIR sisteme nastao je sa razvojem tehnika za brzo izračunavanje diskretne Furijeove transformacije što je omogućilo povećanje efikasnosti izračunavanja sistema baziranih na FIR strukturama. U poslednjih nekoliko godina, sa pojavom specijalizovanih procesora za brzo izračunavanje konvolucije, interes za FIR sisteme je još više povećan.

9.1 NEKE VAŽNE OSOBINE FIR SISTEMA SA LINEARNOM FAZOM

Funkcija prenosa diskretnog sistema sa konačnim impulsnim odzivom (FIR) data je izrazima (6.43) i (7.4):

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} b_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] z^{-n} \quad (9.1)$$

Na jediničnom krugu frekvencijski odziv FIR sistema dat je izrazom:

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]e^{-jn\Omega} = |H(e^{j\Omega})|e^{j\arg H(e^{j\Omega})} = M(\Omega)e^{j\theta(\Omega)} \quad (9.2)$$

gde je $M(\Omega)$ amplitudska karakteristika, a $\theta(\Omega)$ fazna karakteristika sistema. Umesto fazne karakteristike se, kao i kod analognih sistema, koristi fazno kašnjenje definisano izrazom:

$$\tau_p(\Omega) = -\frac{\theta(\Omega)}{\Omega} \quad (9.3)$$

ili, grupno kašnjenje:

$$\tau_g(\Omega) = -\frac{d\theta(\Omega)}{d\Omega} \quad (9.4)$$

koje je znatno pogodnije za izračunavanje i merenje. U slučaju da FIR sistem poseduje linearnu faznu karakteristiku, njegov impulsni odziv, amplitudska karakteristika, kao i raspored nula u z -ravni imaju izvesne specifičnosti koje će biti detaljnije razmotrene u daljem tekstu.

9.1.1 OSOBINE IMPULSNOG ODZIVA FIR SISTEMA SA LINEARNOM FAZOM

Posmatrajmo FIR sistem sa realnim impulsnim odzivom $h[n]$ čije su i grupno i fazno kašnjenje konstantni:

$$\tau_g(\Omega) = \tau_p(\Omega) = \tau \quad (9.5)$$

Fazna karakteristika takvog FIR sistema je očigledno linearna:

$$\theta(\Omega) = -\tau\Omega = \tan^{-1} \frac{-\sum_{n=0}^{M-1} h[n]\sin n\Omega}{\sum_{n=0}^{M-1} h[n]\cos n\Omega} \quad (9.6)$$

Nalaženjem tangensa leve i desne strane jednačine (9.6) dobija se:

$$\tan \tau\Omega = \frac{\sin \tau\Omega}{\cos \tau\Omega} = \frac{\sum_{n=0}^{M-1} h[n]\sin n\Omega}{\sum_{n=0}^{M-1} h[n]\cos n\Omega} \quad (9.7)$$

odnosno,

$$\sum_{n=0}^{M-1} h[n](\cos n\Omega \sin \tau\Omega - \sin n\Omega \cos \tau\Omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]\sin(\tau\Omega - n\Omega) = 0 \quad (9.8)$$

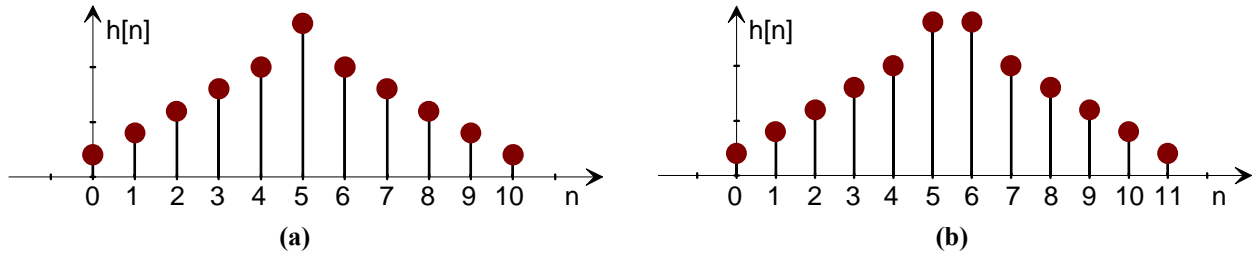
Trigonometrijska jednačina (9.8) ima mnogo rešenja, od kojih je jedno veoma jednostavno:

$$\tau = \frac{M-1}{2} \quad (9.9)$$

$$h[n] = h[M-1-n], \quad n = 0, \dots, M-1 \quad (9.10)$$

Dakle, funkcija prenosa sa konačnim impulsnim odzivom može imati konstantno grupno i fazno kašnjenje u celom propusnom opsegu ako ima impulsni odziv koji je simetričan. Ako je M

neparan broj (Tip I FIR filtra) impulsni odziv je simetričan u odnosu na centralni odbirak sa indeksom $(M-1)/2$. Ako je M paran broj (Tip II FIR filtra) impulsni odziv je simetričan u odnosu na tačku koja leži na sredini između odbiraka sa indeksima $(M-2)/2$ i $M/2$. Slučaj simetričnog impulsnog odziva prikazan je na slici 9.1.



Slika 9.1 Impulsni odziv FIR sistema koji obezbeđuje konstantno fazno i grupno kašnjenje: (a) M neparno, (b) M parno.

Međutim, u većini primena u telekomunikacijama zahteva se da samo grupno kašnjenje bude konstantno. Tada fazna karakteristika može da ima složeniji oblik:

$$\theta(\Omega) = -\tau\Omega + \theta_0 = \tan^{-1} \frac{-\sum_{n=0}^{M-1} h[n] \sin n\Omega}{\sum_{n=0}^{M-1} h[n] \cos n\Omega} \quad (9.11)$$

odakle se, sličnim postupkom kao u prethodnom slučaju, dobija jednačina:

$$\sum_{n=0}^{M-1} h[n] \sin(\tau\Omega - \theta_0 - n\Omega) = 0 \quad (9.12)$$

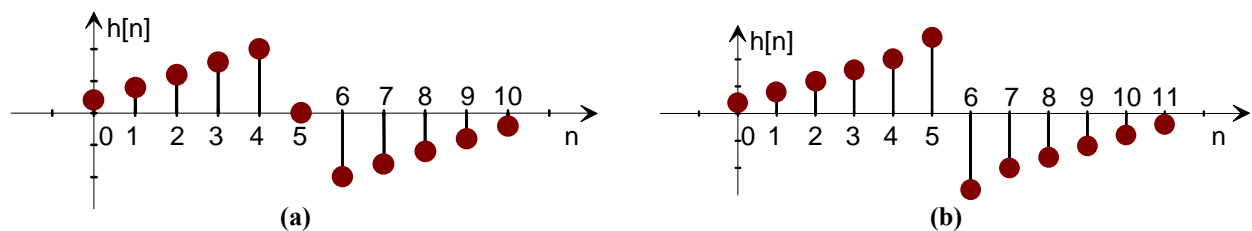
čije je rešenje:

$$\theta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \quad (9.13)$$

$$\tau = \frac{M-1}{2} \quad (9.14)$$

$$h[n] = -h[M-1-n], \quad n = 0, \dots, M-1 \quad (9.15)$$

U ovom slučaju, funkcija prenosa sa konačnim impulsnim odzivom može imati konstantno grupno kašnjenje u celom propusnom opsegu ako ima impulsni odziv koji je antisimetričan. Ako je M neparan broj (Tip III FIR filtra) impulsni odziv je antisimetričan u odnosu na centralni odbirak sa indeksom $(M-1)/2$. Ako je M paran broj (Tip IV FIR filtra) impulsni odziv je antisimetričan u odnosu na tačku koja leži na sredini između odbiraka sa indeksima $(M-2)/2$ i $M/2$. Slučaj antisimetričnog impulsnog odziva prikazan je na slici 9.2.



Slika 9.2 Impulsni odziv FIR sistema koji obezbeđuje konstantno grupno kašnjenje: (a) M neparno, (b) M parno.

9.1.2 OSOBINE AMPLITUDSKE KARAKTERISTIKE FIR SISTEMA SA LINEARNOM FAZOM

Zbog simetričnosti ili antisimetričnosti impulsnog odziva FIR sistema sa linearnom fazom, frekvencijski odziv takvih sistema se može napisati na posebno jednostavan način. Posmatrajmo FIR funkciju tipa I (impulsni odziv simetričan, M neparan broj). Iz (9.2) sledi:

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h[n]e^{-jn\Omega} + h[(M-1)/2]e^{-j\Omega(M-1)/2} + \sum_{n=(M+1)/2}^{M-1} h[n]e^{-jn\Omega} \quad (9.16)$$

gde se, na osnovu (9.10) i smenama $M-1-n = m$ i $m = n$, druga suma može transformisati u oblik:

$$\sum_{n=(M+1)/2}^{M-1} h[n]e^{-jn\Omega} = \sum_{n=(M+1)/2}^{M-1} h[M-1-n]e^{-jn\Omega} = \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h[n]e^{-j\Omega(M-1-n)} \quad (9.17)$$

čime se (9.16) svodi na:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\Omega(M-1)/2} \left\{ h[(M-1)/2] + \sum_{n=0}^{(M-3)/2} 2h[n] \cos \Omega \left(\frac{M-1}{2} - n \right) \right\} \quad (9.18)$$

Smenom $(M-1)/2 - n = k$ iz (9.18) se dobija:

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega(M-1)/2} \sum_{k=0}^{(M-1)/2} a_k \cos \Omega k \quad (9.19)$$

gde je:

$$a_0 = h[(M-1)/2] \quad (9.20)$$

$$a_k = 2h[(M-1)/2 - k] \quad (9.21)$$

Na sličan način se, za FIR filter tipa II (impulsni odziv simetričan, M paran broj), iz (9.2) i (9.10) dobija:

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega(M-1)/2} \sum_{k=1}^{M/2} b_k \cos \Omega \left(k - \frac{1}{2} \right) \quad (9.22)$$

gde je:

$$b_k = 2h[M/2 - k] \quad (9.23)$$

U slučaju FIR filtra tipa III (impulsni odziv antisimetričan, M neparan broj), ima se:

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j[\Omega(M-1)/2 - \pi/2]} \sum_{k=1}^{(M-1)/2} a_k \sin \Omega k = je^{-j\Omega(M-1)/2} \sum_{k=1}^{(M-1)/2} a_k \sin \Omega k \quad (9.24)$$

a za FIR filter tipa IV (impulsni odziv antisimetričan, M paran broj):

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j[\Omega(M-1)/2 - \pi/2]} \sum_{k=1}^{M/2} b_k \sin \Omega \left(k - \frac{1}{2} \right) = je^{-j\Omega(M-1)/2} \sum_{k=1}^{M/2} b_k \sin \Omega \left(k - \frac{1}{2} \right) \quad (9.25)$$

gde su a_k i b_k dati izrazima (9.21) i (9.23).

Vidi se da se u sva četiri slučaja frekvencijska karakteristika može napisati u obliku:

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega(M-1)/2} e^{jK\pi/2} H_r(\Omega) \quad (9.26)$$

gde je $K = 0$ za FIR filtre tipa I i II, dok je $K = 1$ za FIR filtre tipa III i IV, i gde je $H_r(\Omega)$ realna funkcija učestanosti koja se, posle korišćenja nekih trigonometrijskih identiteta, može napisati u obliku:

$$H_r(\Omega) = Q(\Omega)P(\Omega) \quad (9.27)$$

gde je:

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^L \alpha_k \cos \Omega k \quad (9.28)$$

Kao što se vidi, FIR filter tipa I već ima frekvencijski odziv u obliku (9.28), pa je $Q(\Omega) = 1$. Za filter tipa II, iz (9.22) se posle manjih matematičkih manipulacija dobija:

$$H_r(\Omega) = \cos \frac{\Omega}{2} \sum_{k=0}^{M/2-1} \alpha_k \cos \Omega k = Q(\Omega)P(\Omega) \quad (9.29)$$

gde je:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0.5b_1 \\ \alpha_k &= 2b_k - \alpha_{k-1} \quad k = 1, \dots, M/2 - 2 \\ \alpha_{M/2-1} &= 2b_{M/2} \end{aligned} \quad (9.30)$$

Za filter tipa III se dobija:

$$H_r(\Omega) = \sin \Omega \sum_{k=0}^{(M-3)/2} \alpha_k \cos \Omega k = Q(\Omega)P(\Omega) \quad (9.31)$$

gde je:

$$\begin{aligned} \alpha_{(M-3)/2} &= a_{(M-1)/2} \\ \alpha_{(M-5)/2} &= 2a_{(M-3)/2} \\ &\vdots \\ \alpha_{k-1} - \alpha_{k+1} &= 2a_k \quad k = 2, \dots, (M-5)/2 \\ \alpha_0 + 0.5\alpha_2 &= a_1 \end{aligned} \quad (9.32)$$

Za filter tipa IV se dobija:

$$H_r(\Omega) = \sin \frac{\Omega}{2} \sum_{k=0}^{M/2-1} \alpha_k \cos \Omega k = Q(\Omega)P(\Omega) \quad (9.33)$$

gde je:

$$\begin{aligned} \alpha_{M/2-1} &= 2b_{M/2} \\ \alpha_{k-1} - \alpha_k &= 2b_k \quad k = 2, \dots, M/2 - 1 \\ \alpha_0 - 0.5\alpha_1 &= b_1 \end{aligned} \quad (9.34)$$

Karakteristični parametri koji definišu polinome $P(\Omega)$ i $Q(\Omega)$ prikazani su u Tabeli 9.1.

Tabela 9.1 Karakteristični parametri polinoma $P(\Omega)$ i $Q(\Omega)$

Tip FIR filtra	$Q(\Omega)$	α_k	L
Tip I	1	a_k	$(M-1)/2$
Tip II	$\cos \frac{\Omega}{2}$	(9.30)	$M/2-1$
Tip III	$\sin \Omega$	(9.32)	$(M-3)/2$
Tip IV	$\sin \frac{\Omega}{2}$	(9.34)	$M/2-1$

9.1.3 RASPORED NULA U Z-RAVNI FIR SISTEMA SA LINEARNOM FAZOM

Zbog simetrije ili antisimetrije impulsnog odziva, nule FIR funkcije prenosa zadovoljavaju, osim konjugovane kompleksnosti, i neke dodatne uslove. Na primer, ako je M neparan broj, iz (9.1) se primenom (9.10) ili (9.15) dobija:

$$H(z) = z^{-(M-1)/2} \left\{ \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h[n] \left(z^{(M-1)/2-n} \pm z^{-[(M-1)/2-n]} \right) + \frac{1}{2} h[(M-1)/2] (z^0 \pm z^0) \right\} \quad (9.35)$$

gde znak $+$ odgovara simetričnom a znak $-$ antisimetričnom impulsnom odzivu. Smenom $(M-1)/2-n=k$, jednačina (9.35) se može dovesti na jednostavniji oblik:

$$H(z) = z^{-(M-1)/2} \sum_{k=0}^{(M-1)/2} \frac{1}{2} a_k (z^k \pm z^{-k}) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (9.36)$$

gde su a_0 i a_k dati formulama (9.20) i (9.21).

