SIGNALI I SISTEMI

— Prvi Deo —

prof. dr Milan Ponjavić, doc. dr Aleksandra Lekić

18. mart 2022.

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Zadaci označeni sa $*$ predstavljaju teže zadatke. Po pravilu spadaju u ispitno gradivo ukoliko su rađeni na predavanjima ili vežbama slični zadaci.

Glava 2

Osobine kontinualnih i diskretnih signala

2.1 Zadaci

Zadatak 1.1.

Dokazati osobine diskretnog jediničnog niza:
a) $\mathrm{u}[n] - \mathrm{u}[n-1] = \delta[n]$,
b) $\mathrm{u}[a-n] = 1 - \mathrm{u}[n-(a+1)]$.

Rešenje:

Uputstvo: Nacrtati sliku.

Zadatak 1.2.

Izraziti sledeće signale u formi osnovnog signala u formi $\mathrm{u}(t \pm t_0)$:
a) $\mathrm{u}\left(\frac{t}{4} - 3\right)$,
b) $\mathrm{u}\left(\frac{t}{4} + 3\right)$,
c) $\mathrm{u}(-3t+6)$,
d) $\mathrm{u}(3t-6)$.

Rešenje:

a) $\mathrm{u}\left(\frac{t}{4} - 3\right) = \mathrm{u}(t-12)$,
b) $\mathrm{u}\left(\frac{t}{4} + 3\right) = \mathrm{u}(t+12)$,
c) $\mathrm{u}(-3t+6) = \mathrm{u}(-t+2) = 1 - \mathrm{u}(t-2)$,
d) $\mathrm{u}(3t-6) = \mathrm{u}(t-2)$.

Zadatak 1.3.

Sledeće signale izraziti kao funkciju signala $\mathrm{u}(t \pm t_0)$:
a) $\mathrm{u}(-t)$,
b) $\mathrm{u}(3-t)$,
c) $t\,\mathrm{u}(-t)$,
d) $(t-3)\,\mathrm{u}(3-t)$.

Rešenje:

a) $\mathrm{u}(-t) = 1 - \mathrm{u}(t)$,
b) $\mathrm{u}(3-t) = 1 - \mathrm{u}(t-3)$,
c) $t\,\mathrm{u}(-t) = t\,(1 - \mathrm{u}(t))$,
d) $(t-3)\,\mathrm{u}(3-t) = (t-3)\,(1 - \mathrm{u}(t-3))$.

2.1.1 Parnost signala

Zadatak 1.4.

a) Ako je $x(t)$ neparan signal, dokazati da je $x(0) = 0$.
b) Ako je $x[n]$ neparan signal, dokazati da je $x[0] = 0$.

Rešenje:

a) Za neparan signal važi da je $x(t) = -x(-t)$. Za $t = 0$ važi da je $x(0) = -x(0)$, a to je moguće samo ako je $x(0) = 0$.
b) Dokazuje se isto kao pod a).

Zadatak 1.5.*

Ako je $x[n] = x_e[n] + x_o[n]$, dokazati sledeće tvrdnje:

a) $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_o[m] = 0$,

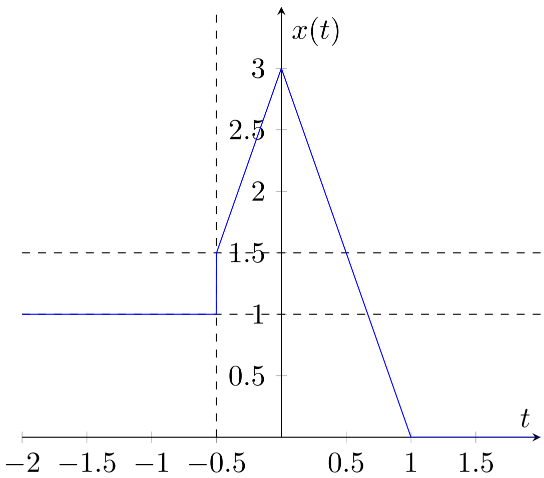
c) $x[n] = 0.5^{|n|}$,
d) $x[n] = 3 + 5^n + 5^{-n}$,
e) $x[n] = \cos(n)$,
f) $x[n] = \cos\left(n - \frac{\pi}{6}\right)$.

Rešenje:

a) Ni paran ni neparan,
b) Neparan,
c) Paran,
d) Paran,
e) Paran,
f) Ni paran ni neparan.

Zadatak 1.9.

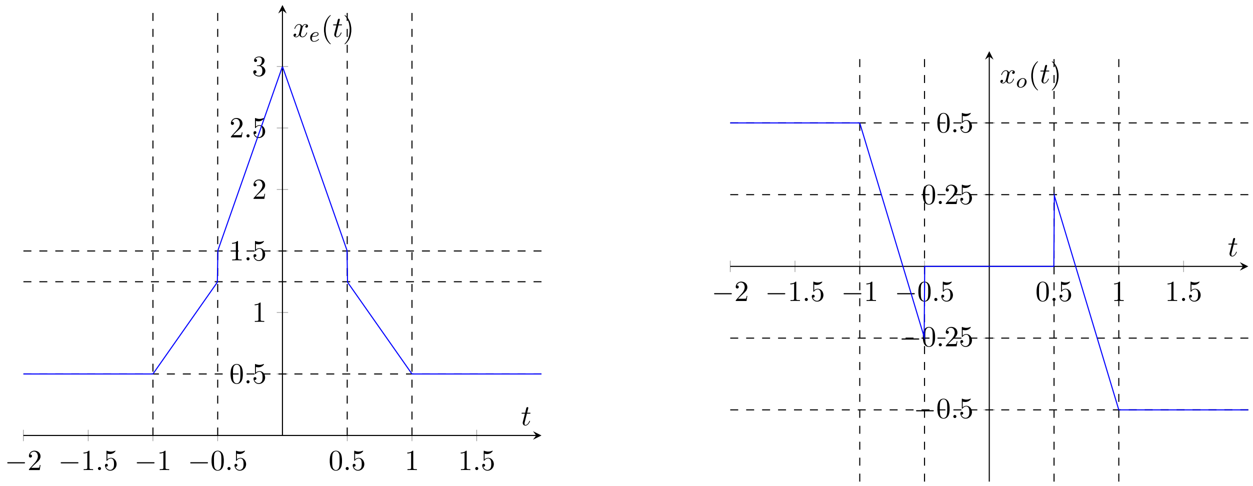
Za signal na slici 1.9.1:
a) Odrediti analitički izraz,
b) Nacrtati parni i neparni deo signala,
c) Nacrtati transformacije signala $g_1(t) = -3\,x(t-3)$, $g_2(t) = x(t+2) - x(t-2)$, $g_3(t) = 5\,x\left(\frac{t+1}{4}\right)$ i $g_4(t) = x(2-t)$.



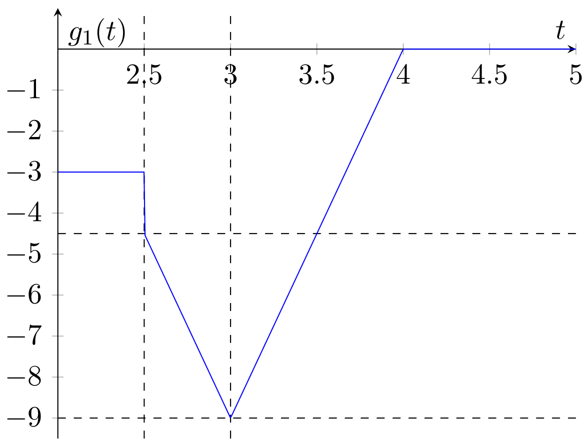
Slika 1.9.1.

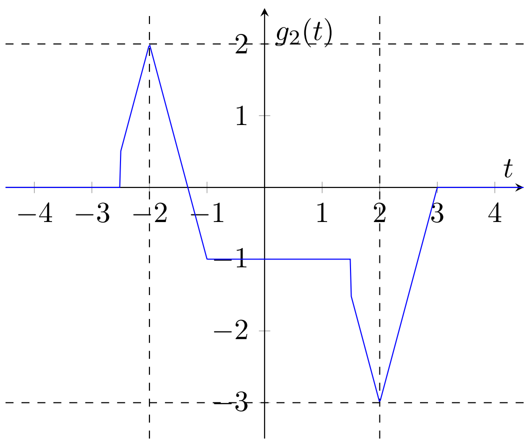
Rešenje:

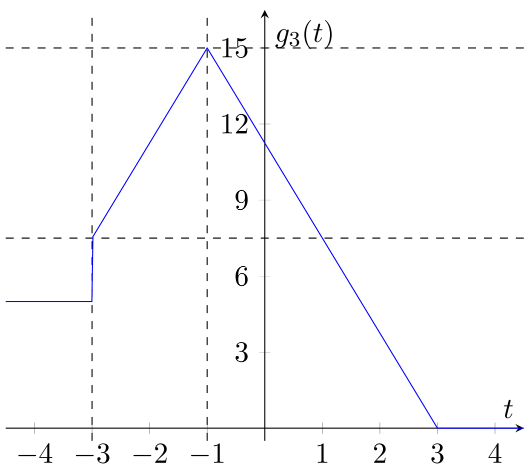
a) $x(t) = \begin{cases} 1 & t \leq -0.5 \\ 3\,\mathrm{tri}(t) & -0.5 < t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases} = \mathrm{u}(-t-0.5) + 3\,\mathrm{tri}(t)\,(\mathrm{u}(t+0.5) - \mathrm{u}(t-1))$
b) Na slici 1.9.2 su prikazani parni (levo) i neparni (desno) deo signala.
c) Na slici 1.9.3 su nacrtane trensformacije signala $x(t)$.