Kako u slučaju simetričnog ili antisimetričnog impulsnog odziva važi:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] z^{-n} = \pm \sum_{n=0}^{M-1} h[M-1-n] z^{-n} = \pm \sum_{k=M-1}^0 h[k] z^k z^{-(M-1)} = \pm z^{-(M-1)} H(z^{-1}) \quad (9.37)$$

ako je z_i nula funkcije prenosa FIR filtra sa linearnom fazom $H(z)$, onda i z_i^{-1} takođe mora biti nula funkcije prenosa $H(z)$. S obzirom da nule funkcije prenosa takođe moraju biti i konjugovano kompleksne, nule funkcije prenosa FIR filtra moraju imati sledeće osobine:

1. Kompleksne nule funkcije prenosa koje ne leže na jediničnom krugu javljaju se u *kvadrupletima* (grupama po četiri konjugovano kompleksne i recipročne nule) na lokacijama: z_i, z_i^*, z_i^{-1} i $(z_i^*)^{-1}$,

2. Realne nule funkcije prenosa koje ne leže na jediničnom krugu javljaju se u recipročnim parovima: z_i, z_i^{-1} ,

3. Proizvoljan broj konjugovano kompleksnih parova nula može ležati na jediničnom krugu pošto je:

$$(z - z_i)(z - z_i^*) = (z - e^{j\phi_i})(z - e^{-j\phi_i}) = \left(z - \frac{1}{z_i^*} \right) \left(z - \frac{1}{z_i} \right) \quad (9.38)$$

4. Proizvoljan broj nula može ležati u tačkama $z_i = \pm 1$, jer je tada takođe $z_i^{-1} = \pm 1$.

Slučaj nule u tački $z = -1$ je posebno važan. Iz jednačine (9.37) sledi:

$$H(-1) = \pm(-1)^{-(M-1)} H(-1) \quad (9.38)$$

Neka je impulsni odziv simetričan. Ako je M neparan broj (Tip I), (9.38) je identitet. Međutim, ako je M paran broj (Tip II), dobija se $H(-1) = -H(-1)$ iz čega sledi da je $H(-1) = 0$. Dakle, *tip II FIR filtara sa linearnom fazom mora imati nulu u tački $z = -1$* . Ako je impulsni odziv antisimetričan važi obrnuti zaključak, tj. da *tip III filtra (M neparno) mora imati nulu u tački $z = -1$* .

Druga interesantna tačka je $z = 1$. Tada se (9.37) svodi na:

$$H(1) = \pm H(1) \quad (9.39)$$

U simetričnom slučaju to je identitet, ali u antisimetričnom slučaju (9.39) može biti zadovoljeno samo ako je $H(1) = 0$. Dakle, *tip III i tip IV FIR filtra moraju imati nule u tački $z = 1$* .

Polinom $N(z)$ čije nule zadovoljavaju uslove 1-4 naziva se *polinom sa ogledalskom simetrijom*.

9.2 SINTEZA FIR SISTEMA POMOĆU PROZORSKIH FUNKCIJA

Pošto su, kao što se vidi iz prethodnog izlaganja, od interesa uglavnom FIR filtri sa linearnom fazom, u većini metoda sinteze se unapred pretpostavlja da je faza linearna i vodi se računa samo o aproksimaciji amplitudske karakteristike. Linearnost faze obezbeđuje se simetričnošću ili antisimetričnošću impulsnog odziva. Neka je dat željeni oblik amplitudske karakteristike $H_D(e^{j\Omega})$. S obzirom da je amplitudska karakteristika diskretnog sistema kontinualna periodična funkcija učestanosti ω , $H_D(e^{j\Omega})$ se može razviti u Furijeov red:

$$H_D(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_D[n] e^{-jn\Omega} \quad (9.40)$$

gde su Furijeovi koeficijenti, odnosno koeficijenti impulsnog odziva, prema (2.8) dati izrazom:

$$h_D[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega \quad (9.41)$$

Smenom $e^{j\Omega} = z$ u (9.40) dobija se funkcija prenosa:

$$H_D(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_D[n] z^{-n} \quad (9.42)$$

Kao što se vidi, dobijena funkcija prenosa (9.42) nije ostvarljiva, jer je beskonačnog reda i nije kauzalna. Da bi se dobila funkcija prenosa konačnog reda potrebno je ograničiti impulsni odziv, dat sa (9.41), odsecanjem koeficijenata čiji je indeks veći od neke odabrane vrednosti. Ako impulsni odziv treba da ima M odbiraka, gde je M neparan broj, onda se odsecanje može ostvariti na sledeći način:

$$\tilde{h}[n] = \begin{cases} h_D[n], & |n| \leq \frac{M-1}{2} \\ 0, & |n| > \frac{M-1}{2} \end{cases} \quad (9.43)$$

čime se dobija funkcija prenosa $\tilde{H}(z)$ koja još uvek nije kauzalna. Da bi se dobila kauzalna funkcija prenosa, potrebno je pomeriti impulsni odziv za $(M-1)/2$ odbiraka udesno, što se u z domenu svodi na množenje sa $z^{-(M-1)/2}$. Dakle,

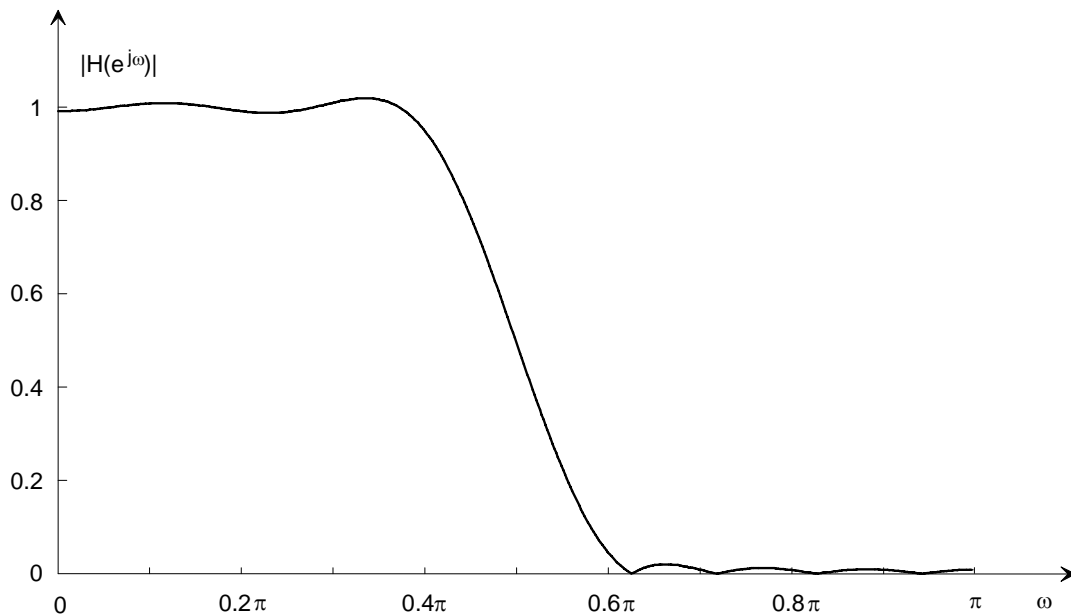
$$h[n] = \tilde{h}\left[n - \frac{M-1}{2}\right] = \begin{cases} h_D\left[n - \frac{M-1}{2}\right], & n = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0, & n < 0, n \geq M \end{cases} \quad (9.44)$$

$$H(z) = z^{-(M-1)/2} \tilde{H}(z) = z^{-(M-1)/2} \left\{ h\left[\frac{(M-1)}{2}\right] + \sum_{n=0}^{(M-3)/2} h[n] \left[z^{[(M-1)/2-n]} + z^{-[(M-1)/2-n]} \right] \right\} \quad (9.45)$$

Međutim, ako se analizira dobijena frekvencijska karakteristika $H(e^{j\Omega})$ može se videti da ona znatno odstupa od željene frekvencijske karakteristike $H_D(e^{j\Omega})$. Na primer, ako $H_D(e^{j\Omega})$ predstavlja karakteristiku idealnog NF filtra sa linearnom fazom:

$$H_D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-j\Omega\tau}, & \Omega < \Omega_c \\ 0, & \Omega > \Omega_c \end{cases} \quad (9.46)$$

onda su odstupanja, koja imaju oscilatorni karakter, naročito velika u delovima propusnog i nepropusnog opsega u neposrednoj blizini granične učestanosti Ω_c . Nepoželjne oscilacije amplitudske karakteristike, koje su prikazane na slici 9.3, nazivaju se *Gibsove oscilacije* (Gibbs).



Slika 9.3 Amplitudska karakteristika FIR filtra sintetizovanog pravougaonom prozorskom funkcijom za $M = 15$.

Ispitivanjem frekvencijske karakteristike $H(e^{j\Omega})$ može se odrediti maksimalna vrednost premašenja amplitude koja iznosi oko 9% (0.75 dB) i skoro je nezavisna od izabrane vrednosti M , što znači da se kvalitet aproksimacije vrlo malo poboljšava sa porastom reda aproksimacione funkcije. Realizovano slabljenje u nepropusnom opsegu je relativno malo, i u najgorem slučaju iznosi svega 21 dB. Pojava Gibsovih oscilacija je posledica spore konvergencije Furijeovog reda, koja je izazvana diskontinuitetom pri prelazu sa propusnog na nepropusni opseg. Kako je taj diskontinuitet uobičajena pojava kod svih selektivnih filtarskih funkcija, prosto prekidanje impulsnog odziva nije dobro rešenje.

Najefikasniji način za suzbijanje Gibsovih oscilacija je primena *prozorskih funkcija* za skraćivanje Furijeovog reda (9.40). Neka simetrična sekvenca konačne dužine M , $w(n)$, $n=0,1,\dots,M-1$, čija je z -transformacija $W(z)$, predstavlja prozorsku funkciju. Ako se impulsni odziv dobijen relacijom (9.44) modifikuje korišćenjem prozorske funkcije:

$$h_w[n] = \begin{cases} w[n]h_D\left[n - \frac{M-1}{2}\right], & n = 0,1,\dots,M-1 \\ 0, & n < 0, n \geq M \end{cases} \quad (9.47)$$

onda se funkcija prenosa dobija korišćenjem relacije o z -transformaciji proizvoda dve sekvence (6.20) kao:

$$H_w(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} H_D(u)W\left(\frac{z}{u}\right)u^{-1}du \quad (9.48)$$

Smenama $z = e^{j\Omega}$ i $u = e^{j\upsilon}$ iz (9.48) se dobija:

$$H_w(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{j\upsilon})W[e^{j(\Omega-\upsilon)}]d\upsilon \quad (9.49)$$

U slučaju prostog prekidanja impulsnog odziva $h_D[n]$, kada se pojavljuju Gibsove oscilacije prozorska funkcija ima oblik:

$$w_R[n] = \begin{cases} 1, & n = 0,1,\dots,M-1 \\ 0, & n < 0, n \geq M \end{cases} \quad (9.50)$$

i naziva se *pravougaona prozorska funkcija*. Spektar pravougaone prozorske funkcije dat je izrazom (4.48):

$$W_R(e^{j\Omega}) = \frac{\sin(\Omega M/2)}{\sin(\Omega/2)} e^{-j\Omega(M-1)/2} \quad (9.51)$$

i prikazan je na slici 4.6b.

Sada se objašnjenju pojave Gibsovih oscilacija može pristupiti i na drugi način. Razlog za pojavu Gibsovih oscilacija je konvolucija u frekvencijskom domenu (9.49) između željene frekvencijske karakteristike i frekvencijske karakteristike pravougaone prozorske funkcije koja izaziva odstupanja od željene karakteristike. Odstupanja su posledice dve karakteristike spektra prozorske funkcije. Širina glavnog luka u spektru prozorske funkcije utiče na širinu prelazne zone, dok amplituda bočnih lukova u spektru prozorske funkcije utiče na amplitudu Gibsovih oscilacija. Dakle, dobra prozorska funkcija trebalo bi da ima što uži glavni luk i što veće potiskivanje bočnih lukova, što su kontradiktorni zahtevi.

U odeljku 4.7 razmatrana je primena prozorskih funkcija u spektralnoj analizi signala konačnog trajanja. Praktično, sve prozorske funkcije koje su opisane u odeljku 4.7 mogu biti iskorišćene i u sintezi FIR filtera. Međutim, postoje neke razlike u načinu primene prozorskih funkcija u spektralnoj analizi i sintezi FIR filtera, među kojima su najvažnije:

1. Prozorske funkcije u spektralnoj analizi najčešće imaju paran broj članova (obično 2^p) dok prozorske funkcije u sintezi FIR filtera imaju neparan broj članova. Ova razlika je posledica činjenice da najefikasniji algoritmi za izračunavanje DFT zahtevaju da sekvenca ima paran broj

članova, a u sintezi FIR filtera se izbegava paran broj odbiraka u impulsnom odzivu jer unosi necelobrojno kašnjenje.

2. Širina prelazne zone između propusnog i nepropusnog opsega povezana je nelinearnom relacijom sa širinom glavnog luka u spektru prozorske funkcije.

3. Maksimalna greška amplitudske karakteristike FIR filtra zavisi na nelinearan način od maksimalne amplitude bočnih lukova u spektru prozorske funkcije.

Zbog pojava navedenih pod 2 i 3, teško je unapred proceniti da li će primena izabrane prozorske funkcije dati zadovoljavajući rezultat u sintezi FIR filtra. Da bi se olakšala primena prozorskih funkcija, neke karakteristike prozorskih funkcija koje su od interesa za proces sinteze date su u Tabeli 9.2. Na primer, u kolonama 2 i 3 Tabele 9.2 date su približne vrednosti širine prelazne zone i greške u aproksimaciji idealne amplitudske karakteristike u dB.

Iako je primena prozorskih funkcija uz upotrebu Tabele 9.2 u sintezi FIR filtera olakšana, proces projektovanja koji se sastoji od izbora odgovarajuće prozorske funkcije i izbora odgovarajuće vrednosti M nije dovoljno fleksibilan. Naime, navedene prozorske funkcije nemaju mogućnost za finu kontrolu širine prelazne zone, što je jedan od bitnih faktora koji karakteriše proces sinteze. Takvu kontrolu omogućavaju Kajzerova i Dolf-Čebiševljeva prozorska funkcija koje su opisane u odeljku 4.7.

Tabela 9.2 Karakteristike nekih prozorskih funkcija u sintezi FIR filtera.

Prozor	Širina prelazne zone	Minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu	β za ekvivalentni Kajzerov prozor	Širina prelazne zone sa ekvivalentnim prozorom
Pravougaoni	$1.8\pi/M$	-21	0	$1.81\pi/(M-1)$
Hanov	$6.2\pi/(M-1)$	-44	3.86	$5.01\pi/(M-1)$
Hemingov	$6.6\pi/(M-1)$	-53	4.86	$6.27\pi/(M-1)$
Blekmanov	$11\pi/(M-1)$	-74	7.04	$9.19\pi/(M-1)$

9.2.1 SINTEZA FIR SISTEMA POMOĆU KAJZEROVE PROZORSKE FUNKCIJE

Kajzerova prozorska funkcija našla je najveću primenu u sintezi FIR filtera sa linearnom fazom, zbog toga što je definisana jednostavnim izrazom (4.63) u kome se slobodnim parametrom β može ostvariti kompromis između širine glavnog luka i amplitude bočnih lukova u spektru prozorske funkcije. Time se indirektno može podešavati širina prelazne zone i varijacija amplitude u propusnom i nepropusnom opsegu. Na primer, ako se upotrebi veća vrednost za β dobija se prozorska funkcija sa postepenijim prekidom što za posledicu ima manje amplitude bočnih lukova i veću širinu glavnog luka u spektru. Rezultujući filter ima širu prelaznu zonu, manju varijaciju amplitude u propusnom opsegu i veće slabljenje (manju varijaciju amplitude u nepropusnom opsegu). Interesantno je primetiti da se većina poznatih prozorskih funkcija može aproksimirati pomoću Kajzerove prozorske funkcije izborom pogodne vrednosti za parametar β . U Tabeli 9.2 su navedene vrednosti parametra β koje obezbeđuju istu grešku amplitude kao neke poznate prozorske funkcije, kao i širine prelazne zone filtra koje se takvom aproksimacijom dobijaju.

U projektovanju FIR filtera uobičajeno je da se amplitudska karakteristika zadaje gabaritima kao na slici 8.1a. Pošto je kod Gibsovih oscilacija amplituda greške u propusnom i nepropusnom opsegu ista, i pošto prozorske funkcije samo ublažavaju dejstvo Gibsovih oscilacija, dozvoljena greška u propusnom i nepropusnom opsegu mora biti ista, tj. $\delta_p = \delta_a = \delta$. Ako se u postupku

formiranja specifikacija izaberu različite vrednosti za δ_p i δ_a , u sintezi se mora koristiti manja od dve specificirane vrednosti. Postupak sinteze biće opisan na primeru *sinteze NF filtra*, dok će kasnije biti formulisane izmene koje se u postupku javljaju ako se vrši sinteza nekog drugog tipa funkcije prenosa. Postupak sinteze se sastoji iz sledećih faza [K-2]:

1. Na osnovu zadatih specifikacija $\Omega_p, \Omega_a, \alpha_p$ i α_a određuje se širina prelazne zone:

$$B_t = \Omega_a - \Omega_p \quad (9.52)$$

granična učestanost idealnog NF filtra:

$$\Omega_c = \frac{\Omega_a + \Omega_p}{2} \quad (9.53)$$

i vrednosti za δ_p i δ_a prema izrazima:

$$\delta_p = \frac{10^{0.05\alpha_p} - 1}{10^{0.05\alpha_p} + 1} \quad (9.54)$$

$$\delta_a = 10^{-0.05\alpha_a} \quad (9.55)$$

2. Izabere se vrednost greške δ prema izrazu:

$$\delta = \min(\delta_p, \delta_a) \quad (9.56)$$

Ako je $\delta \neq \delta_a$, izračuna se nova vrednost za α_a prema izrazu:

$$\alpha_a = -20 \log \delta \quad (9.57)$$

3. Izabere se vrednost parametra β prema empirijskom izrazu:

$$\beta = \begin{cases} 0, & \alpha_a < 21 \text{ dB} \\ 0.5842(\alpha_a - 21)^{0.4} + 0.07886(\alpha_a - 21), & 21 \text{ dB} \leq \alpha_a \leq 50 \text{ dB} \\ 0.1102(\alpha_a - 8.7), & \alpha_a > 50 \text{ dB} \end{cases} \quad (9.58)$$

4. Odredi se broj članova impulsnog odziva prozorske funkcije prema izrazu:

$$D = \begin{cases} 0.9222, & \alpha_a \leq 21 \text{ dB} \\ \frac{\alpha_a - 7.95}{14.36}, & \alpha_a > 21 \text{ dB} \end{cases} \quad (9.59)$$

$$M \geq \frac{2\pi D}{B_t} + 1 \quad (9.60)$$

5. Formira se $w_K[n]$, $n = 0, 1, \dots, M - 1$ na osnovu (4.63).

6. Izračunaju se koeficijenti razvoja funkcije prenosa idealnog NF filtra:

$$H_D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \quad (9.61)$$

u Furijeov red na osnovu izraza (9.41), koji se svodi na:

$$h_D[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Omega_c} e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{1}{n\pi} \sin \Omega_c n, \quad |n| \leq \frac{M-1}{2} \quad (9.62)$$

7. Formira se impulsni odziv FIR filtra prema izrazu:

$$h[n] = h_D \left[n - \frac{M-1}{2} \right] w_K[n], \quad n = 0, 1, \dots, M-1 \quad (9.63)$$

i funkcija prenosa:

$$H(z) = z^{-(M-1)/2} \sum_{n=0}^{M-1} h[n] z^{-n} \quad (9.64)$$

Opisani algoritam za sintezu NF FIR filtarskih funkcija može se generalizovati i primeniti na ostale tipove filtarskih funkcija.

U slučaju kada treba projektovati *VF filtarsku funkciju*, menja se izraz (9.52) u:

$$B_t = \Omega_p - \Omega_a \quad (9.65)$$

a definicioni izraz za idealnu funkciju prenosa (9.61) u:

$$H_D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\Omega| < \Omega_c \\ 1, & \Omega_c \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases} \quad (9.66)$$

U slučaju sinteze *FIR filtra propusnika opsega učestanosti*, ima se:

$$B_t = \min[(\Omega_{p1} - \Omega_{a1}), (\Omega_{a2} - \Omega_{p2})] \quad (9.67)$$

$$H_D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\Omega| < \Omega_{c1} \\ 1, & \Omega_{c1} \leq |\Omega| < \Omega_{c2} \\ 0, & \Omega_{c2} \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases} \quad (9.68)$$

gde su granične učestanosti idealnog filtra:

$$\Omega_{c1} = \Omega_{p1} - \frac{B_t}{2}, \quad \Omega_{c2} = \Omega_{p2} + \frac{B_t}{2} \quad (9.69)$$

U slučaju sinteze *FIR filtra nepropusnika opsega učestanosti*, ima se:

$$B_t = \min[(\Omega_{a1} - \Omega_{p1}), (\Omega_{p2} - \Omega_{a2})] \quad (9.70)$$

$$\Omega_{c1} = \Omega_{p1} + \frac{B_t}{2}, \quad \Omega_{c2} = \Omega_{p2} - \frac{B_t}{2} \quad (9.71)$$

$$H_D(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\Omega| < \Omega_{c1} \\ 0, & \Omega_{c1} \leq |\Omega| < \Omega_{c2} \\ 1, & \Omega_{c2} \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases} \quad (9.72)$$

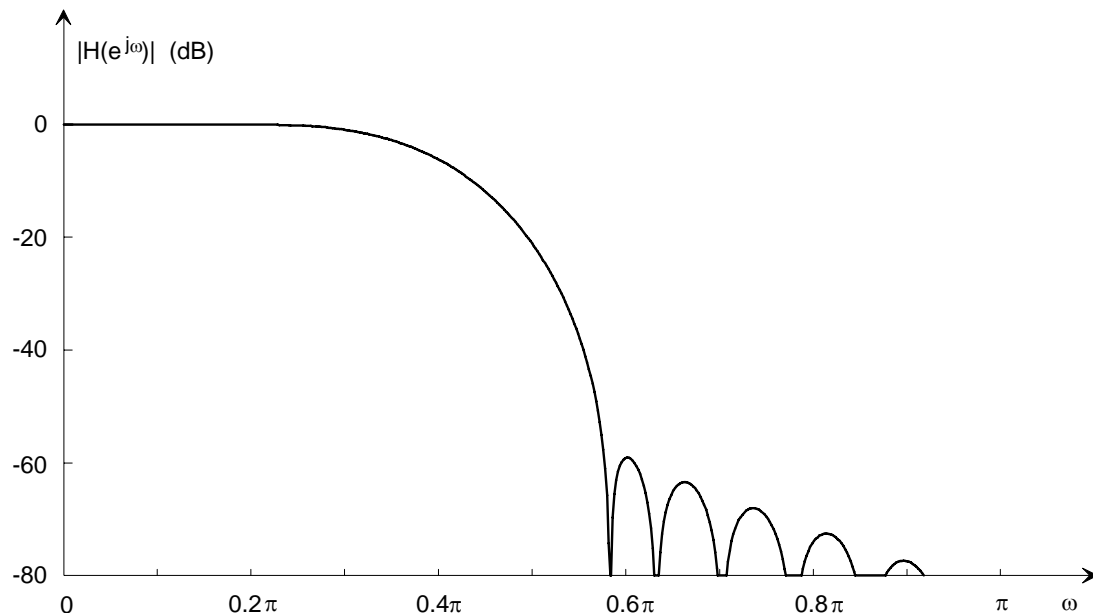
Kao ilustraciju sinteze FIR filtra primenom Kajzerove prozorske funkcije posmatrajmo sintezu NF filtra, koji treba da zadovolji sledeće specifikacije:

- granična učestanost propusnog opsega $\omega_p = 0.3\pi$ ($f_p = 0.15$),

- granična učestanost nepropusnog opsega $\omega_a = 0.5\pi$ ($f_a = 0.25$),
- maksimalno odstupanje amplitude u propusnom opsegu $\delta_p = 0.01$ ($\alpha_p = 0.174$ dB),
- maksimalno odstupanje amplitude u nepropusnom opsegu $\delta_a = 0.01$ ($\alpha_a = 40$ dB).

Iz izraza (9.58) dobija se da je optimalna vrednost parametra, $\beta = 3.395$. Procena reda na osnovu (9.60) daje $M = 23$. Međutim, ispitivanjem rezultata sinteze može se utvrditi da za ovu vrednost M maksimum amplitude u nepropusnom opsegu prevazilazi vrednost dozvoljenu specifikacijama. Eksperimentalno se može ustanoviti da su postavljene specifikacije zadovoljene sa $M = 25$. Amplitudska karakteristika sintetizovanog filtra je prikazana na slici 9.4.

Sa slike 9.4, kao i iz numeričkih podataka, može se ustanoviti da su ekstremne vrednosti varijacije amplitude u propusnom opsegu $\delta_p = 0.0079$ i u nepropusnom opsegu $\delta_a = 0.0094$. Međutim, granice propusnog i nepropusnog opsega nisu tačno realizovane. Naročito je velika greška granice nepropusnog opsega, jer se na učestanosti $\omega_a = 0.5\pi$ dobija slabljenje od svega 22 dB, što je suviše mala vrednost. Manja širina prelazne zone, tj. niža vrednost realizovane granice nepropusnog opsega može se dobiti samo značajnijim povećanjem reda funkcije prenosa FIR filtra.



Slika 9.4 Amplitudska karakteristika NF FIR filtra sintetizovanog pomoću Kajzerove prozorske funkcije za $M=25$.

9.2.2 ZAKLJUČNA RAZMATRANJA O PRIMENI PROZORSKIH FUNKCIJA

Najvažnija karakteristika metoda sinteze FIR filtarskih funkcija korišćenjem prozorskih funkcija za ograničavanje impulsnog odziva je jednostavnost i postojanje eksplicitnih izraza za odbirke skoro svih prozorskih funkcija (izuzimajući Dolf-Čebiševljevu prozorsku funkciju). Međutim, u primeni opisanog metoda može doći i do ozbiljnih problema. Na primer, ako idealna frekvencijska karakteristika koju treba aproksimirati nije data jednostavnim izrazima, kao što su (9.61), (9.66), (9.68) i (9.72), može se desiti da ne postoji eksplicitno rešenje za vrednost određenog integrala (9.41). U takvom slučaju mora se pristupiti numeričkom izračunavanju integrala (9.41) za šta se može iskoristiti Diskretna Furijeova transformacija.

Drugi problem koji se pojavljuje kod primene prozorskih funkcija je relativno mala fleksibilnost pri projektovanju. Iako se na početku postupka projektovanja zadaju specifikacije za granične učestanosti Ω_p i Ω_a nema nikakve garancije da će te granice zaista biti i realizovane u postupku sinteze. Naime, zbog konvolucione veze spektara idealne karakteristike i prozorske funkcije, prozorska funkcija u suštini ublažava diskontinualni prelaz iz propusnog u nepropusni opseg kod idealnog filtra. Tako se granična učestanost idealnog filtra, Ω_c , na komplikovan način preslikava u dve granične učestanosti, Ω_p i Ω_a . U mnogim primenama ovaj efekat se može kompenzovati, ali ponekad može predstavljati ozbiljan problem.

Jedan od glavnih nedostataka metoda sinteze pomoću prozorskih funkcija je što rezultujuće funkcije prenosa nisu optimalne ni po kakvom poznatom kriterijumu. To znači, a taj zaključak je potvrđen i u praksi, da se uvek može sintetizovati filter sa boljim performansama. Ovaj zaključak važi čak i u slučaju da se koriste optimalne prozorske funkcije, kao što su Kajzerova ili Dolf-Čebiševljeva, jer je dejstvo prozorske funkcije na rezultujuće rešenje posredno, preko konvolucione relacije. Zbog toga se često, a naročito ako je na raspolaganju računar, koriste alternativne metode za projektovanje FIR filterarskih funkcija.

9.3 SINTEZA FIR SISTEMA METODOM ODABIRANJA U FREKVENCIJSKOM DOMENU

Iz prethodnih razmatranja se vidi da metod prozorskih funkcija nije pogodan za primenu u slučajevima kada su specifikacije za frekvencijsku karakteristiku FIR sistema takve da integral (9.41) nije lako izračunati. U takvim slučajevima pogodan metod sinteze predstavlja metod odabiranja u frekvencijskom domenu, koji, osim toga, često omogućava i vrlo efikasnu realizaciju FIR sistema.