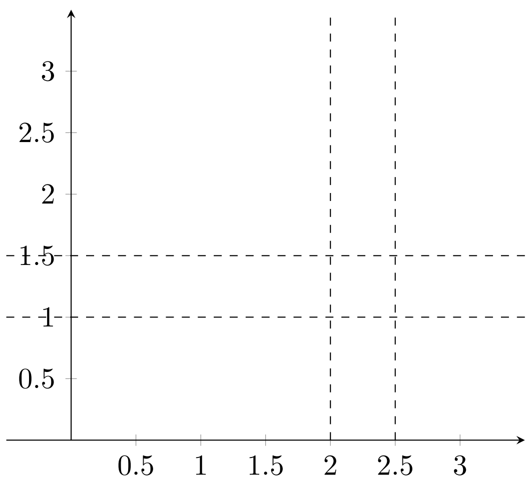

$x_e(t)$
3
2.5
2
1.5
1
0.5
t
−2 −1.5 −1 −0.5 0.5 1 1.5
$x_o(t)$
0.5
0.25
−0.25
−0.5
t
−2 −1.5 −1 −0.5 0.5 1 1.5

Slika 1.9.2


$g_1(t)$
t
2.5 3 3.5 4 4.5 5
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9


$g_2(t)$
2
1
t
−4 −3 −2 −1 1 2 3 4
−1
−2
−3


$g_3(t)$
15
12
9
6
3
t
−4 −3 −2 −1 1 2 3 4

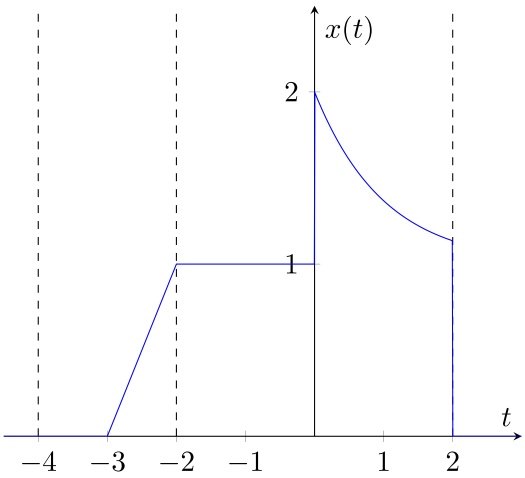

3
2.5
2
1.5
1
0.5
0.5 1 1.5 2 2.5 3

Zadatak 1.10.

Signal je definisan izrazom: $x(t) = \mathrm{ramp}(t+3)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}+1.5\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t}{4}\right)\,(1+\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{u}(t))$.
a) Nacrtati zadati signal.
b) Nacrtati parni i neparni deo signala.
c) Nacrtati transformacije signala $g_1(t) = -3\,x\left(\frac{t}{2}-3\right)$, $g_2(t) = x(2t+2) - x(2t-2)$.

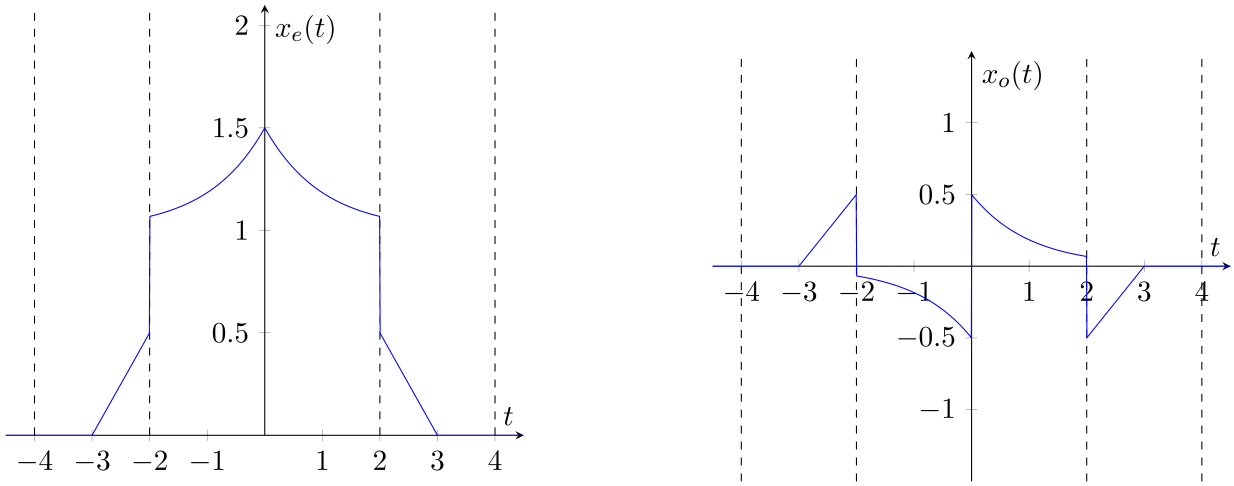
Rešenje:

a) Signal $x(t)$ je prikazan na slici 1.10.1.



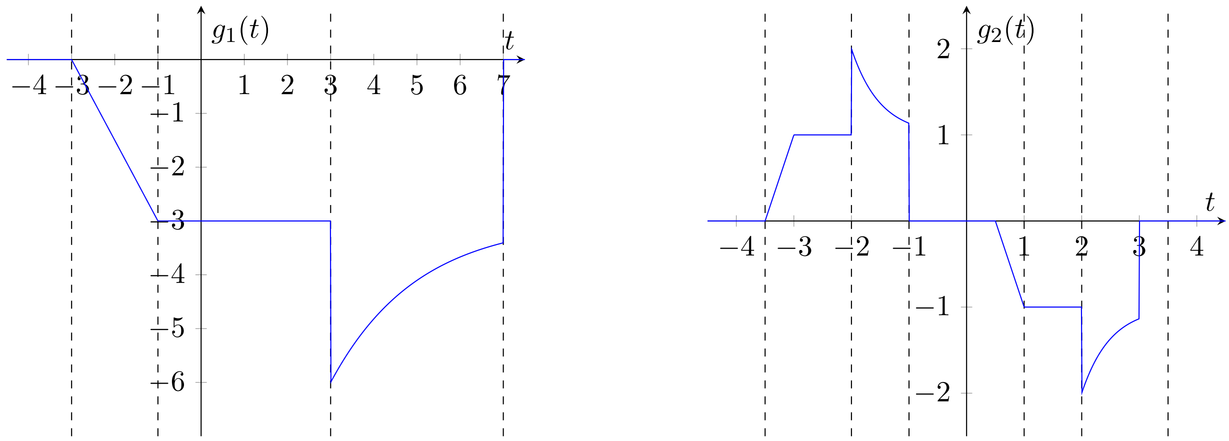
Slika 1.10.1.

b) Parni i neparni deo signala $x(t)$ su prikazani na slici 1.10.2.



Slika 2.10.2.

c) Transformacije $g_1(t)$ i $g_2(t)$ su prikazane na slici 1.10.3.



Slika 2.10.3.

Zadatak 1.11.

a) Nacrtati date signale u intervalu $t \in (-5, 5)$.

- $y(t) = \begin{cases} t, & t < -1 \\ -\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) & -1 \leq t \leq 1 \\ -t & t > 1 \end{cases}$

- $y(t) = \begin{cases} 1 & t < -\frac{1}{2} \\ \text{tri}(t) & -\frac{1}{2} \leq t < 1 \\ -\text{rect}(t-1) & t \geq 1 \end{cases}$

- $y(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ 2 - \text{tri}(t) & -1 \leq t < 1 \\ -t + 2 & t \geq 1 \end{cases}$

- $y(t) = \begin{cases} t + 2 & t < -2 \\ \dfrac{5\,\text{rect}\left(\frac{t}{4}\right)}{t+3} & -2 \leq t < 1 \\ 1 - t & t \geq 1 \end{cases}$

b) Nacrtati parni i neparni deo signala $y(t)$.
c) Za signal iz tačke a) u intervalu $t \in (-5, 5)$ nacrtati sledeće transformacije:

- $g(t) = 2\,y(2t - 3)$,
- $g(t) = y\left(\frac{t}{2} + 1\right) - y\left(\frac{t}{2} - 1\right)$,
- $g(t) = -3\,y\left(\frac{1-t}{2}\right)$,
- $g(t) = y\left(2 - \frac{t}{2}\right)$.

Rešenje:

Pogledati rešenje zadatka 1.10.

Zadatak 1.12.

Odrediti parni i neparni deo signala:
a) $g(t) = 4\,\cos(3\pi\,t)$,
b) $x[n] = (1 + n^2)\,\sin\left(\frac{2\pi\,n}{7}\right)$,

c) $x[n] = \mathrm{rect}_5[n+2]$,
d) $x(t) = t^2\, 10^{|t|} + \frac{1}{\cos(2\pi\, t)} - |t|\, \sin^3(t)\, \cos(t)$,
e) $x(t) = \frac{2\,t^2 - 3\,t + 6}{1+t}$.

Rešenje:

a) Parni deo se može odrediti pomoću formule $g_e(t) = \frac{g(t)+g(-t)}{2}$:

$$g_e(t) = \frac{g(t)+g(-t)}{2} = \frac{4\,\cos(3\pi\, t) + 4\,\cos(-3\pi\, t)}{2} = 4\,\cos(3\pi\, t).$$

Neparni deo se određuje na osnovu formule $g_o(t) = \frac{g(t)-g(-t)}{2} = 0$. Ovo rešenje je očigledno zato što je kosinus parna funkcija.
b)

$$x_e[n] = \frac{(1+n^2)\, \sin\left(\frac{2\pi\, n}{7}\right) + (1+(-n)^2)\, \sin\left(\frac{2\pi\,(-n)}{7}\right)}{2} = 0,$$

$$x_o[n] = \frac{(1+n^2)\, \sin\left(\frac{2\pi\, n}{7}\right) - (1+(-n)^2)\, \sin\left(\frac{2\pi\,(-n)}{7}\right)}{2} = (1+n^2)\, \sin\left(\frac{2\pi\, n}{7}\right).$$