Neka je željeni frekvencijski odziv specificiran za određeni broj diskretnih učestanosti ω_k . Mada, u principu, učestanosti na kojima se specificira frekvencijski odziv mogu biti proizvoljno raspoređene, najčešće se koristi ekvidistantni raspored.

$$\Omega_k = \frac{2\pi}{M}(k + \alpha), \quad \alpha = 0 \text{ ili } 1/2, \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (9.73)$$

Kako je po definiciji Furijeove transformacije:

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]e^{-j\Omega n} \quad (9.74)$$

iz (9.73) i (9.74) sledi:

$$H(e^{j\Omega_k}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]e^{-j2\pi(k+\alpha)n/M} = H\left(\frac{2\pi}{M}(k + \alpha)\right) = H[k + \alpha], \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (9.75)$$

Inverzijom izraza (9.75), dobija se traženi impulsni odziv $h[n]$ u funkciji specificiranih odbiraka frekvencijskog odziva $H[k + \alpha]$ kao:

$$h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H[k + \alpha]e^{j2\pi(k+\alpha)n/M}, \quad n = 0, 1, \dots, M-1 \quad (9.76)$$

Međutim, ako se iskoristi simetrija ili antisimetrija impulsnog odziva, izračunavanje se može uprostiti. Posmatrajmo prvo slučaj sinteze FIR filtra sa simetričnim impulsnim odzivom. U tom slučaju je pogodno frekvencijski odziv specificirati na skupu učestanosti Ω_k , gde je:

$$\Omega_k = \frac{2\pi}{M}(k + \alpha), \quad \alpha = 0 \text{ ili } 1/2, \quad k = 0, 1, \dots, U \quad (9.77)$$

gde je:

$$U = \begin{cases} \frac{M-1}{2}, & M \text{ neparno} \\ \frac{M}{2} - 1, & M \text{ parno} \end{cases} \quad (9.78)$$

Kako prema jednačini (9.26) za FIR filtre sa simetričnim impulsnim odzivom važi:

$$H(e^{j\Omega_k}) = H_r\left(\frac{2\pi(k + \alpha)}{M}\right) e^{-j\pi(k + \alpha)(M-1)/M} = G[k + \alpha] e^{-j\pi\alpha} e^{j\pi(k + \alpha)/M} \quad (9.79)$$

gde je:

$$G[k + \alpha] = (-1)^k H_r\left(\frac{2\pi(k + \alpha)}{M}\right) \quad (9.80)$$

Pošto je impulsni odziv $h[n]$ realan, u frekvencijskom domenu važi uslov simetrije:

$$H[k + \alpha] = H^*[M - k - \alpha] \quad (9.81)$$

koji se zbog realnosti funkcije $H_r(\omega)$ svodi na:

$$G[k + \alpha] = \mp G[M - k - \alpha] \quad (9.82)$$

gde znak $-$ odgovara slučaju $\alpha = 0$, dok znak $+$ odgovara slučaju $\alpha = 1/2$. Ako je M paran broj i $\alpha = 0$, iz (9.82) se dobija:

$$G[M/2] = H_r(\pi) = 0 \quad (9.83)$$

Polazeći od (9.76) i koristeći relacije (9.79), (9.80) i (9.82) za traženi impulsni odziv FIR sistema se dobija u slučaju $\alpha = 0$:

$$h[n] = \frac{1}{M} \left\{ G[0] + 2 \sum_{k=1}^U G[k] \cos \frac{2\pi k}{M} \left(n + \frac{1}{2}\right) \right\} \quad (9.84)$$

dok se u slučaju $\alpha = 1/2$ dobija:

$$h[n] = \frac{2}{M} \sum_{k=0}^U G\left[k + \frac{1}{2}\right] \sin \frac{2\pi}{M} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (9.85)$$

U slučaju sinteze FIR filtra sa antisimetričnim impulsnim odzivom, frekvencijski odziv se specificira na skupu učestanosti Ω_k , koji je takođe dat sa (9.77), ali je $G[0]$ identički jednako nuli. Vrednost gornje granice indeksa u sumi zavisi ne samo od parnosti broja odbiraka M već i od vrednosti α .

$$H(e^{j\Omega_k}) = H_r\left(\frac{2\pi(k + \alpha)}{M}\right) e^{j\pi/2} e^{-j\pi(k + \alpha)(M-1)/M} = G[k + \alpha] e^{-j\pi(1/2 - \alpha)} e^{j\pi(k + \alpha)/M} \quad (9.86)$$

gde je $G[k + \alpha]$ dato izrazom (9.80). Uslov simetrije frekvencijskog odziva (9.81) i dalje važi jer je impulsni odziv $h[n]$ realan, dok se uslov simetrije za $G[k + \alpha]$ svodi na:

$$G[k + \alpha] = \pm G[M - k - \alpha] \quad (9.87)$$

gde znak + odgovara slučaju $\alpha = 0$, dok znak – odgovara slučaju $\alpha = 1/2$. Ako je M neparan broj i $\alpha = 1/2$, iz (9.87) se dobija:

$$G[M/2] = -G[M/2] = H_r(\pi) = 0 \quad (9.88)$$

Izrazi za $h[n]$ se lako dobijaju zamenom (9.86) u (9.76) odakle sledi za $\alpha = 0$:

$$h[n] = \begin{cases} -\frac{2}{M} \sum_{k=1}^{(M-1)/2} G[k] \sin \frac{2\pi k}{M} (n + \frac{1}{2}), & M \text{ neparno} \\ \frac{1}{M} \left[(-1)^{n+1} G[M/2] - 2 \sum_{k=1}^{(M/2)-1} G[k] \sin \frac{2\pi k}{M} (n + \frac{1}{2}) \right], & M \text{ parno} \end{cases} \quad (9.89)$$

odnosno, za $\alpha = 1/2$:

$$h[n] = \frac{2}{M} \sum_{k=0}^V G[k + \frac{1}{2}] \cos \frac{2\pi}{M} (k + \frac{1}{2})(n + \frac{1}{2}) \quad (9.90)$$

gde je:

$$V = \begin{cases} \frac{M-3}{2}, & M \text{ neparno} \\ \frac{M}{2} - 1, & M \text{ parno} \end{cases} \quad (9.91)$$

Postupak projektovanja se sada svodi na zadavanje vrednosti frekvencijskog odziva $H_r[k + \alpha]$ na skupu učestanosti ω_k . U propusnom opsegu je $H_r[k + \alpha] = 1$, dok je u nepropusnom opsegu $H_r[k + \alpha] = 0$. Zatim se odredi $G[k + \alpha]$ prema (9.80), i na kraju impulsni odziv $h[n]$ korišćenjem jednog od izraza (9.84), (9.85), (9.89) i (9.90). Za izbor vrednosti M i α nema nikakvih preporuka, treba probati i videti rezultat.

Nažalost, rezultati dobijeni opisanim postupkom su sličnog kvaliteta kao rezultati dobijeni korišćenjem pravougaone prozorske funkcije. Slabljenje u nepropusnom opsegu je nedopustivo malo, često ispod 20 dB. Razlog za ovako malo slabljenje je u suviše maloj širini prelazne zone $\Delta\Omega = 2\pi/M$. Da bi se situacija popravila, može se proširiti prelazna zona dodelom vrednosti $0 < H_r[k + \alpha] < 1$ jednom odbirku u prelaznoj zoni. Na primer, ako se uzme da odbirak u prelaznoj zoni ima vrednost 0.5, slabljenje u nepropusnom opsegu se popravija i iznosi oko 30 dB. Podešavanjem vrednosti odbirka frekvencijskog odziva u prelaznoj zoni dobija se još bolje slabljenje u nepropusnom opsegu od 44 do 54 dB. Ako se uzme više odbiraka u prelaznoj zoni, dobijaju se još bolji rezultati, ali nalaženje optimalnih vrednosti takvih odbiraka postaje ozbiljan problem, koji zahteva primenu nekog programa za optimizaciju ili linearnog programiranja. Sa dva odbirka u prelaznoj zoni dobija se slabljenje u nepropusnom opsegu od 65 do 75 dB, a sa tri, od 85 do 95 dB. U praksi se koriste najviše četiri odbirka u prelaznoj zoni. Da bi se olakšala primena metoda frekvencijskog odabiranja, u literaturi su publikovane tabele koje olakšavaju izbor slobodnih parametara u funkciji broja odbiraka M , zahtevanog slabljenja u nepropusnom opsegu i širine prelazne zone.

Najvažnija prednost metoda frekvencijskog odabiranja nad drugim alternativnim metodama sinteze leži u *jednostavnosti realizacije*. Naime, prema analizi u odeljku 7.2.3, metod frekvencijskog odabiranja vodi do realizacije koja je, za slučaj $\alpha = 0$, opisana jednačinom (7.11) i prikazana na slici 7.5. U slučajevima kada je propusni opseg uzak, veliki broj odbiraka u frekvencijskom domenu biće jednak nuli, što znači da će odgovarajuće rezonatorske grane na slici 7.5 nedostajati. Tada metod frekvencijskog odabiranja vodi do realizacije sa minimalnim brojem množača, daleko manjim nego u bilo kojoj drugoj strukturi.

9.4 OPTIMIZACIONI METODI SINTEZE FIR SISTEMA

Prethodne dve metode sinteze FIR filtarskih funkcija sa linearnom fazom imaju značajne nedostatke. Najveći problem kod obe metode je što se granične učestanosti propusnog i nepropusnog opsega Ω_p i Ω_a ne mogu precizno realizovati. Drugi nedostatak je što se odstupanja amplitudske karakteristike od idealne karakteristike u propusnom i nepropusnom opsegu ne mogu nezavisno specificirati.

Ako se detaljnije analizira ponašanje amplitudske karakteristike, lako se može uočiti da su kod oba prethodno opisana metoda sinteze odstupanja amplitudske karakteristike (greška aproksimacije) najveća u blizini graničnih učestanosti. Iz teorije analognih, kao i diskretnih IIR filtara, poznato je da se znatno bolji rezultati u pogledu aproksimacije amplitudske karakteristike mogu dobiti ako se greška aproksimacije ravnomerno rasporedi unutar propusnog i nepropusnog opsega, što je pokazano na primerima Čebiševljeve i eliptičke aproksimacije u prethodnoj glavi. Slična ideja se može primeniti i u sintezi FIR filtarskih funkcija, odnosno, problem aproksimacije amplitudske karakteristike FIR filtra se može posmatrati kao *problem aproksimacije u Čebiševljevom smislu*.

9.4.1 FORMULISANJE APROKSIMACIONOG PROBLEMA

Posmatrajmo najjednostavniji slučaj sinteze niskofrekventnog FIR filtra. Gabariti koje amplitudska karakteristika treba da zadovolji u tom slučaju se uobičajeno zadaju prema slici 8.1a, odnosno, za realnu funkciju $H_r(\Omega)$, definisanu izrazom (9.26), važe ograničenja:

$$1 - \delta_p \leq H_r(\Omega) \leq 1 + \delta_p, \quad |\Omega| \leq \Omega_p \quad (9.92)$$

$$-\delta_a \leq H_r(\Omega) \leq \delta_a, \quad |\Omega| \geq \Omega_a \quad (9.93)$$

Kao što je pokazano u odeljku 9.1.2, realna funkcija $H_r(\Omega)$ se može opisati izrazima (9.27) i (9.28) i Tabelom 9.1 za sva četiri tipa FIR funkcija sa linearnom fazom. Sada se Čebiševljev aproksimacioni problem može formulirati na sledeći način. Neka $H_{dr}(\Omega)$ predstavlja idealnu realnu funkciju koju $H_r(\Omega)$ treba da aproksimira. Neka je, takođe,

$$W(\Omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_p \\ \frac{\delta_p}{\delta_a} = K, & \Omega_a < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \quad (9.94)$$

težinska funkcija koja pokazuje relativan uticaj greške u pojedinom opsegu. Onda se *greška aproksimacije sa težinom* može definisati kao:

$$E(\Omega) = W(\Omega)[H_{dr}(\Omega) - H_r(\Omega)] = W(\Omega)[H_{dr}(\Omega) - Q(\Omega)P(\Omega)] \quad (9.95)$$

odnosno,

$$E(\Omega) = W(\Omega)Q(\Omega) \left[\frac{H_{dr}(\Omega)}{Q(\Omega)} - P(\Omega) \right] = \hat{W}(\Omega) \left[\hat{H}_{dr}(\Omega) - P(\Omega) \right] \quad (9.96)$$

Čebiševljev aproksimacioni problem se sastoji u određivanju koeficijenata polinoma $P(\Omega)$ koji minimizuju maksimalnu apsolutnu vrednost $E(\Omega)$ u opsezima učestanosti od interesa. Dakle, treba naći skup koeficijenata α_k , koji zadovoljavaju jednačinu:

$$\min_{\alpha_k, k \in \{0, L\}} \left[\max_{\Omega \in S} |E(\Omega)| \right] = \min_{\alpha_k, k \in \{0, L\}} \left\{ \max_{\Omega \in S} \left| \hat{W}(\Omega) \left[\hat{H}_{dr}(\Omega) - \sum_{k=0}^L \alpha_k \cos \Omega k \right] \right| \right\} \quad (9.97)$$

gde S predstavlja skup (disjunktne unije) opsega učestanosti od interesa. U slučaju filtarskih funkcija, S predstavlja skup učestanosti koje pripadaju propusnom i nepropusnom opsegu.

Do rešenja Čebiševljevog aproksimacionog problema je moguće doći ako se primeni tzv. *teorema alternacije* koja glasi:

Neka S označava zatvoreni skup koji se sastoji od disjunktne unije zatvorenih podskupova ose učestanosti Ω u intervalu $[0, \pi)$. Potreban i dovoljan uslov da polinom:

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^L \alpha_k \cos \Omega k \quad (9.98)$$

predstavlja jedinstvenu, najbolju Čebiševljevu aproksimaciju funkcije $\hat{H}_{dr}(\Omega)$ na skupu S je da funkcija greške $E(\Omega)$ ima bar $L+2$ ekstremuma na skupu učestanosti S . To znači da mora postojati bar $L+2$ učestanosti $\Omega_i, i=1, \dots, L+2$, gde je $E(\Omega_i) = -E(\Omega_{i+1})$ i:

$$|E(\Omega_i)| = \max_{\Omega \in S} |E(\Omega)|, \quad i=1, \dots, L+2 \quad (9.99)$$

Da bi se primenila teorema alternacije u postupku sinteze FIR filtarske funkcije moraju se prvo ispitati neke njene posledice. Pre svega, smenom $x = \cos \Omega$, iz definicione relacije za Čebiševljev polinom (8.16) se dobija:

$$T_N(\cos \Omega) = \cos N\Omega \quad (9.100)$$

tako da se trigonometrijski polinom $P(\Omega)$ definisan izrazom (9.98) može napisati u obliku:

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^L \alpha_k \cos \Omega k = \sum_{k=0}^L \alpha_k T_k(\cos \Omega) = \sum_{k=0}^L \beta_k (\cos \Omega)^k \quad (9.101)$$

koji je pogodniji za dalju manipulaciju. Vrednosti koeficijenata β_k se mogu odrediti na osnovu poznavanja koeficijenata Čebiševljevih polinoma i koeficijenata α_k , odnosno $h[n]$, ali, kao što će biti pokazano, to nije potrebno.