Kao što se vidi, rešenje je očigledno. Dati signal je proizvod dva signala: $x[n] = x_1[n]\, x_2[n]$, pri čemu su $x_1[n] = 1 + n^2$ i $x_2[n] = \sin\left(\frac{2\pi\, n}{7}\right)$. Pošto je $x_1[n]$ paran signal, a $x_2[n]$ neparan signal, njihov proizvod je neparan signal. Zato je parni deo signala $x_e[n] = 0$, a neparni deo $x_o[n] = x[n]$.
c) Pošto je $\mathrm{rect}_5[n] = \mathrm{u}[n+5] - \mathrm{u}[n-6]$, sleduje da je $x[n] = \mathrm{u}[n+7] - \mathrm{u}[n-4]$, a $x[-n] = \mathrm{u}[n+3] - \mathrm{u}[n-8]$. Na osnovu toga je:

$$x_e[n] = \frac{x[n]+x[-n]}{2} = \frac{1}{2}\,(\mathrm{u}[n+7] - \mathrm{u}[n-4] + \mathrm{u}[n+3] - \mathrm{u}[n-8]) = \frac{1}{2}\,(\mathrm{rect}_7[n] + \mathrm{rect}_3[n]),$$

$$x_o[n] = \frac{x[n]-x[-n]}{2} = \frac{1}{2}\,(\mathrm{u}[n+7] - \mathrm{u}[n-4] - \mathrm{u}[n+3] + \mathrm{u}[n-8]).$$

d) Do rešenja se dolazi lako posmatranjem koji su sabirci u izraz parni, a koji neparni signali. Prvi sabirak je $t^2\, 10^{|t|}$, a to je proizvod dva parna signala i samim tim paran signal. Drugi sabirak je $\frac{1}{\cos(2\pi\, t)}$ i on je paran. Treći sabirak je $|t|\, \sin^3(t)\, \cos(t)$ neparan zato što je prozvod dva parna signala, $|t|$ i $\cos(t)$, i neparnog signala $\sin^3(t)$. Prema tome je: $x_e(t) = t^2\, 10^{|t|} + \frac{1}{\cos(2\pi\, t}$ i $x_o(t) = -|t|\, \sin^3(t)\, \cos(t)$.
e)

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\,t^2 - 3t + 6}{1+t} + \frac{2\,t^2 + 3t + 6}{1-t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(1-t)\,(2\,t^2 - 3t + 6)}{1-t^2} + \frac{(1+t)\,(2\,t^2 + 3t + 6)}{1-t^2}\right) =$$

$$= \frac{2\,(2\,t^2+6) + 6\,t^2}{2\,(1-t^2)} = \frac{5\,t^2 + 6}{1-t^2}$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\,t^2 - 3t + 6}{1+t} - \frac{2\,t^2 + 3t + 6}{1-t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(1-t)\,(2\,t^2 - 3t + 6)}{1-t^2} - \frac{(1+t)\,(2\,t^2 + 3t + 6)}{1-t^2}\right) =$$

$$= \frac{2t\,(2\,t^2+6) + 6t}{2\,(t^2-1)} = t\,\frac{2\,t^2 + 9}{t^2 - 1}$$

Zadatak 1.13.

Koristeći se osobinama parnosti izračunati sledeće integrale:

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} t^2\, \sqrt[3]{\sin(t)}\, dt$,

b) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\sin(t)\,dt,$

c) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos^2(t)-t^2\,\sin^3(t))\,dt,$

d) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \cos(t)\,\tanh(t)\,dt,$

e) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\sin(t)}\,dt,$

f) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(t^2\,\sin(5t)+\cos\left(\frac{t}{3}\right)+\tan^3(t)\right)\,dt,$

g) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\,t^7-t^5+2\,t^3-t+1}{\cos^2(t)}\,dt.$

Rešenje:

a), **b)** i **d)** Podintegralna funkcija je neparna jer je proizvod neparne i parne funkcije. Zato je vrednost integrala jednaka nuli.

c) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\underbrace{\cos^2(t)}_{\text{parno}}-\underbrace{t^2\,\sin^3(t)}_{\text{neparno}})\,dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2(t)\,dt=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2(t)\,dt=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos(2t))\,dt=$

$\displaystyle=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

e) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x(t)\,dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x(t)+x(-t)}{2}\,dt=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}(x(t)+x(-t))\,dt=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1-\sin(t)}+\frac{1}{1+\sin(t)}\right)\,dt=$

$\displaystyle=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1-\sin^2(t)}\,dt=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2(t)}\,dt=2\,\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan(0)\right)=2$

f) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\underbrace{t^2\,\sin(5t)}_{\text{neparno}}+\cos\left(\frac{t}{3}\right)+\underbrace{\tan^3(t)}_{\text{neparno}}\right)\,dt=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(\frac{t}{3}\right)\,dt=6\,\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$

g) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2\,t^7-t^5+2\,t^3-t+1}{\cos^2(t)}\,dt=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2(t)}\,dt=2\,\tan(t)|_0^{\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}$

Zadatak 1.14.

Dat je signal $x(t)=\left(\frac{5t-1}{t^2+t}+a\,\frac{5t+1}{t^2-t}\right)\,\mathrm{rect}(t)$. Da li je moguće izabrati parametar a tako da signal $x(t)$ bude:

a) paran,

b) neparan.

Rešenje:

a) Da bi signal bio paran, mora da važi

$$(\forall t)\,(x(t)+x(-t)\neq 0 \wedge x(t)-x(-t)=0)\,.$$

$$\frac{5t-1}{t^2+t}-a\,\frac{-5t+1}{t^2-t}=0 \quad\Rightarrow\quad a=-1$$

b) Signal je neparan ako važi $(\forall t)\,(x(t)+x(-t)=0 \wedge x(t)-x(-t)\neq 0)$. Određuje se $a=1$.

2.1.2 Periodičnost signala

Zadatak 1.15.

Ako je signal $x(t)$ periodična neprekidna funkcija argumenta t, sa osnovnom periodom T_0, dokazati da važi:

$$\int\limits_0^{T_0} x(t)\,dt=\int\limits_a^{a+T_0} x(t)\,dt.$$

Rešenje:

Smenom promenljivih $\tau=t+a$ se dobija da je $\int\limits_a^{a+T_0} x(t)\,dt=\int\limits_0^{T_0} x(\tau)\,d\tau$, što je i trebalo pokazati.

Zadatak 1.16.

Ako je signal $x_U(t)$ periodična neprekidna funkcija argumenta t, sa osnovnom periodom T_0, dokazati da je signal $y(t)=\int\limits_{t_0}^{t} x_U(\tau)\,d\tau$ jednak zbiru linearne funkcije i periodične funkcije periode T_0.

Rešenje:

Svaki periodični signal može da se rastavi na konstantnu i naizmeničnu komponentu $x_U(t)=x_u(t)+X_0$. Pošto je signal periodičan, važi da je

$$x_U(t)=x_u(t)+X_0=x_u(t+k\,T_0)+X_0=x_U(t+k\,T_0),\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Ako se primeni integracija, dobija se da je

$$y(t)=\int\limits_{t_0}^{t} x_U(t)\,dt=\int\limits_{t_0}^{t}(x_u(t)+X_0)\,dt=X_u(t)-X_u(t_0)+X_0\,(t-t_0).$$

Takođe važi i

$$y(t)=\int\limits_{t_0}^{t} x_U(t+k\,T_0)\,dt=\int\limits_{t_0}^{t}(x_u(t+k\,T_0)+X_0)\,dt=X_u(t+k\,T_0)-X_u(t_0+k\,T_0)+X_0\,(t-t_0).$$

Jasno se vidi da je $X_u(t)=X_u(t+k\,T_0)$ periodična funkcija.

$$y(t)=X_u(t)+X_0\,t-\underbrace{(X_u(t_0)+X_0\,t_0)}_{\text{konstanta C}}=\underbrace{X_u(t)-C}_{\text{periodična}}+\underbrace{X_0\,t}_{\text{linearna}}$$

Zadatak 1.17.

Dokazati sledeće tvrđenje za signale $x(t) = \int\limits_0^t \sin^n(\tau)\,d\tau$ i $y(t) = \int\limits_0^t \cos^n(\tau)\,d\tau$.
a) Ako je n neparno, signali $x(t)$ i $y(t)$ su periodični sa periodom 2π.
b) Ako je n parno, signali $x(t)$ i $y(t)$ su zbir linearnog signala i periodičnog signala sa periodom 2π.

Rešenje:

a) Za neparno $n = 2k+1$, signali $\sin^{2k+1}(t) = \sin^{2k}(t)\,\sin(t)$ i $\cos^{2k+1}(t) = \cos^{2k}(t)\,\cos(t)$ imaju samo naizmeničnu komponentu. Na osnovu prethodnog zadatka sledi tvrđenje da je perioda signala $x(t)$ i $y(t)$ jednaka 2π.
b) Za parno $n = 2k$ podintegralni sabirci mogu da se rastave na konstantnu i naizmeničnu komponentu. To se vidi na primeru sinusne funkcije

$$\sin^{2k}(t) = 2^{-k}\,(1-\cos(2t))^k = 2^{-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}1^{k-i}\,(-\cos(2t))^i.$$

Analogno je i za kosinus $\cos^{2k}(t)$. Na osnovu prethodnog zadatka 1.16. se signali $x(t)$ i $y(t)$ mogu predstaviti kao zbir linearne i periodične funkcije.

Zadatak 1.18.

a) Ako su $x_1(t)$ i $x_2(t)$ dva kontinualna signala, prvi sa periodom T_1, a drugi sa periodom T_2, odrediti uslov pod kojim će signal $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ biti periodičan i odrediti njegovu osnovnu periodu.
b) Ako su $x_1[n]$ i $x_2[n]$ dva periodična niza, prvi sa periodom N_1, a drugi sa periodom $N_2 > N1$, odrediti uslov pod kojim će signal $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$ biti periodičan i odrediti njegovu osnovnu periodu.

Rešenje:

a) Ako je T_0 osnovna perioda signala $y(t)$, tada je ispunjeno:

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) = y(t+T_0) = x_1(t+T_0) + x_2(t+T_0).$$

Na osnovu toga važi da je

$$x_1(t) = x_1(t+T_0), \qquad x_2(t) = x_2(t+T_0),$$

što je moguće ako je $k\,T_1 = T_0$ i $p\,T_2 = T_0$ za $k, p \in \mathbb{Z}$. Prema tome odnos osnovnih perioda signala $x_1(t)$ i $x_2(t)$ mora da bude racionalan broj da bi signal $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ bio periodičan. Osnovna perioda signala $y(t)$ je $k\,T_1 = p\,T_2 = T_0$, pri čemu su k i p najmanji mogući pozitivni celi brojevi koji zadovoljavaju jednakost $k/p = T_2/T_1$.
b) Ako je N_0 osnovna perioda signala $y[n]$, tada je ispunjeno:

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n] = y[n+N_0] = x_1[n+N_0] + x_2[n+N_0].$$

Na osnovu toga važi da je

$$x_1[n] = x_1[n+N_0], \qquad x_2[n] = x_2[n+N_0],$$

što je moguće ako je $k\,N_1 = N_0$ i $p\,N_2 = N_0$, za $k, p \in \mathbb{N}$. Prema tome odnos osnovnih perioda signala $x_1[n]$ i $x_2[n]$ mora da bude racionalan broj da bi signal $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$ bio periodičan. Osnovna perioda signala $y[n]$ je $k\,N_1 = p\,N_2 = N_0$, pri čemu su k i p najmanji mogući pozitivni celi brojevi koji zadovoljavaju jednakost $N_2/N_1 = k/p$.