Ako su $W(\Omega)$ i $H_{dr}(\Omega)$ funkcije sačinjene od konstantnih segmenata, onda se iz (9.95) za određivanje položaja ekstremalnih tačaka dobija jednačina:

$$\frac{dE(\Omega)}{d\Omega} = -\frac{dH_r(\Omega)}{d\Omega} = 0 \quad (9.102)$$

U slučaju FIR filtra tipa I $H_r(\Omega)$ je trigonometrijski polinom L -tog reda po $\cos\omega$, pa njegov izvod ima najviše $L-1$ nula. To znači da u otvorenom intervalu $0 < \Omega < \pi$ funkcija $H_r(\Omega)$ ima najviše $L-1$ lokalni ekstremum, koji su ujedno i ekstremumi funkcije greške $E(\Omega)$. Kako je, pored toga, izvod:

$$\frac{dP(\Omega)}{d\Omega} = -\sin\Omega \left[\sum_{k=1}^L \beta_k k (\cos\Omega)^{k-1} \right] \quad (9.103)$$

jednak nuli za $\Omega = 0$ i $\Omega = \pi$, broj ekstremalnih tačaka u kojima je prvi izvod funkcije greške jednak nuli raste na $L+1$. Osim toga funkcija greške mora imati ekstremne vrednosti i na učestanostima Ω_p i Ω_a , inače uslov alternacije ekstremuma ne bi bio zadovoljen. Dakle, *maksimalan broj ekstremalnih tačaka funkcije greške je $L+3$ u slučaju NF i VF filterarskih funkcija. U slučaju PO i NO filterarskih funkcija maksimalan broj ekstremalnih tačaka funkcije greške je $L+5$, jer takve funkcije imaju po dve granične učestanosti propusnog i nepropusnog opsega. Dakle, na osnovu teoreme alternacije i prethodnog zaključka, broj ekstremalnih tačaka je $L+2$ ili $L+3$ kod NF i VF funkcija prenosa i $L+2$ do $L+5$ kod PO i NO funkcija prenosa. Filter čija funkcija prenosa ima maksimalni broj ekstremuma naziva se *filter sa maksimalnim brojem oscilacija* (engl. maximal ripple filter), dok se filter čija funkcija prenosa ima više od $L+2$ ekstremuma naziva se *filter sa ekstra oscilacijama* (engl. extra ripple filter).*

Druga činjenica, koja se može ustanoviti posmatranjem funkcije greške u slučaju optimalne aproksimacije, je da su *apsolutne vrednosti svih ekstremuma jednake*, osim u tačkama $\Omega = 0$ ili $\Omega = \pi$. Dokaz ove osobine je vrlo jednostavan. Ako je vrednost funkcije greške u nekoj ekstremalnoj tački manja od ostalih, onda se pri numeraciji ekstremuma mora izostaviti ne samo ta tačka, već i jedna susedna ekstremalna tačka, jer inače ne bi bio zadovoljen uslov alternacije. Zbog toga se ova klasa filterarskih funkcija naziva *optimalna aproksimacija* ili *aproksimacija sa jednakim odstupanjima* (engl. equiripple).

Slični rezultati se dobijaju i za ostala tri tipa FIR filterarskih funkcija sa linearnom fazom. Detaljan prikaz osobina sva četiri tipa FIR funkcija dat je u literaturi [R-4, R-8].

9.4.2 REŠAVANJE APROKSIMACIONOG PROBLEMA

Teorema alternacije daje potrebne i dovoljne uslove za postojanje optimalne aproksimacije, ali ne daje odgovor na pitanje kako naći takvu aproksimaciju. U literaturi je, stoga, predloženo više načina za nalaženje optimalne aproksimacije. Na primer, u radovima [H-8, H-9, H-10] su opisani aproksimacioni postupci bazirani na rešavanju sistema nelinearnih jednačina u kojima su fiksne vrednosti parametara L , δ_p i δ_a , dok se granice propusnog i nepropusnog opsega Ω_p i Ω_a ne mogu kontrolisati. Drugi metod [M-12, P-12, R-8], koji danas zbog računске efikasnosti uživa veliku popularnost, koristi poznati Remezov algoritam [R-24] za izjednačavanje ekstremuma i precizno kontroliše parametre L , Ω_p , Ω_a i δ_p/δ_a , dok je δ_p (ili δ_a) promenljivi parametar. Ovaj metod je najčešće poznat kao *Parks-MekKlelanov algoritam* (Parks-McClellan) prema autorima prvog publikovanog računarskog programa [M-13, M-14, P-13, R-4] za primenu Remezovog algoritma u projektovanju FIR filtera.

Na učestanostima ekstremuma funkcije greške optimalnog rešenja, Ω_n , važi:

$$E(\Omega_n) = \hat{W}(\Omega_n) [\hat{H}_{dr}(\Omega_n) - P(\Omega_n)] = (-1)^n \delta, \quad n = 0, 1, \dots, L+1 \quad (9.104)$$

gde δ predstavlja maksimalnu vrednost funkcije greške $E(\Omega)$. Ako se težinska funkcija, $W(\Omega)$, izabere prema (9.94), onda je $\delta = \delta_a$. Sistem jednačina (9.104) je sistem linearnih jednačina i može se napisati u preuređenom obliku:

$$P(\Omega_n) + \frac{(-1)^n \delta}{\hat{W}(\Omega_n)} = \hat{H}_{dr}(\Omega_n), \quad n = 0, 1, \dots, L+1 \quad (9.105)$$

ili, korišćenjem (9.101):

$$\sum_{k=0}^L \alpha_k \cos \Omega_k + \frac{(-1)^n \delta}{\hat{W}(\Omega_n)} = \hat{H}_{dr}(\Omega_n), \quad n = 0, 1, \dots, L+1 \quad (9.106)$$

Nepoznate veličine koje treba odrediti iz (9.106) su koeficijenti polinoma $P(\Omega)$, α_k , i δ . U matičnom obliku, sistem jednačina (9.106) izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos \Omega_0 & \cos 2\Omega_0 & \cdots & \cos L\Omega_0 & \frac{1}{\hat{W}(\Omega_0)} \\ 1 & \cos \Omega_1 & \cos 2\Omega_1 & \cdots & \cos L\Omega_1 & \frac{-1}{\hat{W}(\Omega_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \Omega_{L+1} & \cos 2\Omega_{L+1} & \cdots & \cos L\Omega_{L+1} & \frac{(-1)^{L+1}}{\hat{W}(\Omega_{L+1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_L \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{dr}(\Omega_0) \\ \hat{H}_{dr}(\Omega_1) \\ \vdots \\ \hat{H}_{dr}(\Omega_L) \\ \hat{H}_{dr}(\Omega_{L+1}) \end{bmatrix} \quad (9.107)$$

U prethodnom razmatranju pretpostavljeno je da su vrednosti ekstremalnih učestanosti Ω_n poznate. Međutim, te vrednosti su takođe nepoznate, tako da u sistemu (9.107) ima ukupno $2(L+2)$ nepoznatih veličina, i to: $L+2$ nepoznatih učestanosti Ω_n , $L+1$ nepoznatih koeficijenata α_k , i vrednost maksimalne greške δ . *Remezov algoritam zamene* iterativno rešava problem određivanja $2(L+2)$ nepoznatih parametara. U osnovnoj verziji algoritma se polazi od pretpostavljenog skupa ekstremalnih učestanosti, rešavanjem sistema (9.107) određuju se koeficijenti polinoma $P(\Omega)$ i δ , a zatim se izračuna funkcija greške i tačan položaj novih $L+2$ ekstremalnih učestanosti. Postupak se ponavlja dok se ne dobije optimalni skup ekstremalnih učestanosti.

Malim izmenama osnovne verzije algoritma, njegova efikasnost se može dosta poboljšati. Na primer, iz sistema jednačina (9.107) nepoznata δ se može eksplicitno izračunati kao:

$$\delta = \frac{g_0 \hat{H}_{dr}(\Omega_0) + g_1 \hat{H}_{dr}(\Omega_1) + \cdots + g_{L+1} \hat{H}_{dr}(\Omega_{L+1})}{\frac{g_0}{\hat{W}(\Omega_0)} - \frac{g_1}{\hat{W}(\Omega_1)} + \cdots + \frac{(-1)^{L+1} g_{L+1}}{\hat{W}(\Omega_{L+1})}} = \frac{\sum_{k=0}^{L+1} g_k \hat{H}_{dr}(\Omega_k)}{\sum_{k=0}^{L+1} \frac{(-1)^k g_k}{\hat{W}(\Omega_k)}} \quad (9.108)$$

gde je:

$$g_k = \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{L+1} \frac{1}{\cos \Omega_k - \cos \Omega_n} \quad (9.109)$$

odnosno, posle smene $\cos \Omega_i = x_i$:

$$g_k = \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{L+1} \frac{1}{x_k - x_n} \quad (9.110)$$

Kako je prema (9.101):

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^L \beta_k (\cos \Omega)^k = \sum_{k=0}^L \beta_k x^k = P(x) \quad (9.111)$$

a vrednost polinoma $P(x)$ u tačkama $x_i = \cos \Omega_i$, $i = 0, 1, \dots, L+1$ prema (9.105) iznosi:

$$P(\Omega_i) = \hat{H}_{dr}(\Omega_i) - \frac{(-1)^i \delta}{\hat{W}(\Omega_i)}, \quad i = 0, 1, \dots, L+1 \quad (9.112)$$

može se primeniti neka od interpolacionih formula za određivanje polinoma $P(x)$. Ako se primeni Lagranžova interpolaciona formula za $P(x)$ se dobija:

$$P(x) = \frac{\sum_{k=0}^L P(\omega_k) \frac{b_k}{x - x_k}}{\sum_{k=0}^L \frac{b_k}{x - x_k}}, \quad x = \cos \Omega \quad (9.113)$$

gde je:

$$b_k = \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^L \frac{1}{x_k - x_n} = \frac{g_k}{x_k - x_{L+1}} \quad (9.114)$$

Dakle, modifikovani algoritam se sada sastoji iz sledećih koraka:

1. Pretpostavi se početni skup ekstremalnih učestanosti Ω_n , $n = 0, 1, \dots, L+1$,
2. Na osnovu poznatog položaja ekstremalnih učestanosti odredi se vrednost δ na osnovu (9.108), a zatim na osnovu (9.113) koeficijenti polinoma $P(x)$, odnosno $P(\cos \Omega)$.
3. Na osnovu poznatih koeficijenata polinoma $P(x)$, izračuna se vrednost funkcije greške (9.96) za veći broj diskretnih učestanosti. Uobičajeno je da se greška izračunava u $8(M+2)$ tačaka, gde je M dužina impulsnog odziva. Ako je $E(\Omega_i) \geq \delta$ na nekim učestanostima, onda se izabere novi skup od $L+2$ ekstremalnih učestanosti koje predstavljaju položaje ekstremuma funkcije greške $E(\Omega)$ koji moraju biti u alternirajućem rasporedu. Zatim se ponavlja faza 2.
4. Postupak se završava kada postane $|E(\Omega_i)| \leq \delta$ na svim učestanostima, odnosno kada δ prestane da se menja u iterativnom postupku. Traženi impulsni odziv se može odrediti tako što se prvo izračuna:

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{M}\right) = Q\left(\frac{2\pi k}{M}\right)P\left(\frac{2\pi k}{M}\right), \quad k = 0, 1, \dots, U \quad (9.115)$$

gde je U dato sa (9.78), a zatim se odredi $h[n]$ inverznom DFT ili direktno na osnovu jedne od jednačina (9.84) ili (9.89).

Interesantno je da je opisani algoritam sigurno i vrlo brzo konvergira ka optimalnom rešenju koje je okarakterisano jednakim vrednostima ekstremuma funkcije greške. Postupak je primenljiv i

za vrlo velike dužine impulsnog odziva M , čak i za $M > 100$. Čak i u takvim situacijama broj iteracija retko prelazi 10.

Dobijeni rezultat je optimalan u smislu da ima najmanju aproksimacionu grešku δ za traženu širinu prelazne zone $\Omega_a - \Omega_p$. Ako se težinska funkcija $W(\Omega)$ izabere prema (9.94), onda je $\delta_a = \delta$, $\delta_p = K\delta$. Ako je potrebno realizovati funkciju sa propisanim vrednostima za δ_p i δ_a , onda se obično fiksiraju vrednosti za M i graničnu učestanost propusnog opsega Ω_p , a vrednost granične učestanosti nepropusnog opsega, Ω_a , se varira dok se sintezom ne dobije funkcija koja ima tražene vrednosti za δ_p i δ_a .

Detaljnija ispitivanja sprovedena u [R-4], pokazuju da se funkcije sa parnim i neparnim vrednostima M ne ponašaju na očekivani način. Naime, sintezom velikog broja funkcija prenosa, utvrđeno je da filtarska funkcija sintetizovana za neku vrednost M može, za neke vrednosti Ω_p , imati užu prelaznu zonu od funkcije sintetizovane za dužinu impulsnog odziva $M + 1$. Međutim, za neke druge vrednosti Ω_p funkcija sintetizovana za istu vrednost M može imati širu prelaznu zonu od funkcije sintetizovane za dužinu impulsnog odziva $M - 1$. Ova, neočekivana činjenica, potiče od različitih osobina filtara tipa I, II, III ili IV i uslova alternacije ekstremuma.