Zadatak 1.19.

Ako je T perioda signala $x(t)$, odrediti periodu signala $y(t) = x(at+b), a \neq 0$.

Rešenje:

Period signala $y(t)$ je $\frac{T}{a}$ jer je $x(at+b) = x(at+b+T) = x\left(a\left(t+\frac{T}{a}\right)+b\right) = y\left(t+\frac{T}{a}\right)$.

Zadatak 1.20.

Ako je $x(t)$ periodičan signal sa periodom T, a $y(t)$ proizvoljan signal, dokazati da je $z(t) = y(x(t))$ periodičan signal sa periodom T.

Rešenje:

Pošto je $x(t+nT) = x(t)$, važi da je $z(t+nT) = y(x(t+nT)) = y(x(t)) = z(t)$.

Zadatak 1.21.

Ispitati da li su sledeći nizovi periodični i odrediti njihovu osnovnu periodu N:
a) $x[n] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{2\pi\,n}{3}}$,
b) $x[n] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{5\pi\,n}{7}}$,
c) $x[n] = \mathrm{e}^{5\mathrm{j}\,n}$,
d) $x[n] = \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\,\pi\,n}$,
e) $x[n] = \mathrm{e}^{0.3\mathrm{j}\,\frac{n}{\pi}}$,
f) $x[n] = \mathrm{e}^{0.3\,\mathrm{j}\,n}$,
g) $x[n] = \cos\left(\frac{14\pi\,n}{6}\right)$,
h) $x[n] = \sin(3\,n)$.

Rešenje:

a)

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{2\pi\,n}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{2\pi\,(n+N)}{3}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{2\pi\,n}{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{2\pi\,N}{3}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{2\pi\,N}{3}} = 1,$$
$$\frac{2\pi\,N}{3} = 2k\,\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Najmanji prirodan broj N za koji je moguće ispuniti prethodnu jednakost predstavlja osnovnu periodu niza. Prema tome je $N = 3$.
b) $\frac{5\pi\,N}{7} = 2k\,\pi \quad \Rightarrow \quad N = 14$
c) $\mathrm{e}^{5\mathrm{j}\,N} = 1 \quad \Rightarrow \quad 5\,N = 2k\,\pi$, $N = \frac{2k\,\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$. N ne može da bude ceo broj. To znači da signal nije periodičan.
d) $N = 1$
e) Signal nije periodičan.
f) Signal nije periodičan.
g)

$$\cos\left(\frac{14\pi\,n}{6}\right) = \cos\left(\frac{14\pi\,(N+n)}{6}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{14\pi}{6}\,N = 2k\,\pi$$

Uslov je ispunjen za $N = 6$ pri $k = 7$.
h) $\sin(3\,n) = \sin(3\,(N+n)) \quad \Rightarrow \quad 3\,N = 2k\,\pi$
Ne postoji celobrojno k takvo da za neki prirodni broj N bude zadovoljena jednakost. Niz nije periodičan.

Zadatak 1.22.

Dati su signali $x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi\,n}{5}\right)$, $x_2[n] = \cos\left(\frac{\pi\,n}{8}\right)$ i $x_3[n] = \cos(0.4\,n\,\pi)$.

a) Odrediti da li je signal $x_1[n]$ periodičan. Ako jeste, koliko ima odbiraka po periodi?
b) Ponoviti tačku a) za $x_2[n]$.
c) Ponoviti tačku b) za $x_3[n]$.
d) Da li je signal $x[n] = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n]$ periodičan. Ako jeste, koja mu je osnovna perioda?

Rešenje:

a) Osnovna perioda je $N = 10$.
b) Osnovna perioda je $N = 16$.
c) Osnovna perioda je $N = 5$.
d) Signal jeste periodičan sa periodom $N = \mathrm{NZS}(10, 16, 5) = 80$.

Zadatak 1.23.

Ispitati periodičnost sledećih nizova i ako su periodični, odrediti njihovu periodu:
a) $x[n] = \sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} (\delta(n-3m) - \delta(n-3m-1))$,
b) $x[n] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{n}{8}-\pi\right)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,n}$,
c) $x[n] = \cos\left(\frac{n^2\pi}{8}\right)$,
d) $x[n] = \cos\left(\frac{8\pi n}{7} + 2\right)$,
e) $x[n] = \cos\left(\frac{n}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$,
f) $x[n] = 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{8}\right) - 4\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$,
g) $x[n] = \cos(3\pi n + 2)\,\mathrm{u}[n]$,
h) $x[n] = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,3\pi\,\frac{n+0.5}{5}}$,
i) $x[n] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,7\pi n}$,
j) $x[n] = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{4\pi n}{7}} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{2\pi n}{5}}$.

Rešenje:

a) $x[n] = \mathrm{comb}_3[n] - \mathrm{comb}_3[n-1]$
Vidi se da je signal periodičan sa periodom $N = 3$.
b) Kako je $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,x} = \cos(x) + \mathrm{j}\,\sin(x)$, signal se može razložiti: $x[n] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{n}{8}\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,n} = -\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{n}{8}\right)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,n}$. Komponente signala $x[n]$ imaju periode $N_{01} = 16\pi$ i $N_{02} = 2\pi$ koje nisu prirodni brojevi. Zato se ne može naći prirodan broj N tako da bude zadovoljeno $x[n] = x[n+N]$, pa signal $x[n]$ nije periodičan.
c) Da bi signal bio periodičan, potrebno je da važi $x[n+N] = x[n]$, odnosno $\cos\left((n+N)^2\,\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(n^2\,\frac{\pi}{8}\right)$. To znači da je potrebno da važi $\frac{N^2\pi}{8} + \frac{2\,nN\,\pi}{8} = 2k\,\pi$. Da bi ova jednakost važila za $k \in \mathbb{Z}$, potrebno je da N bude deljivo sa 16, a $n\,N$ deljivo sa 8 za bilo koje $n \in \mathbb{Z}$. Ovaj uslov je ispunjen ako je $N = 8$.
d) Potrebno je da važi $\cos\left(\frac{8\pi\,(n+N)}{7} + 2\right) = \cos\left(\frac{8\pi n}{7} + 2\right)$. Vidi se da je ovo zadovoljeno za $N = 7$ i $k = 4$.
e) Signal se može razviti u zbir signala

$$x[n] = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1+\pi}{8}\,n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{-1+\pi}{8}\,n\right),$$

čije su periode redom $N_{01} = \frac{8\pi}{1+\pi} \notin \mathbb{N}$ i $N_{02} = \frac{8\pi}{-1+\pi} \notin \mathbb{N}$. Ne postoji prirodni broj N koji predstavlja periodu signala $x[n]$, pa je ovaj signal aperiodičan.
f) Signali $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$, $\sin\left(\frac{n\pi}{8}\right)$ i $\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ imaju redom periode $N_{01} = 8$, $N_{02} = 16$ i $N_{03} = 4$. Perioda signala $x[n]$ se određuje kao najmanji zajednički sadržalac perioda N_{01}, N_{02} i N_{03} i iznosi $N = 16$.
g) Kako je vrednost signala za $n < 0$ jednaka nuli, to znači da signal nije periodičan za negativne vrednosti odbiraka n. Odatle sledi da je signal $x[n]$ aperiodičan.
h) $x[n+N] = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,3\pi\,\frac{n+N+0.5}{5}} = x[n]\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,3\pi\,\frac{N}{5}}$

Za $k = 3$ se dobija da je $N = 10$.
i) Kako je $x[n] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,7\pi\,n} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi\,n}$, vidi se da je signal periodičan sa periodom $N = 2$.
j) Signal $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{4\pi\,n}{7}}$ je periodičan sa periodom $N_{01} = 7$, dok je signal $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{2\pi\,n}{5}}$ periodičan sa periodom $N_{02} = 5$. Perioda signala $x[n]$ je zato $N = \mathrm{NZS}(7, 5) = 35$.

Zadatak 1.24.

Neka je $x(t)$ periodičan signal sa periodom T_0, a $x[n]$ periodičan signal sa periodom N_0. Ispitati da li su signali $y(t)$ i $y[n]$ periodični i ako jesu odrediti njihove osnovne periode, za slučajeve:
a) $y(t) = x(2t)$,
b) $y(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$,
c) $y[n] = x[2n]$,
d) $y[n] = \begin{cases} x[n/2], & \text{za parno } n \\ 0, & \text{za neparno } n. \end{cases}$

Rešenje:

a) Ako je signal $y(t)$ periodičan sa osnovnom periodom jednakom T_1, mora da važi:

$$y(t) = y(t + T_1) \quad \Rightarrow \quad x(2t) = x(2t + 2T_1),$$

što je moguće ako je $2\,T_1 = T_0$, odnosno $T_1 = \frac{T_0}{2}$.
b) Ako je signal $y(t)$ periodičan sa osnovnom periodom jednakom T_1, mora da važi:

$$y(t) = y(t + T_1) \quad \Rightarrow \quad x\left(\frac{t}{2}\right) = x\left(\frac{t + T_1}{2}\right),$$

što je moguće ako je $\frac{T_1}{2} = T_0$, odnosno $T_1 = 2\,T_0$.
c) Ako je signal $y[n]$ periodičan sa osnovnom periodom jednakom N_1, mora da važi:

$$y[n] = y[n + N_1] \quad \Rightarrow \quad x[2n] = x[2n + 2N_1],$$

što je moguće ako je $2\,N_1 = k\,N_0$, odnosno $N_1 = \frac{k\,N_0}{2}$. Ako je N_0 paran broj, najmanje moguće $k \in \mathbb{N}$ sa kojim je zadovoljena prethodna jednakost je $k = 1$, dok je za slučaj kada je N_0 neparno, najmanje moguće $k = 2$.
d) Ako je signal $y[n]$ periodičan sa osnovnom periodom jednakom N_1, mora da važi:

$$y[n] = y[n + N_1] \quad \Rightarrow \quad x\left[\frac{n}{2}\right] = x\left[\frac{n + N_1}{2}\right],$$

što je moguće ako je $\frac{N_1}{2} = N_0$, odnosno $N_1 = 2\,N_0$.

Zadatak 1.25.

Ispitati periodičnost sledećih signala i u slučaju da su periodični naći osnovni period:
a) $x(t) = \cos(3t) + \sin(5t)$,
b) $x(t) = \cos(6t) + \sin(8t) + \mathrm{e}^{2\mathrm{j}\,t}$,
c) $x(t) = \cos(t) + \sin(\pi\,t)$.

Rešenje:

a) Perioda $\cos(3t)$ je $\frac{2\pi}{3}$, a signala $\sin(5t)$ je $\frac{2\pi}{5}$. Zato je perioda signala $x(t)$ jednaka najmanjem zajedničkom sadržaocu ovih perioda $T = 2\pi$.
b) Periode signala $\cos(6t)$, $\sin(8t)$ i $\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\,t}$ su redom $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ i π. Perioda signala $x(t)$ je stoga π.
c) Zapisaćemo signal $x(t)$ kao $x(t) = \cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_1 t)$. Da bi signal bio periodičan, potrebno je da $\frac{\omega_1}{\omega_0} \in \mathbb{Q}$ bude racionalan broj. Kako je $\frac{\omega_1}{\omega_0} = \pi$, signal $x(t)$ nije periodičan.

Zadatak 1.26.

Odrediti parnost i osnovni period signala:
a) $x(t) = \sin(5t)\,\sin(3t)$,
b) $x(t) = 2\,\cos(4t) - 3\,\sin(t)$,
c) $x(t) = \cos^2(3t) + \cos^2(t) - \cos(4t)\,\cos(2t) + \cos(t\,\sqrt{2})$,
d) $x(t) = \sin^2(t)\,\cos(t)$,
e) $x(t) = \sin^2(t)\,\cos^3(t)$,
f) $x(t) = 4\,\sin^3(t) - 3\,sin(t)$.

Rešenje:

a) $x(t) = \dfrac{1}{2}\,(\cos(2t) - \cos(8t))$
Osnovna perioda je $T = \mathrm{NZS}\left(\pi, \frac{\pi}{4}\right) = \pi$. Signal je paran zato što predstavlja zbir kosinusnih funkcija koje su parne.
b) Signal predstavlja zbir parne i neparne funkcije, pa zato nije ni paran ni neparan. Osnovna perioda je $T = 2\pi$.
c) Pošto je

$$\cos^2(3t) + \cos^2(t) - \cos(4t)\,\cos(2t) = \frac{1+\cos(6t)}{2} + \frac{1+\cos(2t)}{2} - \frac{1}{2}\,(\cos(6t) + \cos(2t)) = 1,$$

sleduje da je $x(t) = 1 + \cos(t\,\sqrt{2})$, pa je osnovna period $T = \pi\sqrt{2}$. Signal je paran zato što je zbir parne funkcije i konstante.
d) $x(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}\,\cos(t) = \dfrac{1}{4}\,(\cos(t) - \cos(3t))$
Signal je paran, periodičan sa osnovnom periodom $T = 2\pi$.
e) $x(t) = \dfrac{(2\,\sin(t)\,\cos(t))^2}{4}\,\cos(t) = \dfrac{1}{4}\,\sin^2(2t)\,\cos(t) = \dfrac{1-\cos(4t)}{8}\,\cos(t) =$
$= \dfrac{\cos(t)}{8} - \dfrac{\cos(3t)+\cos(5t)}{16}$
Signal je paran, periodičan sa osnovnom periodom $T = 2\pi$.
f) $x(t) = -\sin(3t)$
Signal je neparan, periodičan sa osnovnom periodom $T = \frac{2\pi}{3}$.

Zadatak 1.27.

Ispitati parnost i periodičnost sledećih signala. U slučaju periodičnosti, naći osnovnu periodu.
a) $x(t) = \sin(t^2)$,
b) $x(t) = \sin^2(t-1)$,
c) $x(t) = \cos(2t)\,\cos(6t)$,
d) $x(t) = \cos(t)\,\cos(t\sqrt{3})$,
e) $x(t) = \cos\left(\frac{1}{t}\right)$,
f) $x(t) = \sin|t|$,
g) $x(t) = \arcsin(\sin(t))$,
h) $x(t) = t^2 - \cos(t)$,
i) $x(t) = \dfrac{1+\sin(t)}{\sin(t)}$,
j) $x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\pi t - 1)}$,
k) $x(t) = \mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,10t}$,
l) $x(t) = 2\,\cos(10t+1) - \sin(4t-1)$.

Rešenje:

a) Signal je paran jer važi $x(-t) = \sin((-t)^2) = \sin(t^2) = x(t)$.

Pretpostavimo da je T osnovni period signala $x(t)$. Tada važi: $\sin(t+T)^2 = \sin(t^2)$. Za $t = 0$ važi da je $\sin(T^2) = 0$. Iz toga sleduje da postoji $k \in \mathbb{N}$, takvo da je $T^2 = k\pi$, odnosno $T = \sqrt{k\pi}$.
Ako je t u intervalu $0 < t < \sqrt{\pi}$, tada je $x(t) > 0$. Na granici intervala $t = \sqrt{\pi}$ je $x(t) = 0$, a pošto je T osnovna perioda, važi da je $x(t) > 0$ i za $\sqrt{k\pi} < t < \sqrt{k\pi} + \sqrt{\pi}$ i $x(t) = 0$ za $t = \sqrt{k\pi} + \sqrt{\pi}$. Pošto signal $x(t)$ ima prolaske kroz nulu samo u trenucima $\sqrt{n\pi}, n \in \mathbb{N}$, to znači da je prvi sledeći prolazak kroz nulu posle $t_{0_k} = \sqrt{k\pi}$ trenutak $t_{0_{k+1}} = \sqrt{(k+1)\,\pi}$. Kako je i $\sqrt{\pi} + \sqrt{k\pi}$ prvi prolazak kroz nulu nakon t_{0_k}. To znači da je $\sqrt{\pi} + \sqrt{k\pi} = \sqrt{(k+1)\,\pi}$, odnosno

$$1 + \sqrt{k} = \sqrt{k+1} \quad \Rightarrow \quad 1 = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}},$$

što nije moguće ispuniti ni za jedno $k \in \mathbb{N}$. Samim tim signal nije periodičan.
b) $x(t) = \frac{1}{2}\,(1 - \cos(2t-2)) = \frac{1}{2}\,(1 - \cos(2t)\,\cos(2) - \sin(2t)\,\sin(2))$
Signal nije ni paran ni neparan zato što je zbir parne i neparne funkcije. Osnovna perioda signala je π.
c) Signal je proizvod dva parna signala, pa je zato paran. Osnovna perioda je $\frac{\pi}{2}$ jer je:

$$x(t) = \cos(2t)\,\cos(6t) = \frac{1}{2}\,(\cos(4t) + \cos(8t)).$$

d) Signal je paran jer je proizvod dva parna signala. Nije periodičan zato što ne postoji racionalni broj koji je najveći zajednički delilac brojeva $1 + \sqrt{3}$ i $1 - \sqrt{3}$.
e) Signal je paran. Signal nije periodičan. Naime, ako je $\frac{1}{T} = k\pi$, onda je $\frac{1}{mT} = n\pi$, za $k, m, n \in \mathbb{Z}$. Odnosno važi $\frac{k\pi}{m} = n\pi$, što ne važi u opštem slučaju.
f) Signal je paran.
Za $t < T$ važi $x(t+T) = \sin(t+T) = \sin(t)$, $x(t-T) = \sin(T-t) = \sin(-t) = -\sin(t)$. Prema tome je $x(t+T) \neq x(t-T)$ za $T > 0$, što znači da signal nije periodičan.
g) Signal je neparan jer je za $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ $x(t) = t$. Periodičan je sa periodom 2π jer je: $x(t+2\pi) = \arcsin(\sin(t+2\pi)) = \arcsin(\sin(t)) = x(t)$.
h) Signal je paran jer je zbir dva parna signala. Nije periodičan zato što je zbir aperiodičnog signala $x_1(t) = t^2$ i periodičnog $x_2(t) = -\cos(t)$.
i) Signal nije ni paran ni neparan, a periodičan je sa periodom 2π.
j) Signal nije ni paran ni neparan, a periodičan je sa periodom $T = 2$.
k) Signal nije ni paran ni neparan. Perioda signala je $T = \frac{\pi}{5}$.
l) Signal predstavlja zbir parnog i neparnog signala, pa nije ni paran ni neparan. Perioda prve kosinusne komponente je $T_1 = \frac{\pi}{5}$, a druge $T_2 = \frac{\pi}{2}$. Kako je $\frac{T_2}{T_1} = \frac{5}{2} \in \mathbb{Q}$, može se odrediti da je $T = \pi$.

Zadatak 1.28.

Ispitati periodičnost signala i naći osnovni period u slučaju da su periodični:
a) $x(t) = \ln(2 + \cos(t))$,
b) $x(t) = \sin(\ln(2 + \sin(t)))$,
c) $x(t) = \sqrt{2 + \cos(t)}$,
d) $x(t) = \ln(2 + \sin(t\sqrt{2}))$,
e) $x(t) = \ln\sqrt{\sin(t) + 2}$.

Rešenje:

a), **b)**, **c)**, **e)** Signali su periodični sa periodom 2π.
d) Signal je periodičan sa periodom $\pi\sqrt{2}$.

Zadatak 1.29.

Ako je za signal $x(t)$ ispunjeno $x(t) = \frac{1+x(t+a)}{1-x(t+a)}$, gde je $a \neq 0$ konstanta, dokazati da je signal periodičan i naći osnovnu periodu.

Rešenje:

Kako je $x(t+a) = \frac{1+x(t+2a)}{1-x(t+2a)}$, onda je

$$x(t) = \frac{1+x(t+a)}{1-x(t+a)} = \frac{1+\dfrac{1+x(t+2a)}{1-x(t+2a)}}{1-\dfrac{1+x(t+2a)}{1-x(t+2a)}} = -\frac{1}{x(t+2a)}.$$

Tako je $x(t+2a) = -\frac{1}{x(t+4a)}$, pa je $x(t) = x(t+4a)$. Vidi se da je $x(t)$ periodičan sa periodom $4a$.