9.4.3 PRAKTIČNA PRIMENA OPTIMIZACIONOG POSTUPKA

U praksi se opisani optimizacioni algoritam vrlo često primenjuje, zbog toga što su na raspolaganju programske verzije u FORTRAN-u publikovane u [D-10, M-13, P-13, R-4], kao i zbog toga što je algoritam obavezni deo složenih programskih sistema za digitalnu obradu signala. U Prilogu 2 je prikazana modifikovana FORTRAN verzija algoritma iz [D-10]. Modifikacije se sastoje u prilagođenju kôda aktuelnom standardu FORTRAN77, korekciji uočenih grešaka, kao i u dodavanju programskog modula za određivanje potrebne vrednosti M na osnovu zadatih specifikacija.

Algoritam se najčešće primenjuje za sintezu FIR filtarskih funkcija NF i VF tipa, propusnika opsega učestanosti sa jednim ili više propusnih opsega, projektovanje diferencijatora i Hilbertovih transformatora. U daljem izlaganju biće objašnjene neke specifičnosti primene algoritma u navedenim oblastima koje će biti ilustrovane rešenim primerima.

9.4.3.1 Sinteza filtarskih funkcija

U primeni algoritma za sintezu selektivnih filtarskih funkcija potrebno je na osnovu zadatih specifikacija Ω_p , Ω_a , δ_p i δ_a odrediti potreban broj članova impulsnog odziva M . U tu svrhu bi se mogao koristiti izraz (9.59), ali se njime dobija suviše pesimistički rezultat, tj. veća vrednost M nego što je neophodno. Na osnovu velikog broja rešenih primera sinteze, u literaturi [R-8] predložena je formula za određivanje dužine impulsnog odziva NF filtarske funkcije:

$$M \geq \frac{-10 \log(\delta_p \delta_a) - 13}{2.324 B_t} + 1 \quad (9.116)$$

koja predstavlja generalizaciju izraza (9.59) na slučajeve kada je $\delta_p \neq \delta_a$. Još bolju procenu vrednosti M , sa greškom manjom od 1.3%, daje nešto komplikovanija formula [H-9]:

$$M \geq \frac{2\pi D_\infty(\delta_p, \delta_a)}{B_t} - \frac{f(\delta_p, \delta_a) B_t}{2\pi} + 1 \quad (9.117)$$

gde je:

$$D_{\infty}(\delta_p, \delta_a) = \left[0.005309(\log \delta_p)^2 + 0.07114 \log \delta_p - 0.4761 \right] \log \delta_a - \left[0.00266(\log \delta_p)^2 + 0.5941 \log \delta_p + 0.4278 \right] \quad (9.118)$$

$$f(\delta_p, \delta_a) = 11.01217 + 0.51244(\log \delta_p - \log \delta_a) \quad (9.119)$$

dok je B_t dato izrazom (9.52).

U slučaju propusnika opsega, procena vrednosti M može se takođe izvršiti korišćenjem izraza (9.117), ali se vrednosti funkcija $D_{\infty}(\delta_p, \delta_a)$ i $f(\delta_p, \delta_a)$ određuju iz izraza [M-22]:

$$D_{\infty}(\delta_p, \delta_a) = \left[0.01201(\log \delta_p)^2 + 0.09664 \log \delta_p - 0.51325 \right] \log \delta_a + \left[0.00203(\log \delta_p)^2 - 0.57054 \log \delta_p - 0.44314 \right] \quad (9.120)$$

$$f(\delta_p, \delta_a) = -16.9 - 14.6(\log \delta_p - \log \delta_a) \quad (9.121)$$

dok se vrednost B_t dobija korišćenjem relacije (9.67). Relativna greška procene reda FIR filtra propusnika opsega je u većini slučajeva manja od 4%.

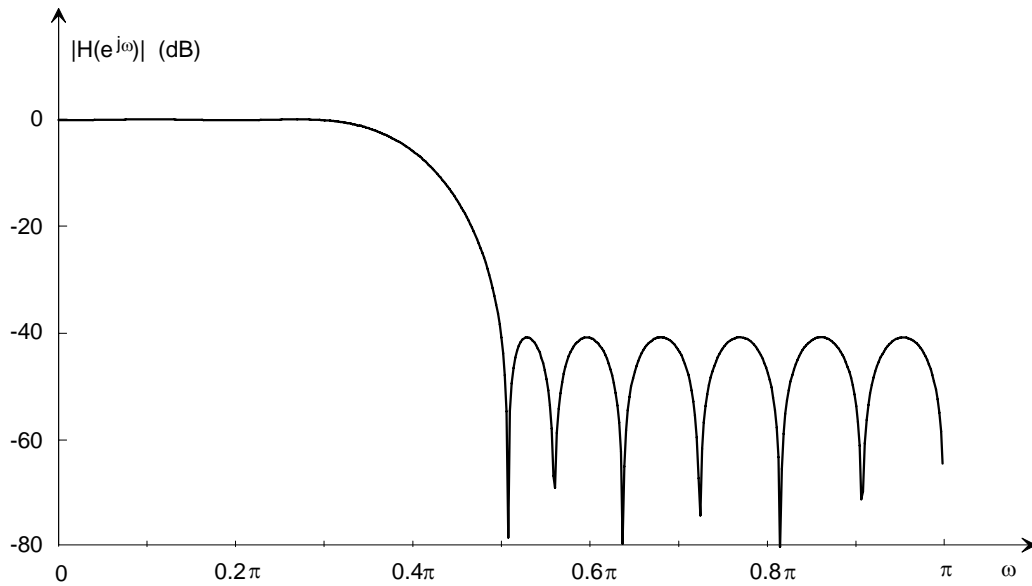
Red FIR filtra propusnika visokih učestanosti procenjuje se istim skupom relacija kao u slučaju propusnika niskih učestanosti (9.117), (9.118) i (9.119). Jedina razlika je što se vrednost B_t određuje iz izraza (9.65). U slučaju nepropusnika opsega učestanosti, red funkcije prenosa se procenjuje istim skupom relacija kao u slučaju propusnika opsega učestanosti (9.117), (9.120) i (9.121), ali se za B_t koristi vrednost određena iz izraza (9.70).

Najteži je za procenu reda slučaj propusnika opsega sa više propusnih opsega. Tada se može koristiti skup izraza (9.117), (9.118) i (9.119) ili (9.117), (9.120) i (9.121), pri čemu se za B_t uzima širina najuže prelazne zone. Pošto greška pri određivanju reda može biti velika, dobijeni rezultat služi samo kao orijentacija za eksperimentalno određivanje tačnog reda funkcije prenosa.

Kao prvi primer sinteze, posmatrajmo sintezu optimalnog FIR NF filtra, koji treba da zadovolji sledeće specifikacije:

- granična učestanost propusnog opsega $\Omega_p = 0.3\pi$ ($F_p = 0.15$),
- granična učestanost nepropusnog opsega $\Omega_a = 0.5\pi$ ($F_a = 0.25$),
- maksimalno odstupanje amplitude u propusnom opsegu $\delta_p = 0.01$ ($\alpha_p = 0.174$ dB),
- maksimalno odstupanje amplitude u nepropusnom opsegu $\delta_a = 0.01$ ($\alpha_a = 40$ dB).

Kao što se vidi, specifikacije su iste kao u primeru projektovanja FIR filtarskih funkcija pomoću Kajzerove prozorske funkcije. Procena reda na osnovu (9.117) daje $M = 22$. Postupak sinteze pokazuje da je to minimalna vrednost M koja obezbeđuje zadovoljenje specifikacija. Realizovane vrednosti za varijacije amplitude su $\delta_p = 0.0093$ i $\delta_a = 0.0092$. Obe vrednosti za varijacije amplitude slične su sa rezultatima dobijenim primenom Kajzerove prozorske funkcije, iako je red manji za 3. Amplitudska karakteristika sintetizovanog filtra je prikazana na slici 9.5.

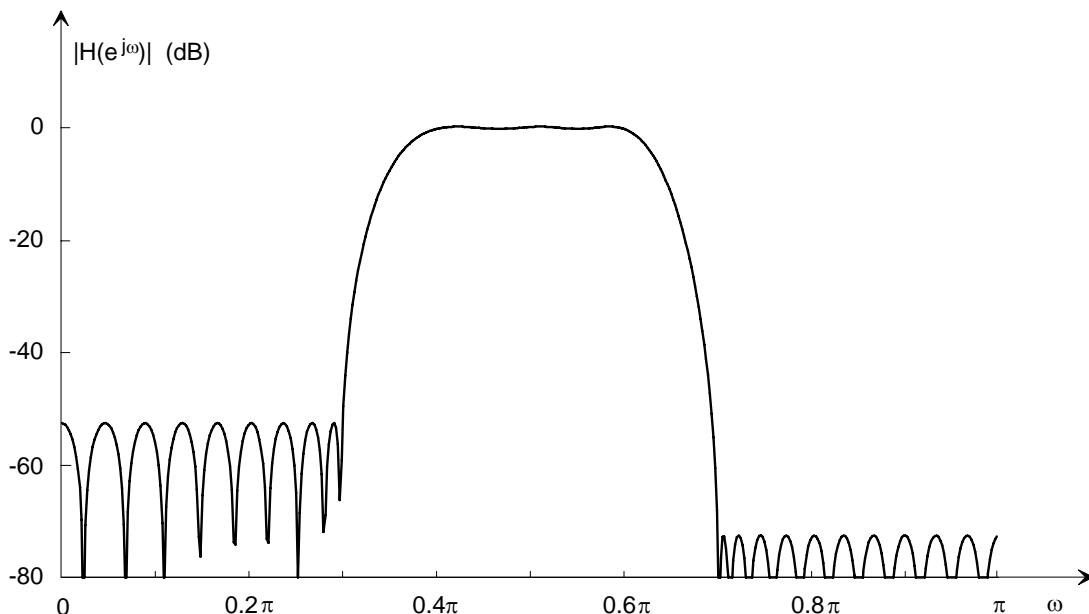


Slika 9.5 Amplitudska karakteristika optimalnog NF FIR filtra za $M=22$.

Jedna od važnih prednosti optimizacionog algoritma nad algoritmom sinteze koji koristi prozorske funkcije leži u tome što je moguće sintetizovati funkciju prenosa filtra propusnika opsega učestanosti sa različitim iznosima slabljenja u nepropusnim opsezima. Kao primer biće pokazana sinteza funkcije prenosa koja treba da zadovolji sledeće specifikacije:

- propusni opseg: $0.4\pi \leq \Omega \leq 0.6\pi$,
- nepropusni opsezi $0 \leq \Omega \leq 0.3\pi$ i $0.7\pi \leq \Omega \leq \pi$,
- maksimalno odstupanje amplitude u propusnom opsegu $\delta_p = 0.0316$ ($\alpha_p = 0.55$ dB),
- maksimalna odstupanja amplitude u nepropusnim opsezima $\delta_{a1} = 0.00316$ ($\alpha_{a1} = 50$ dB) i $\delta_{a2} = 0.000316$ ($\alpha_{a2} = 70$ dB).

Procena reda, na osnovu (9.117), (9.120) i (9.121), daje $M = 55$, što je ujedno i minimalna vrednost M koja obezbeđuje zadovoljenje specifikacija. Realizovane vrednosti za varijacije amplitude su bolje od traženih: $\alpha_p = 0.41$ dB, $\alpha_{a1} = 52.5$ dB i $\alpha_{a2} = 72.2$ dB. Amplitudska karakteristika sintetizovanog filtra propusnika opsega učestanosti je prikazana na slici 9.6.



Slika 9.6 Amplitudska karakteristika optimalnog FIR filtra propusnika opsega za $M = 55$.

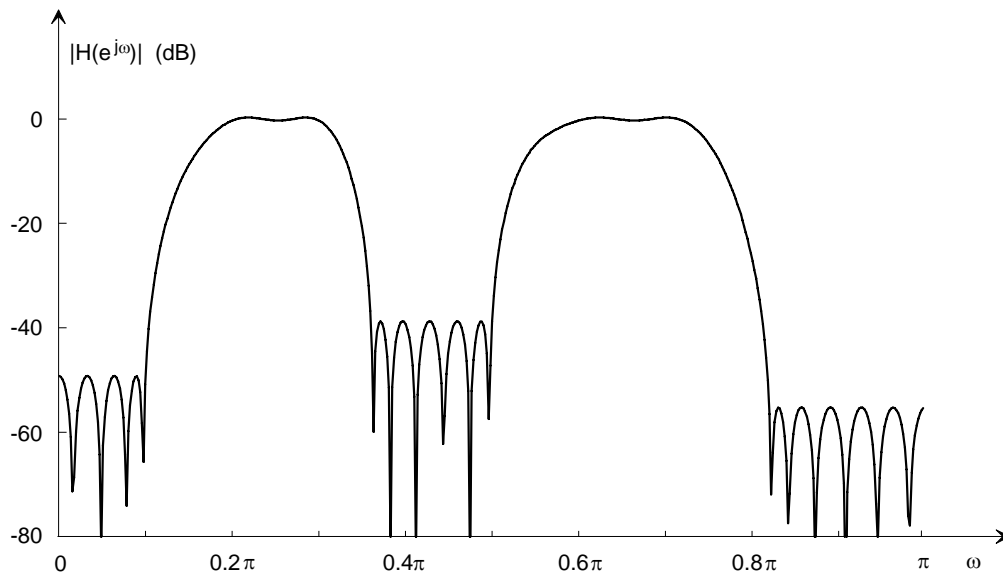
Kao treći primer posmatračemo sintezu filtarske funkcije sa dva propusna opsega i tri nepropusna opsega koju je praktično nemoguće sintetizovati drugim metodama. Neka su zadate sledeće specifikacije:

- propusni opsezi: $0.2\pi \leq \Omega \leq 0.3\pi$ i $0.6\pi \leq \Omega \leq 0.72\pi$,
- nepropusni opsezi $0 \leq \Omega \leq 0.1\pi$, $0.36\pi \leq \Omega \leq 0.5\pi$ i $0.82\pi \leq \Omega \leq \pi$,
- maksimalno odstupanje amplitude u propusnim opsezima $\delta_p = 0.0345$,
- maksimalna odstupanja amplitude u nepropusnim opsezima $\delta_{a1} = 0.00345$, $\delta_{a2} = 0.0115$ i $\delta_{a3} = 0.001725$.

Na osnovu ovakvih specifikacija se vidi da su težinske funkcije koje odgovaraju propusnim opsezima $W_{p1}(\Omega) = W_{p2}(\Omega) = 1$, dok su, prema (9.94), težinske funkcije za nepropusne opsege, $W_{a1}(\Omega) = 10$, $W_{a2}(\Omega) = 3$ i $W_{a3}(\Omega) = 20$. Eksperimentalno se može utvrditi da navedene specifikacije zadovoljava funkcija čiji impulsni odziv ima $M = 55$ odbiraka, a čija je amplitudska karakteristika prikazana na slici 9.7.