2.1.3 Operacije nad diskretnim signalima

Zadatak 1.30.*

Diferenca unapred diskretnog signala Δ definisana je sa $\Delta x[n] = x[n+1] - x[n]$, diferenca unazad ∇ definisana je sa $\nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$, operator kašnjenja D je $Dx[n] = x[n-1]$, a operator predikcije $E = D^{-1}$ sa $Ex[n] = x[n+1]$.
Dokazati sledeća tvrđenja:
a) Navedeni operatori su linearni operatori.
b) Sistemi definisani sa $y[n] = \Delta x[n]$, $y[n] = \nabla x[n]$, $y[n] = Dx[n]$ i $y[n] = Ex[n]$ su linearni sistemi.
c) $D\Delta = \nabla$,
d) $\Delta = E - 1$.

Rešenje:

a) Operatori su linearni ako su homogeni i aditivni. Operator diference unapred je linearan jer važi:

$$\Delta(ax_1[n] + bx_2[n]) = ax_1[n+1] - ax_1[n] + bx_2[n+1] - bx_2[n] = a\,\Delta x_1[n] + b\,\Delta x_2[n].$$

Isto se pokazuje i za ostala tri operatora da su linearni.
b) Iz linearnosti operatora sleduje linearnost sistema.
c) $(D\Delta)x[n] = D\,(\Delta x[n]) = D(x[n+1] - x[n]) = x[n] - x[n-1] = \nabla x[n]$

$$D\Delta = \nabla$$

d) Inverzni operator linearnog operatora se definiše kao $D^{-1}D = DD^{-1} = I$, gde je I neutralni operator definisan sa $Ix[n] = x[n]$ i koji je za slučaj prostora diskretnih signala na koje deluju ovi operatori identički jednak 1. Pri tome je $\Delta^0 = D^0 = \nabla^0 = I = 1$.
Na osnovu toga važi da je

$$(E-1)x[n] = Ex[n] - x[n] = x[n+1] - x[n] = \Delta x[n] \quad \Rightarrow \quad E - 1 = \Delta.$$

Zadatak 1.31.*

Dokazati sledeće teoreme o diferenci proizvoda:
a) $\Delta(x[n]\,y[n]) = x[n]\,\Delta y[n] + \Delta x[n]\,y[n+1]$,
b) $\Delta(x[n]\,y[n]) = x[n+1]\,\Delta y[n] + \Delta x[n]\,y[n]$,
c) $\Delta(x[n]\,y[n]) = x[n]\,\Delta y[n] + \Delta x[n]\,y[n] + \Delta x[n]\,\Delta y[n]$.

Rešenje:

a)

$$\Delta(x[n]\,y[n]) = x[n+1]\,y[n+1] - x[n]\,y[n] = x[n+1]\,y[n+1] - x[n]\,y[n+1] + x[n]\,y[n+1] - x[n]\,y[n]$$

$$= y[n+1]\,(x[n+1]-x[n]) + x[n]\,(y[n+1]-y[n]) = \Delta x[n]\,y[n+1] + x[n]\,\Delta y[n]$$

b)

$$\Delta(x[n]\,y[n]) = x[n+1]\,y[n+1] - x[n]\,y[n] = x[n+1]\,y[n+1] - x[n+1]\,y[n] + x[n+1]\,y[n] - x[n]\,y[n]$$

$$= x[n+1]\,(y[n+1]-y[n]) + y[n]\,(x[n+1]-x[n]) = \Delta y[n]\,x[n+1] + y[n]\,\Delta x[n]$$

c)

$$\Delta(x[n]\,y[n]) = x[n+1]\,y[n+1] - x[n]\,y[n] = x[n+1]\,y[n+1] + (x[n+1]\,y[n] - x[n+1]\,y[n])$$

$$+(x[n]\,y[n+1] - x[n]\,y[n+1]) + x[n]\,y[n] - 2\,x[n]\,y[n] = x[n+1]\,(y[n+1]-y[n]) +$$

$$+y[n]\,(x[n+1]-x[n]) + x[n]\,(y[n+1]-y[n]) - x[n]\,(y[n+1]-y[n]) =$$

$$= x[n+1]\,\Delta y[n] + y[n]\,\Delta x[n] + x[n]\,\Delta y[n] - x[n]\,\Delta y[n] =$$

$$= \Delta x[n]\,\Delta y[n] + y[n]\,\Delta x[n] + x[n]\,\Delta y[n]$$

Zadatak 1.32.

Dokazati sledeće tablične diference:
a) $\Delta n = 1$,
b) $\Delta n^2 = 2n+1$,
c) $\Delta n^3 = 3\,n^2 + 3n + 1$,
d) $\Delta a^n = a^n\,(a-1)$,
e) $\Delta \mathrm{e}^{an} = \mathrm{e}^{an}\,(\mathrm{e}^a - 1)$,
f) $\Delta \cos(n\Omega) = -2\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)\,\sin\left(\Omega\,\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)$,
g) $\Delta \sin(n\Omega) = 2\,\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)\,\cos\left(\Omega\,\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)$.

Rešenje:

a) $\Delta n = n+1-n = 1$
b) $\Delta n^2 = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$
c) $\Delta n^3 = (n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3\,n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3\,n^2 + 3n + 1$
d) $\Delta a^n = \Delta a^{n+1} - \Delta a^n = \Delta a^n\,(a-1)$
e) $\Delta \mathrm{e}^{an} = \mathrm{e}^{a\,(n+1)} - \mathrm{e}^{an} = \mathrm{e}^{an}\,(\mathrm{e}-1)$
f) $\Delta \cos(n\Omega) = \cos((n+1)\,\Omega) - \cos(n\Omega) = -2\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)\,\sin\left(\Omega\,\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)$
g) $\Delta \sin(n\Omega) = \sin((n+1)\,\Omega) - \sin(n\Omega) = 2\,\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)\,\cos\left(\Omega\,\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)$

Zadatak 1.33.*

Ako je $\Delta^k x[n] = \Delta\,(\Delta^{k+1} x[n])$, dokazati:

a) Lajbnicovu formulu za diferencu unapred: $\Delta^k x[n] = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i}\,x[n+i]$,

b) $\Delta^k n^m = 0$, za $k > m$.

Rešenje:

a) Dokazaćemo tvrđenje matematičkom indukcijom: 1) Za $k=1$ je $\Delta^1 x[n] = -\binom{1}{0}\,x[n] + \binom{1}{1}\,x[n+1] =$

$x[n+1]-x[n]=\Delta x[n]$, što je tačno. 2) Pretpostavimo da važi $\Delta^k x[n]=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}x[n+i]$.
3)Treba da se dokaže da tvrđenje važi i za $k+1$.

$$\Delta^{k+1}x[n]=\Delta(\Delta^k x[n])=\Delta\left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}x[n+i]\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}(x[n+1+i]-x[n+i])=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}x[n+1+i]-\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}x[n+i]=$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{k-(i-1)}\binom{k}{i-1}x[n+i]-\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}x[n+i]=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k+1-i}\binom{k}{i-1}x[n+i]+(-1)^0\binom{k}{k}x[n+k+1]-\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}x[n+i]-(-1)^k\binom{k}{0}x[n]$$

Kako je $-(-1)^k\binom{k}{0}x[n]=(-1)^{k+1}\binom{k+1}{0}x[n]$ i $(-1)^0\binom{k}{k}x[n+k+1]=(-1)^0\binom{k+1}{k+1}x[n+k+1]$, važi:

$$\sum_{i=1}^{k}\left((-1)^{k+1-i}\left(\binom{k}{i-1}+\binom{k}{i}\right)\right)x[n+i]+(-1)^{k+1}\binom{k+1}{0}x[n]+(-1)^0\binom{k+1}{k+1}x[n+k+1]=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left((-1)^{k+1-i}\binom{k+1}{i}\right)x[n+i]+(-1)^{k+1}\binom{k+1}{0}x[n]+(-1)^0\binom{k+1}{k+1}x[n+k+1]=$$

$$=\sum_{i=0}^{k+1}\left((-1)^{k+1-i}\binom{k+1}{i}\right)x[n+i].$$

Dobija se da je $\Delta^{k+1}x[n]=\sum_{i=0}^{k+1}\left((-1)^{k+1-i}\binom{k+1}{i}\right)x[n+i]$. Matematičkom indukcijom se pokazuje da važi tvrđenje.

Napomena: Kako je $\Delta^k=(E-1)^k$, primenom binomnog razvoja se dobija isti rezultat.

b) Ako se primeni jedna diferenca unapred, dobija se

$$\Delta^k n^m=\Delta^{k-1}(\Delta n^m)=\Delta^{k-1}((n+1)^m-n^m)=\Delta^{k-1}\left(\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}n^{m-i}-n^m\right)=$$

$$=\Delta^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}n^{m-i}\right).$$

Vidi se da je n^m redukovano na polinom po n reda $m-1$. Ako se primeni nova diferenca, dobija se polinom reda $m-2$. Može se zaključiti da sukcesivna primena jedne diference smanjuje red polinoma za jedan. Ako se primeni ukupno m diferenci, dobiće se polinom reda nula, a to je zapravo neka konstanta C. Pošto je $k>m$, važi da je

$$\Delta^k n^m=\Delta^{k-m}C=0.$$

Zadatak 1.34.*

Ako su P i Q polinomi, a $y[n]=a^n\,x[n]$, dokazati:

a) $D^k y[n]=a^n\left(\frac{D}{a}\right)^k x[n]$,

b) $P(D)\,y[n]=a^n\,P\left(\frac{D}{a}\right)x[n]$,

c) $\frac{P(D)}{Q(D)}y[n]=a^n\,\frac{P(D/a)}{Q(D/a)}x[n]$,

d) $\frac{P(E)}{Q(E)}y[n] = a^n\, \frac{P(aE)}{Q(aE)}x[n]$,
e) $\frac{P(\Delta)}{Q(\Delta)}y[n] = a^n\, \frac{P(a\Delta)}{Q(a\Delta)}x[n]$.

Rešenje:

a) $D^k y[n] = y[n-k] = a^{n-k}\, x[n-k] = a^{n-k}\,(D^k x[n]) = a^n\, \left(\frac{D}{a}\right)^k x[n]$
b) Direktno proizilazi iz a) na osnovu linearnosti operatora.
c) Treba dokazati da je $\frac{P(D)}{Q(D)}y[n] = a^n\, \frac{P(D/a)}{Q(D/a)}x[n]$. Ako se obe strane pomnože sa $Q(D)$, dobija se

$$P(D)y[n] = Q(D)\, a^n\, \frac{P(D/a)}{Q(D/a)}x[n].$$

Na osnovu tačke b) sledije da je:

$$P(D)y[n] = a^n P(D/a)x[n] = a^n\, Q(D/a)\, \frac{P(D/a)}{Q(D/a)}x[n] = Q(D)\, a^n\, \frac{P(D/a)}{Q(D/a)}x[n],$$

što je i trebalo dokazati.
d) Pošto je $E^k y[n] = a^{n+k}x[n+k] = y^{n+k}\,(E^k x[n]) = a^n\,(aE)^k x[n]$, analogno postupcima iz b) i c) sleduje tvrđenje.
e) Pošto je $\Delta = E - 1$, na osnovu d) sleduje tvrđenje.

Zadatak 1.35.

Inverzna operacija diferenci je akumulacija (sumacija) i formalno se može označiti sa $\sum$ ili Δ^{-1}. Koristeći teoreme o sumaciji iz dodatka glave izračunati konačne sume:

a) $x[n] = \sum_{m=1}^{n} \cos(m\Omega)$,

b) $x[n] = \sum_{m=1}^{n} m\, 2^m$,

c) $x[n] = \sum_{m=1}^{n} m\, \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)$,

d) $x[n] = \sum_{m=0}^{n} m^2$,

e) $x[n] = \sum_{m=0}^{n} m^3$,

f) $x[n] = \sum_{m=1}^{n} \cos^2(m\Omega)$,

g) $x[n] = \sum_{m=1}^{n} \sin^2(m\Omega)$.

Rešenje:

a) Na osnovu teorema 6) i 7) je:

$$x[n] = \left.\frac{\sin\left(\Omega\, \left(m - \frac{1}{2}\right)\right)}{2\, \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}\right|_1^{n+1} = \frac{\sin\left(\Omega\, \left(n + \frac{1}{2}\right)\right) - \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{2\, \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{n\Omega}{2}\right)\, \cos\left(\frac{(n+1)\,\Omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}.$$

b) Primenjujući parcijalnu akumulaciju uzimajući da je $f[m] = m$ i $\Delta g[m] = 2^m$, računa se: $\Delta f[m] = 1$ i $g[m] = \sum 2^m = \frac{2^m}{2-1} = 2^m$ i dobija se:

$$x[n] = m\, 2^m\big|_1^{n+1} - \sum_{m=1}^{n} 2^{m+1} = \left.\left(m\, 2^m - \frac{2^{m+1}}{2-1}\right)\right|_1^{n+1} = \left(m\, 2^m - 2^{m+1}\right)\big|_1^{n+1} = 2^{n+1}\,(n-1) + 2.$$

c) Neka je $\Omega = \frac{\pi}{2}$, $f[m] = m$ i $\Delta g[m] = \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)$. Tada je $\Delta f[m] = 1$ i $g[m] = \sum \sin(m\Omega) = -\dfrac{\cos\left(\Omega\,\left(m-\frac{1}{2}\right)\right)}{2\,\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$. Na osnovu toga je:

$$x[n] = \left(-m\,\frac{\cos\left(\Omega\,\left(m-\frac{1}{2}\right)\right)}{2\,\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}\right)\Bigg|_1^{n+1} + \sum_{m=1}^{n} \frac{\cos\left(\Omega\,\left(m+\frac{1}{2}\right)\right)}{2\,\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} = \left(-m\,\frac{\cos\left(\Omega\,\left(m-\frac{1}{2}\right)\right)}{2\,\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} + \frac{\sin(m\Omega)}{4\,\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)}\right)\Bigg|_1^{n+1}$$

$$= -(n+1)\,\frac{\cos\left(\Omega\,\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{2\,\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} + \frac{\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{2\,\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} + \frac{\sin((n+1)\,\Omega) - \sin(\Omega)}{4\,\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)}.$$

Kako je $\sin(\Omega) = 1$, $\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) = \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\sin((n+1)\,\Omega) = \cos(n\Omega)$, dobija se:

$$x[n] = -(n+1)\,\frac{\cos(n\Omega)\,\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) - \sin(n\Omega)\,\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{2\,\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} + \frac{1}{2} + \frac{\cos(n\Omega) - 1}{2},$$

$$x[n] = -(n+1)\,\frac{\cos(n\Omega) - \sin(n\Omega)}{2} + \frac{\cos(n\Omega)}{2} = \frac{1}{2}\,\left((n+1)\,\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - n\,\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).$$

d) Na osnovu tablice osnovnih diferenci je $2\,\Delta n^3 = 2\,(3n^2+3n+1) = 6n^2+6n+2 = 6n^2+3\,(2n+1)-1 = 6n^2 + 3\,\Delta n^2 - 1$. Primenjujući na levu i desnu stranu sumiranje, dobija se:

$$\sum_{j=0}^{m-1} 2\,\Delta j^3 = \sum_{j=0}^{m-1} (6j^2 + 3\,\Delta j^2 - 1),$$

što daje

$$2\,m^3 = 6\,\sum_{j=0}^{m-1} j^2 + 3\,m^2 - m.$$

Odavde je $\sum_{j=0}^{m-1} j^2 = \frac{2m^3-3m^2+m}{6} = \frac{(2m-1)\,m\,(m-1)}{6} = x[m-1]$. Odnosno

$$x[n] = \sum_{m=0}^{n} m^2 = \frac{(2n+1)\,(n+1)\,n}{6}.$$

e) Kao u prethodnom zadatku je $\Delta n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$, pa je:

$$\sum_{j=0}^{m-1} \Delta j^4 = 4\sum_{j=0}^{m-1} j^3 + 6\,\frac{2m^3 - 3m^2 + m}{6} + 2\sum_{j=0}^{m-1}(2j+1) - \sum_{j=0}^{m-1} 1,$$

$$m^4 = 4\sum_{j=0}^{m-1} j^3 + 2m^3 - 3m^2 + m + 2m^2 - m = 4\sum_{j=0}^{m-1} j^3 + 2m^3 - m^2,$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} j^3 = \frac{m^4 - 2m^3 + m^2}{4},$$

$$4\sum_{j=0}^{n} m^3 = \frac{n^4 - 2n^3 + n^2 + 4n^3}{4} = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}.$$

f)

$$\sum_{m=1}^{n} \cos^2(m\Omega) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1 + \cos(2m\Omega)}{2} = \frac{1}{2}\,\left(m + \frac{\sin\left(2\Omega\,\left(m-\frac{1}{2}\right)\right)}{2\,\sin(\Omega)}\right)\Bigg|_1^{n+1} = \frac{n}{2} + \frac{\sin(n\Omega)\,\cos((n+1)\,\Omega)}{2\,\sin(\Omega)}$$

g)

$$\sum_{m=1}^{n} \sin^2(m\Omega) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1 - \cos(2m\Omega)}{2} = \frac{1}{2}\,\left(m - \frac{\sin\left(2\Omega\,\left(m-\frac{1}{2}\right)\right)}{2\,\sin(\Omega)}\right)\Bigg|_1^{n+1} = \frac{n}{2} - \frac{\sin(n\Omega)\,\cos((n+1)\,\Omega)}{2\,\sin(\Omega)}$$

2.1.4 Snaga i energija signala

Zadatak 1.36.*

Srednja vrednost signala $x(t)$ se definiše kao:

$$A_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} x(t)\,dt.$$

Ako je $x_e(t)$ parni deo signala, a $x_o(t)$ neparni deo, dokazati da je:

a) $\lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} x_o(t)\,dt = 0,$

b) $\lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} x_e(t)\,dt = A_x.$

Rešenje:

a) $\int\limits_{-T}^{T} x_o(t)\,dt = \int\limits_{-T}^{0} x_o(t)\,dt + \int\limits_{0}^{T} x_o(t)\,dt = \int\limits_{0}^{T} x_o(-t)\,dt + \int\limits_{0}^{T} x_o(t)\,dt = 0$

b) $A_x = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} x(t)\,dt = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} (x_e(t) + x_o(t))\,dt = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} x_e(t)\,dt$

Zadatak 1.37.

Odrediti energiju sledećih signala:
a) $x(t) = 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{4}\right)$,
b) $x(t) = A\,(\mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-10))$,
c) $x(t) = \sin(2\pi\,t)\,\mathrm{rect}(t)$,
d) $x(t) = \cos(4\pi\,t)\,\mathrm{rect}(t)$,
e) $x[n] = A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,n\Omega}\,\mathrm{rect}_{N_w}[n]$,
f) $x[n] = A\,\delta[n]$,
g) $x(t) = \mathrm{tri}\left(\frac{t}{4}\right)$,
h) $x[n] = (0.5\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})^n\,\mathrm{u}[n]$,
i) $x[n] = \mathrm{ramp}[n]\,\mathrm{rect}_5[n-7]$,
j) $x[n] = \mathrm{ramp}[n] - 2\,\mathrm{ramp}[n-4] + \mathrm{ramp}[n-8]$,
k) $x[n] = \mathrm{ramp}[n]$,
l) $x[n] = \sqrt{\mathrm{ramp}[n]}\,\mathrm{rect}_6[n-10]$,
m) $x[n] = \sqrt{\mathrm{ramp}^3[n]}\,\mathrm{rect}_5[n-8]$.

Rešenje:

a) $E = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = 4 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}^2\left(\dfrac{t}{4}\right) = 4 \int\limits_{-2}^{2} dt = 16$

b) $E = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A^2\,(\mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-10))^2\,dt = \int\limits_{0}^{10} A^2\,dt = 10\,A^2$

c) $E = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin^2(2\pi t)\,\mathrm{rect}^2(t)\,dt = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \sin^2(2\pi t) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \dfrac{1-\cos(4\pi t)}{2}\,dt$ Kako se kosinus integrali po celom broju perioda, njegov integral je nula, tako da je energija jednaka:

$$E = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{2}\,dt - \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\cos(4\pi t)}{2}\,dt}_{0} = \frac{1}{2}.$$

d) $E = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2(4\pi t)\,\mathrm{rect}^2(t)\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1+\cos(8\pi t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}$

e) Pošto je signal kompleksan, računa se suma kvadrata modula.