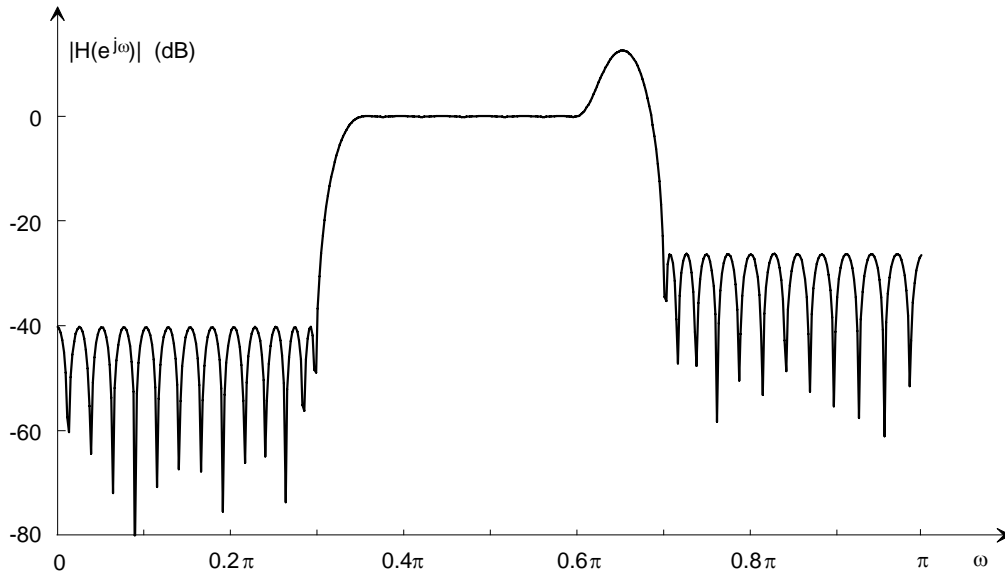
U sintezi funkcija prenosa sa više propusnih ili nepropusnih opsega (a takve su praktično sve funkcije prenosa osim propusnika niskih ili visokih učestanosti) mogu se pojaviti i neki problemi u primeni optimizacionog postupka. Na primer, neka su zadate sledeće specifikacije za filtarsku funkciju propusnika opsega učestanosti:

- propusni opseg: $0.35\pi \leq \Omega \leq 0.6\pi$,
- nepropusni opsezi $0 \leq \Omega \leq 0.3\pi$ i $0.7\pi \leq \Omega \leq \pi$,
- maksimalno odstupanje amplitude u propusnom opsegu $\delta_p = 0.01$,
- maksimalna odstupanja amplitude u nepropusnim opsezima $\delta_{a1} = 0.01$ i $\delta_{a2} = 0.002$.

**Slika 9.7 Amplitudska karakteristika optimalnog FIR filtra sa više propusnih opsega za $M = 55$.**

Navedene specifikacije se mogu zadovoljiti FIR filtrom čiji je impulsni odziv dužine $M = 77$ odbiraka čija je amplitudska karakteristika prikazana na slici 9.8. Lako se može uočiti nedozvoljeni oblik amplitudske karakteristike u prelaznoj zoni između propusnog i gornjeg nepropusnog opsega. Ovakva amplitudska izobličenja se mogu otkloniti promenom specifikacija za

granične učestanosti i slabljenja, ali je to moguće uraditi samo višestrukim ponavljanjem postupka sinteze.



Slika 9.8 Amplitudska karakteristika optimalnog FIR filtra propusnika opsega za $M = 77$.

9.4.3.2 Sinteza diferencijatora

Iz teorije kontinualnih signala je poznato da je Furijeova transformacija izvoda kontinualnog signala jednaka proizvodu Furijeove transformacije signala i faktora $j\omega$. Diskretizacijom kontinualnog signala i njegovog izvoda i korišćenjem osobina Furijeove transformacije diskretnog signala, koje su opisane u drugom i trećem poglavlju, dobija se da ekvivalentni diskretni sistem ima frekvencijsku karakteristiku $j\Omega/T$, $-\pi < \Omega < \pi$, koja je, naravno, periodična sa periodom 2π . Na izlazu diskretnog sistema dobija se diskretni signal koji predstavlja odbirke izvoda kontinualnog pobudnog signala. Dakle, *idealni diskretni diferencijator* ima frekvencijski odziv:

$$H(e^{j\Omega}) = j \frac{\Omega}{T} e^{-j\Omega(M-1)/2}, \quad -\pi < \Omega < \pi \quad (9.122)$$

odnosno, impulsni odziv idealnog diferencijatora je:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\cos \pi[n - (M-1)/2]}{T[n - (M-1)/2]} & n \neq \frac{M-1}{2} \\ 0 & n = \frac{M-1}{2} \end{cases} \quad (9.123)$$

Ako se impulsni odziv ograniči na opseg $0 \leq n \leq M-1$, gde je M neparan broj, lako se može pokazati da važi osobina $h[n] = -h[M-1-n]$, odnosno, da je impulsni odziv diferencijatora antisimetričan. Dakle funkcija prenosa odgovara tipu III FIR sistema. Ova činjenica nije neočekivana, jer se poređenjem izraza za frekvencijski odziv diferencijatora (9.122), sa opštim izrazom za frekvencijski odziv FIR sistema sa linearnom fazom (9.26), uočava da izraz (9.122) odgovara tipu III ili tipu IV FIR sistema.

Tip III FIR sistema nije uvek pogodan za aproksimaciju frekvencijskog odziva idealnog diferencijatora u celom osnovnom opsegu, zbog toga što za tip III FIR sistema važi $H_r(\pi) = 0$.

Dakle ako je potrebno sintetizovati širokopojasni diferencijator, koji je definisan u celom osnovnom opsegu učestanosti (engl. full band differentiator), ne može se koristiti tip III FIR sistema, odnosno neparno M . U praksi se zahtev za diferenciranjem u celom osnovnom opsegu retko sreće, već se obično traži da frekvencijski opseg raste linearno sa učestanošću do neke učestanosti Ω_p . Iznad učestanosti Ω_p frekvencijski odziv se ne specificira ili se ograničava na nulu.

Iz izraza (9.122) sledi da se za sintezu diferencijatora može koristiti i tip IV FIR sistema. U tom slučaju M je parno, tako da se dobija necelobrojno kašnjenje. Kod FIR sistema tipa IV je $H_r(\pi) \neq 0$, tako da je moguće realizovati diferencijator u celom osnovnom opsegu.

Ako se u projektovanju diferencijatora koristi optimizacioni metod baziran na Čebiševljevom aproksimacionom kriterijumu, pogodno je težinsku funkciju specificirati tako da bude obrnuto proporcionalna učestanošću:

$$W(\Omega) = \frac{1}{\Omega}, \quad 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \quad (9.124)$$

Na taj način se postiže da relativna greška u ekstremalnim tačkama bude konstantna jer je:

$$\delta = \max_{0 \leq \Omega \leq \Omega_p} \left| W(\Omega) \left[\frac{\Omega}{T} - H_r(\Omega) \right] \right| = \frac{1}{T} \max_{0 \leq \Omega \leq \Omega_p} \left| 1 - \frac{TH_r(\Omega)}{\Omega} \right| \quad (9.125)$$

Najvažniji parametri koji se specificiraju pri sintezi diferencijatora su dužina impulsnog odziva, M , granična učestanost propusnog opsega, Ω_p i maksimalna relativna greška δ . Između ovih parametara postoji složena veza, ali u principu, sa porastom učestanosti Ω_p raste greška δ . Ponašanje funkcija tipa III i tipa IV vrlo je različito, naročito u okolini učestanosti $\Omega = \pi$. Iz detaljne analize sprovedene u [R-10] vidi se da za dato Ω_p diferencijatori tipa IV, kod kojih je M parno, uvek imaju znatno manju grešku δ od diferencijatora tipa III. Zbog toga se *pri sintezi diferencijatora po pravilu koriste parne dužine impulsnog odziva*, osim u retkim slučajevima kada nije dozvoljeno necelobrojno kašnjenje.

U radu [A-12] prikazan je jedan interesantan postupak za približno određivanje potrebne dužine impulsnog odziva na osnovu zadatih specifikacija za širinu propusnog opsega diferencijatora Ω_p i grešku δ . Prvo se sintetizuju dva diferencijatora niskog reda, čije su širine propusnog opsega Ω_p , a dužine impulsnog odziva M_1 i M_2 i odrede njihove maksimalne relativne greške u propusnom opsegu δ_1 i δ_2 . Zatim se potrebna dužina impulsnog odziva određuje prema formuli:

$$M \geq M_1 + \frac{\ln(\delta/\delta_1)}{\ln(\delta_2/\delta_1)} (M_2 - M_1) \quad (9.126)$$

Najčešće se uzima da je dužina impulsnog odziva M_1 vrlo kratka, a $M_2 = M_1 + 2$, tako da se oba diferencijatora lako i brzo sintetizuju. Posle određivanja grešaka u propusnom opsegu, iz (9.126) se odredi tražena dužina impulsnog odziva diferencijatora. Takođe se, zbog zbog boljeg kvaliteta diferencijatora, koriste parne vrednosti za dužine M_1 , M_2 i M .

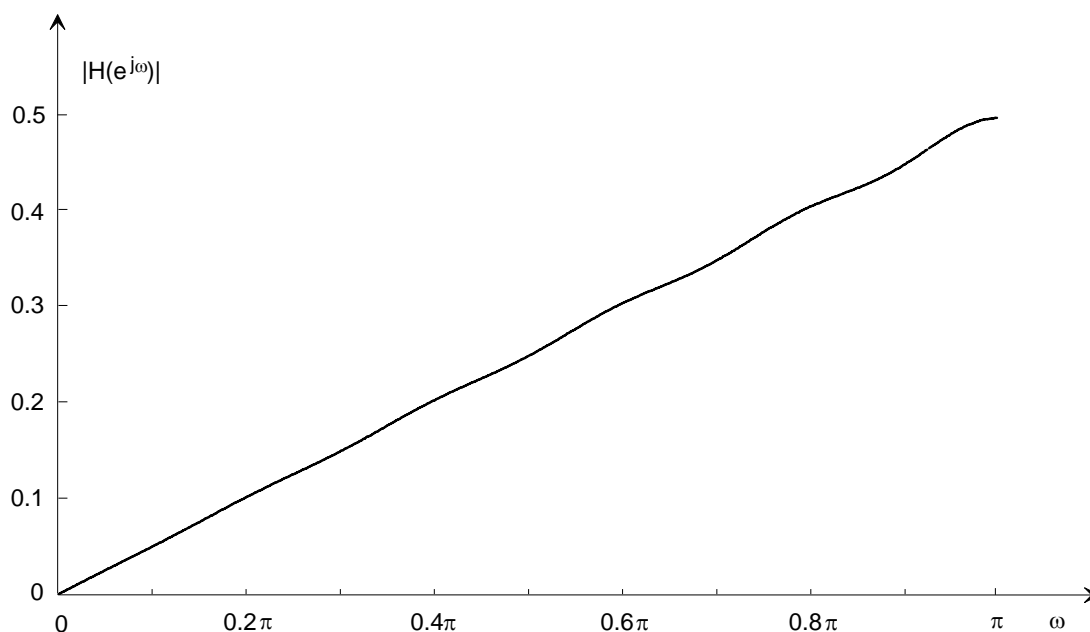
U Tabeli 9.3 prikazani su neki interesantni rezultati, naime, izračunata je potrebna dužina impulsnog odziva u funkciji širine opsega aproksimacije, koja obezbeđuje maksimalnu grešku aproksimacije od 1% ili 0.1%. Iz tabele se jasno vidi kolika je razlika u kvalitetu aproksimacije između tipa III i tipa IV FIR sistema.

Tabela 9.3 Potreban red FIR funkcije za aproksimaciju diferencijatora.

ω_{pl}	1%		0.1%	
	Tip III	Tip IV	Tip III	Tip IV
π	-	22	-	>128
0.9π	27	10	41	18
0.8π	15	6	21	12

Kao primer sinteze diferencijatora optimizacionim programom zasnovanom na Čebiševljevoj aproksimaciji, posmatrajmo sintezu diferencijatora u celom osnovnom opsegu $0 \leq \Omega \leq \pi$. Takav diferencijator se može realizovati samo kao tip IV FIR sistema, tj. impulsni odziv mora imati paran broj odbiraka. Ako se kao dodatni kriterijum postavi zahtev da relativna greška nagiba amplitudske karakteristike bude manja od 1%, onda se eksperimentalno može ustanoviti da takav zahtev zadovoljava sistem čiji impulsni odziv ima $M = 22$ odbirka, jer je tada maksimalna relativna greška 0.944%. Amplitudska karakteristika diferencijatora prikazana je na slici 9.9.

Sinteza diferencijatora se može izvršiti i pomoću prozorskih funkcija ili metodom frekvencijskog odabiranja, ali su dobijeni rezultati lošiji od rezultata dobijenih Čebiševljevom aproksimacijom.

Slika 9.9 Amplitudska karakteristika diferencijatora za $M = 22$.

9.4.3.3 Sinteza Hilbertovog transformatora

Kao što je poznato, *Hilbertov transformator* treba da ostvari fazni pomak od 90° između ulaznog i izlaznog signala. Dakle, frekvencijski odziv Hilbertovog transformatora je:

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} -je^{-j\Omega(M-1)/2}, & 0 < \Omega < \pi \\ je^{-j\Omega(M-1)/2}, & -\pi < \Omega < 0 \end{cases} \quad (9.127)$$

a impulsni odziv Hilbertovog transformatora je:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{2 \sin^2 \frac{\pi}{2} [n - (M-1)/2]}{\frac{\pi T}{2} [n - (M-1)/2]}, & n \neq \frac{M-1}{2} \\ 0, & n = \frac{M-1}{2} \end{cases} \quad (9.128)$$

Ako se impulsni odziv ograniči na opseg $0 \leq n \leq M-1$, lako je uočiti da je impulsni odziv antisimetričan, što se i moglo očekivati, s obzirom na oblik frekvencijskog odziva (9.127). Dakle i Hilbertov transformator se može realizovati kao FIR sistem tipa III ili IV, što za sobom povlači i neka ograničenja. Na primer, u tački $\Omega = 0$, $H_r(0) = 0$, nezavisno od toga da li je M paran ili neparan broj. S druge strane, $H_r(\pi) = 0$, kod FIR sistema tipa III, tj. kada je M neparno. Dakle, ni na koji način nije moguće realizovati Hilbertov transformator u celom osnovnom opsegu učestanosti, što na sreću nije ni potrebno. U praksi se obično zahteva da fazni pomak od 90° bude ostvaren u nekom opsegu učestanosti od interesa koji se najčešće naziva propusni opseg. Dakle, željena realna funkcija učestanosti koju treba realizovati je:

$$H_{dr}(\Omega) = 1, \quad \Omega_{p1} \leq \Omega \leq \Omega_{p2} \quad (9.129)$$

Donja granična učestanost, Ω_{p1} , ne može biti jednaka nuli, dok gornja granična učestanost, Ω_{p2} , može biti jednaka π samo kod funkcija tipa IV.

Posebno je interesantan slučaj kada je $\Omega_{p1} = \pi - \Omega_{p2}$. Tada je, kod funkcija tipa III, frekvencijska karakteristika simetrična oko sredine opsega, $\Omega = \pi/2$, tj. $H_r(\omega) = H_r(\pi - \omega)$. S obzirom na (9.24) i (9.26), dobija se:

$$\begin{aligned} H_r(\Omega) &= \sum_{k=1}^{(M-1)/2} a_k \sin \Omega k = \sum_{k=1}^{(M-1)/2} a_k \sin k(\pi - \Omega) \\ &= \sum_{k=1}^{(M-1)/2} a_k \sin \Omega k \cos \pi k = \sum_{k=1}^{(M-1)/2} a_k (-1)^{k+1} \sin \Omega k \end{aligned} \quad (9.130)$$

odnosno,

$$\sum_{k=1}^{(M-1)/2} [1 - (-1)^{k+1}] a_k \sin \Omega k = 0 \quad (9.131)$$

Iz jednačine (9.131) se vidi da mora biti $a_k = 0$ za $k = 0, 2, 4, \dots$. Kako je prema (9.21):

$$h\left[\frac{M-1}{2} - k\right] = \frac{1}{2} a_k \quad (9.132)$$

svaki drugi odbirak impulsnog odziva simetričnog Hilbertovog transformatora, koji je realizovan kao FIR sistem tipa III, biće jednak nuli. Ova činjenica ima značajne posledice na složenost realizacije, jer u direktnoj realizaciji FIR strukture nedostaje svaki drugi množač. Ukupan broj množenja po odbirku je, dakle, jednak $(M+1)/4$.

U slučaju realizacije Hilbertovog transformatora FIR sistemom tipa IV, simetrija graničnih učestanosti ne dovodi do simetrije frekvencijskog odziva, jer frekvencijski odziv FIR sistema tipa IV ne može biti simetričan, zbog $H_r(0) \neq H_r(\pi)$. U tom slučaju nema ni redukcije broja odbiraka u

impulsnom odzivu. Dakle, *realizacija Hilbertovog transformatora pomoću FIR sistema tipa III ima prednost u oko dva puta manjoj složenosti realizacije, odnosno dva puta većoj brzini rada.*

Hilbertov transformator se može projektovati svim opisanim metodama sinteze FIR funkcija prenosa, ali se najbolji rezultati, kao i u prethodnim slučajevima dobijaju primenom Čebiševljeve aproksimacije. S obzirom da postoji samo jedan opseg učestanosti u kome se aproksimira idealna karakteristika Hilbertovog transformatora (9.129), težinska funkcija se bira da bude konstantna i najčešće je jednaka jedinici. Dakle, u optimizacionom postupku se vrši minimizacija greške:

$$\delta = \max_{\Omega_{p1} \leq \Omega \leq \Omega_{p2}} [H_{dr}(\Omega) - H_r(\Omega)] = \max_{\Omega_{p1} \leq \Omega \leq \Omega_{p2}} [1 - H_r(\Omega)] \quad (9.133)$$

Detaljno ispitivanje karakteristika velikog broja Hilbertovih transformatora tipa III i tipa IV [R-11], pokazuje da su karakteristike oba tipa Hilbertovih transformatora veoma slične, ako je frekvencijski odziv simetričan. Nesimetrija frekvencijskog odziva, koja je moguća kod tipa IV, ne donosi nikakva poboljšanja, pa čak može i da pokvari karakteristike. Zbog toga se *u sintezi Hilbertovih transformatora skoro isključivo koristi tip III FIR sistema sa simetričnom frekvencijskom karakteristikom.* Parametri koje treba specificirati na početku sinteze su dužina impulsnog odziva, M , donja granica propusnog opsega, Ω_{p1} i greška aproksimacije, δ . Ove specifikacije nisu nezavisne jer su povezane približnom formulom:

$$M\Omega_{p1} \approx -3.83 \log \delta \quad (9.134)$$

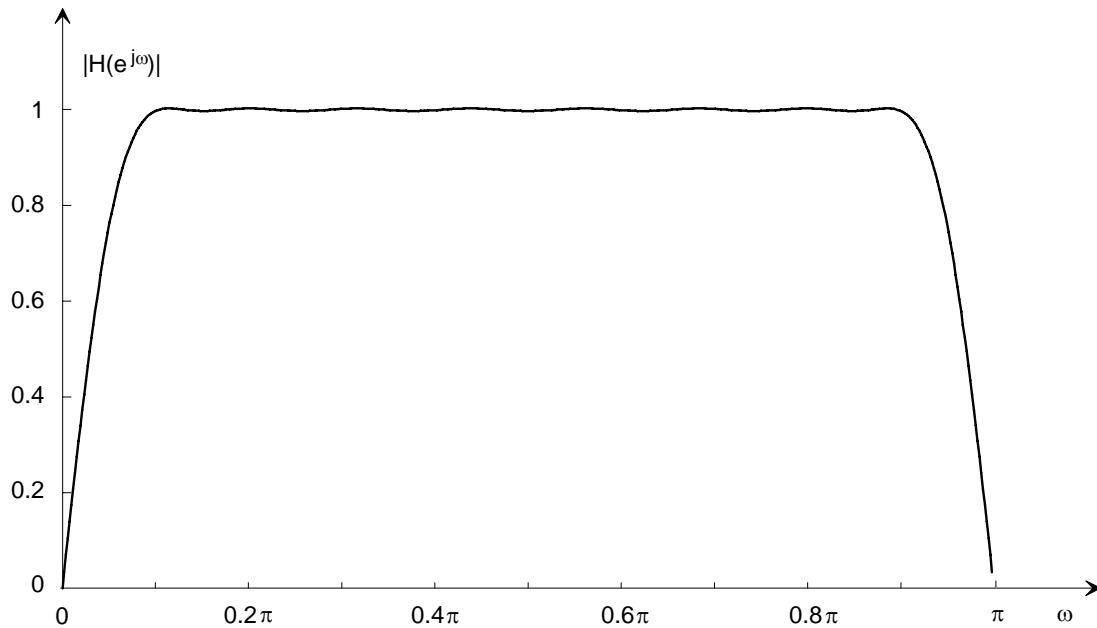
koja može poslužiti za procenu jednog od tri parametra, ako su ostala dva zadata.

Da bi se dobila najefikasnija realizacija Hilbertovog transformatora potrebno je koristiti najuži mogući opseg aproksimacije i tip III FIR filtra. U Tabeli 9.4 prikazane su potrebne vrednosti M i broj množenja u funkciji granice propusnog opsega, Ω_{p1} , za grešku aproksimacije od 1% ili 0.1%.

Tabela 9.4 Potreban red FIR funkcije za aproksimaciju Hilbertovog transformatora.

Ω_{p1}	1%				0.1%			
	Tip III	Množenja	Tip IV	Množenja	Tip III	Množenja	Tip IV	Množenja
0.02π	119	30	118	59	>127	-	>127	-
0.04π	59	15	60	30	95	24	94	47
0.1π	27	7	24	12	39	10	38	19
0.2π	11	3	12	6	19	5	18	9

Za ilustraciju procesa sinteze Hilbertovog transformatora primenom optimizacionog programa zasnovanog na Čebiševljevoj aproksimaciji posmatrajmo sintezu simetričnog Hilbertovog transformatora u opsegu $0.1\pi \leq \Omega \leq 0.9\pi$. Shodno prethodnoj analizi, takav Hilbertov transformator treba realizovati kao tip III FIR sistema, tj. impulsni odziv treba da ima neparan broj odbiraka. Ako se kao dodatni kriterijum postavi zahtev da greška amplitudske karakteristike u propusnom opsegu bude manja od 0.005, onda se eksperimentalno može ustanoviti da takav zahtev zadovoljava sistem čiji impulsni odziv ima $M = 31$ odbirak, jer je tada maksimalna greška $\delta = 0.0027$. Amplitudska karakteristika Hilbertovog transformatora prikazana je na slici 9.10.



Slika 9.10 Amplitudska karakteristika Hilbertovog transformatora za $M = 31$ i $0.1\pi \leq \omega \leq 0.9\pi$.

9.5 POREĐENJE POSTUPAKA SINTEZE FIR FUNKCIJA PRENOSA

U prethodnom izlaganju su opisane tri metode sinteze FIR funkcija prenosa sa linearnom fazom. Pored toga, u literaturi je opisano još nekoliko metoda sinteze koje nisu našle širu primenu. Interesantno je uporediti metode sinteze, ali je prethodno potrebno definisati kriterijume za poređenje. Na primer, kriterijumi za poređenje mogu biti jednostavnost primene, složenost funkcije prenosa koja se dobija, tačnost realizacije specificiranih parametara, itd.

Metod sinteze pomoću prozorskih funkcija je najjednostavniji za primenu, jer se sinteza može izvršiti i bez upotrebe računara. Na žalost, ovim metodom se ne mogu tačno realizovati zadate učestanosti Ω_p i Ω_a , čija vrednost zavisi od korišćene prozorske funkcije i izabrane vrednosti M . Dužina impulsnog odziva, M , koja se dobija ovim metodom je najveća, što znači najveću složenost realizacije.

Metod sinteze pomoću odabiranja u frekvencijskom domenu obavezno zahteva upotrebu računara i programa za optimizaciju parametara. Može se reći da je od opisanih metoda najteži za primenu. Kontrola položaja graničnih učestanosti Ω_p i Ω_a je nešto bolja nego kada se primenjuju prozorske funkcije, a greška graničnih učestanosti je manja od $2\pi/M$. Mada se za sintezu koristi praktično ista vrednost za M kao kod metoda prozorskih funkcija, složenost realizacije je znatno manja zbog mogućnosti korišćenja specijalne realizacione strukture.

Čebiševljeva aproksimacija omogućava najbolju kontrolu specifikacija i u tom pogledu je najbolja. Granične učestanosti Ω_p i Ω_a se tačno realizuju, a dužina impulsnog odziva se dosta tačno može proceniti empirijskim formulama. U filtarskim aplikacijama, potrebna dužina impulsnog odziva je znatno manja nego kod prethodna dva metoda sinteze, često i za 30%. Kod sinteze diferencijatora i Hilbertovih transformatora ušteda je manja, ali i dalje značajna. Drugačije gledano, Čebiševljeva aproksimacija je optimalna u smislu da za dato M omogućava najmanju širinu prelazne zone. S obzirom na široku rasprostranjenost optimizacionih programa za Čebiševljevu aproksimaciju, ovaj metod je danas standardni metod za sintezu FIR funkcija prenosa sa linearnom fazom.

9.6 POREĐENJE FIR I IIR FILTARSKIH SISTEMA

Metode sinteze funkcija prenosa koje su opisane u ovoj i prethodnoj glavi mogu izazvati nedoumicu kod budućeg korisnika, projektanta diskretnih sistema. Najvažnija odluka koju treba doneti u projektovanju nekog diskretnog sistema je da li koristiti FIR ili IIR funkciju prenosa, a zatim koju metodu sinteze koristiti. Na žalost, kao i u mnogim drugim oblastima elektronike, ne postoji jednostavan odgovor na ova pitanja.

Jedan od važnih kriterijuma za poređenje FIR i IIR realizacija može biti složenost realizacije kojom se zadovoljavaju zadate specifikacije. Složenost realizacije se najčešće meri brojem množača u realizacionoj strukturi (brojem množenja po ulaznom odbirku) i u uskoj je vezi sa redom funkcije prenosa.

Ako fazna karakteristika nije od interesa, prednost u pogledu složenosti realizacije nesumnjivo leži na strani IIR filtarskih funkcija jer se zadate specifikacije ostvaruju sa znatno nižim redom funkcije prenosa, odnosno sa manjim brojem množača u realizacionoj strukturi. Na primer, za iste specifikacije, red FIR filtarske funkcije može biti pet do deset puta veći. Takođe, ako su gabariti za amplitudsku karakteristiku zadati kao delimično konstantne funkcije, postupak sinteze je vrlo jednostavan jer se može koristiti bilinearna transformacija i standardni postupci sinteze analognih filtarskih funkcija. Situacija postaje nešto složenija ako su specifikacije za amplitudsku karakteristiku nestandardne. U tom slučaju se i za projektovanje IIR funkcija mora koristiti neki optimizacioni algoritam, ali je prednost u pogledu složenosti realizacije i dalje na strani IIR funkcija.

Ako je potrebno tačno realizovati linearnu faznu karakteristiku onda se moraju primeniti FIR filtarske funkcije, kojima se, za razliku od IIR filtarskih funkcija, tačno može realizovati linearna fazna karakteristika.

Najsloženije je donošenje odluke u slučajevima kada treba sintetizovati selektivnu filtarsku funkciju koja treba da u propusnom opsegu ima približno, ali ne egzaktno, linearnu faznu karakteristiku. Ovakva funkcija se može sintetizovati i kao IIR filter sa korekcijom grupnog kašnjenja (odjeljak 8.6.2), ali i kao optimalni FIR filter. Detaljna ispitivanja većeg broja FIR filtera i IIR filtera eliptičkog tipa sa korigovanim grupnim kašnjenjem pokazuju da je *složenost realizacije manja kod FIR filtarske funkcije ako je dozvoljena greška grupnog kašnjenja manja od 10%*. Na primer, ako je dozvoljena greška grupnog kašnjenja u propusnom opsegu 3%, onda IIR eliptički filter sa korigovanim grupnim kašnjenjem ima oko 30% više množenja po ulaznom odbirku od odgovarajućeg optimalnog FIR filtra. *Ukupno grupno kašnjenje je uvek manje kod FIR filtra.*

Na izbor između FIR i IIR funkcije prenosa mogu uticati i drugi faktori. Jedan od takvih faktora je i konačni broj bita kojim se predstavljaju podaci u digitalnoj realizaciji. O efektima konačne dužine digitalne reči biće više reči u Glavi 16. Drugi faktor koji može biti od uticaja na izbor je i način realizacije. Na primer, ako realizacija algoritma filtriranja treba da se izvede primenom DFT, onda ta odluka diktira izbor FIR funkcije prenosa.