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,n\Omega}\right|^2 \mathrm{rect}_{N_w}[n] = \sum_{n=-N_w}^{N_w} A^2 \underbrace{\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,n\Omega}\right|^2}_{1} = (2\,N_w + 1)\,A^2$$

f) $E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A^2\,\delta^2[n] = A^2$

g) $E = \int_{-\infty}^{+\infty} 9\,\mathrm{tri}^2\left(\frac{t}{4}\right)\,dt = 36 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}^2\left(\frac{t}{4}\right)\,d\left(\frac{t}{4}\right) = 36 \int_{-1}^{1} \mathrm{tri}^2\left(\frac{t}{4}\right)\,d\left(\frac{t}{4}\right) =$

$= 72 \int_{0}^{1} \mathrm{tri}^2(\tau)\,d\tau$

Kako je $\mathrm{tri}(\tau) = (1-\tau)\,(\mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-1))$ i posle smene promenljivih $\lambda = 1 - \tau$, važi da je:

$$E = 72 \int_{0}^{1} (1-\tau)^2\,d\tau = -72 \int_{1}^{0} \lambda^2\,d\lambda = 24.$$

h) $E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega}\right)^n \mathrm{u}[n]\right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \underbrace{\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\Omega}\right|^{2n}}_{1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

i) Kako je $\mathrm{ramp}[n] = n\,\mathrm{u}[n]$, $\mathrm{rect}_5[n] = \mathrm{u}[n+5] - \mathrm{u}[n-6]$ i $\mathrm{rect}_5[n-7] = \mathrm{u}[n-2] - \mathrm{u}[n-13]$, važi:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n\,(\mathrm{u}[n-2] - \mathrm{u}[n-13]))^2 = \sum_{2}^{12} n^2 = -1 + \sum_{0}^{12} n^2 = 649.$$

j) Kako je

$$x[n] = \begin{cases} n & n \in [0,4] \\ -n+8 & n \in [4,8] \\ 0 & \text{ostalo} \end{cases}$$

važi:

$$E = \sum_{n=0}^{4} n^2 + \sum_{n=4}^{8} (n^2 - 16n + 64) = \sum_{n=0}^{8} n^2 - 8 \sum_{n=4}^{8} (2n+1) + \sum_{n=4}^{8} 72 =$$

$$= \left.\frac{(2m+1)\,(m+1)\,m}{6}\right|_0^9 - 8\ \left.n^2\right|_4^9 + \left.72\right|_4^9 = 44.$$

k) $E = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 = +\infty$

l) $E = \sum\limits_{n=4}^{16} n = \left(\dfrac{n\,(n-1)}{2}\right)\Bigg|_{4}^{17} = 130$

m) $E = \sum\limits_{n=3}^{13} n^3 = \left(\dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4}\right)\Bigg|_{3}^{14} = 8272$

Zadatak 1.38.

Odrediti snagu sledećih signala:
a) $x(t) = A$,
b) $x(t) = \mathrm{u}(t)$,
c) $x(t) = A \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(t-2n)$,
d) $x(t) = A\,\cos(2\omega_0\,t+\theta)$,
e) $x[n] = A \sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}_2[n-8m]$,
f) $x[n] = A$,
g) $x[n] = \mathrm{u}[n]$,
h) $x(t) = 2A\left(-\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(t-2n)\right)$,
i) $x[n] = \mathrm{ramp}[n]$.

Rešenje:

a) $P = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\; dt = A^2 \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = A^2$

b) $P = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{u}^2(t)\,dt = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \int\limits_{0}^{\frac{T}{2}} dt = \dfrac{1}{2}$

c) U pitanju je periodičan signal sa periodom $T = 2$.

$$P = \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\; dt = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \left(A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(t-2n)\right)^2 dt$$

Kako je $\mathrm{rect}(t-2n)\,\mathrm{rect}(t-2m) = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \mathrm{rect}(t-2n), & n = m \end{cases}$ dobija se:

$$P = \frac{A^2}{2} \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{rect}(t)\,dt = \frac{A^2}{2} \int\limits_{-1/2}^{1/2} dt = \frac{A^2}{2}.$$

d) Snaga prostoperiodičnog signala je $P = \frac{A^2}{2}$. Ako je A napon ili struja, smatra se da se snaga razvija na jediničnom otporniku.
e) Osnovna perioda je $N = 8$ i u toj periodi ima 5 odbiraka amplitude A (nacrtati sliku), tako da je snaga $P = \frac{5\,A^2}{8}$.

f) $P = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{2N+1} \sum\limits_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{2N+1} \sum\limits_{n=-N}^{N} A^2 = A^2 \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{2N+1}{2N+1} = A^2$

g) $P = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{2N+1} \sum\limits_{n=-N}^{N} |\mathrm{u}[n]|^2 = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{2N+1} \sum\limits_{n=0}^{N} 1 = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{N+1}{2N+1} = \dfrac{1}{2}$

h) Kao pod c) osnovna perioda je $T = 2$ i unutar te periode je signal definisan sa:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |t| < \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \leq |t| \leq 1. \end{cases}$$

Posle kvadriranja signal $x^2(t) = \frac{1}{4}$ na celom opsegu definisanosti, tako da se dobija:

$$P = \frac{(2A)^2}{2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{4}\, dt = A^2.$$

i) $P = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{2N+1} \sum\limits_{n=-N}^{N} |n\, \mathrm{u}[n]|^2 = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{2N+1} \sum\limits_{n=0}^{N} n^2 = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{N\,(N+1)\,(2N+1)}{6\,(2N+1)} \to +\infty$

2.2 Dodaci

Ako je C neodređena konstanta važe sledeće teoreme o sumaciji:

1. $\sum \Delta x[n] = x[n]$
2. $\sum a^n = C + \dfrac{a^n}{a-1}, \quad a \neq 1$
3. $\sum \mathrm{e}^{an} = C + \dfrac{\mathrm{e}^{an}}{\mathrm{e}^a - 1}, \quad a \neq 0$
4. $\sum n = C + \dfrac{n\,(n-1)}{2}$
5. $\sum \sin(n\Omega) = C - \dfrac{\cos\left(\Omega\,\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)}{2\,\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$
6. $\sum \cos(n\Omega) = C + \dfrac{\sin\left(\Omega\,\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)}{2\,\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$
7. Njutn-Lajbnicova formula: Ako je $X[n] + C = \sum x[n]$, tada je:
$$\sum_{m=a}^{a+n-1} x[n] = X[m]|_a^{n+a} = X[n+a] - X[a].$$
8. Ako je $X[n] = \sum x[n]$, tada je $\sum a\,x[n+\alpha] = a\,X[n+\alpha]$, gde $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.
9. Parcijalna akumulacija:
$$\sum f[n]\,\Delta g[n] = f[n]\,g[n] - \sum \Delta f[n]\,g[n+1],$$
odnosno:
$$\sum_{m=1}^{n} f[m]\,\Delta g[m] = f[m]\,g[m]|_1^{n+1} - \sum_{m=1}^{n} \Delta f[m]\,g[m+1]$$

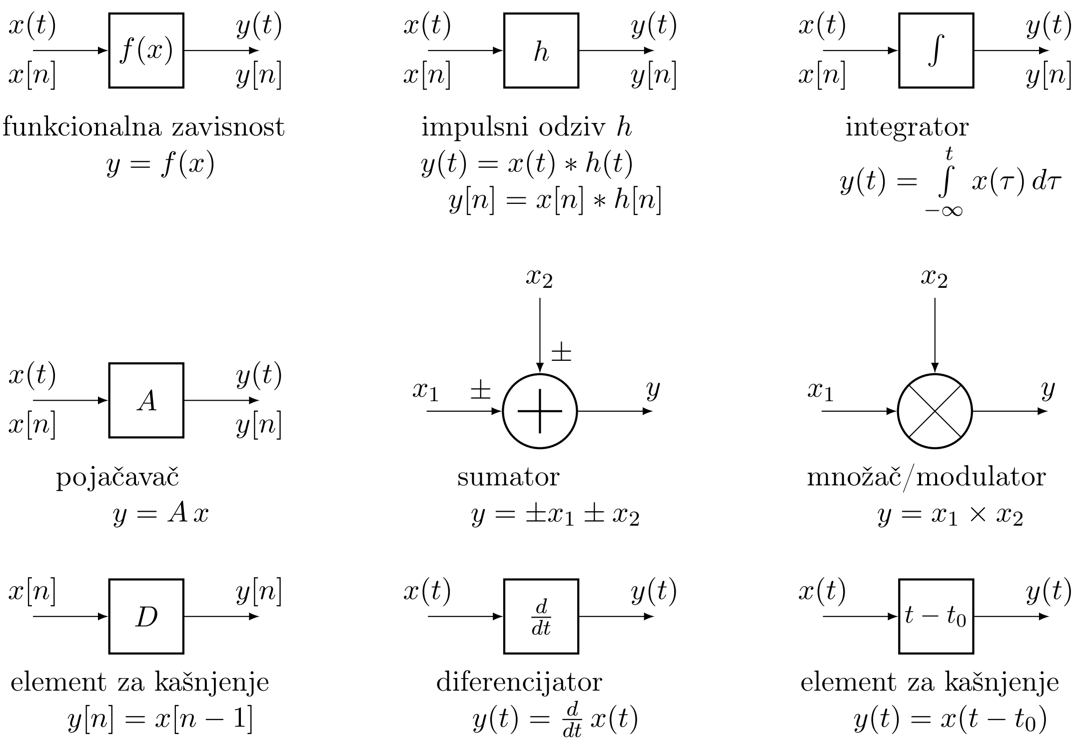
Glava 3

Opis i analiza kontinualnih i diskretnih sistema

3.1 Zadaci

Zadatak 2.1.

Radi lakše analize sistemi se modeluju blok dijagramima. Osnovni gradivni blok dijagrami su prikazani na slici 2.1.1.



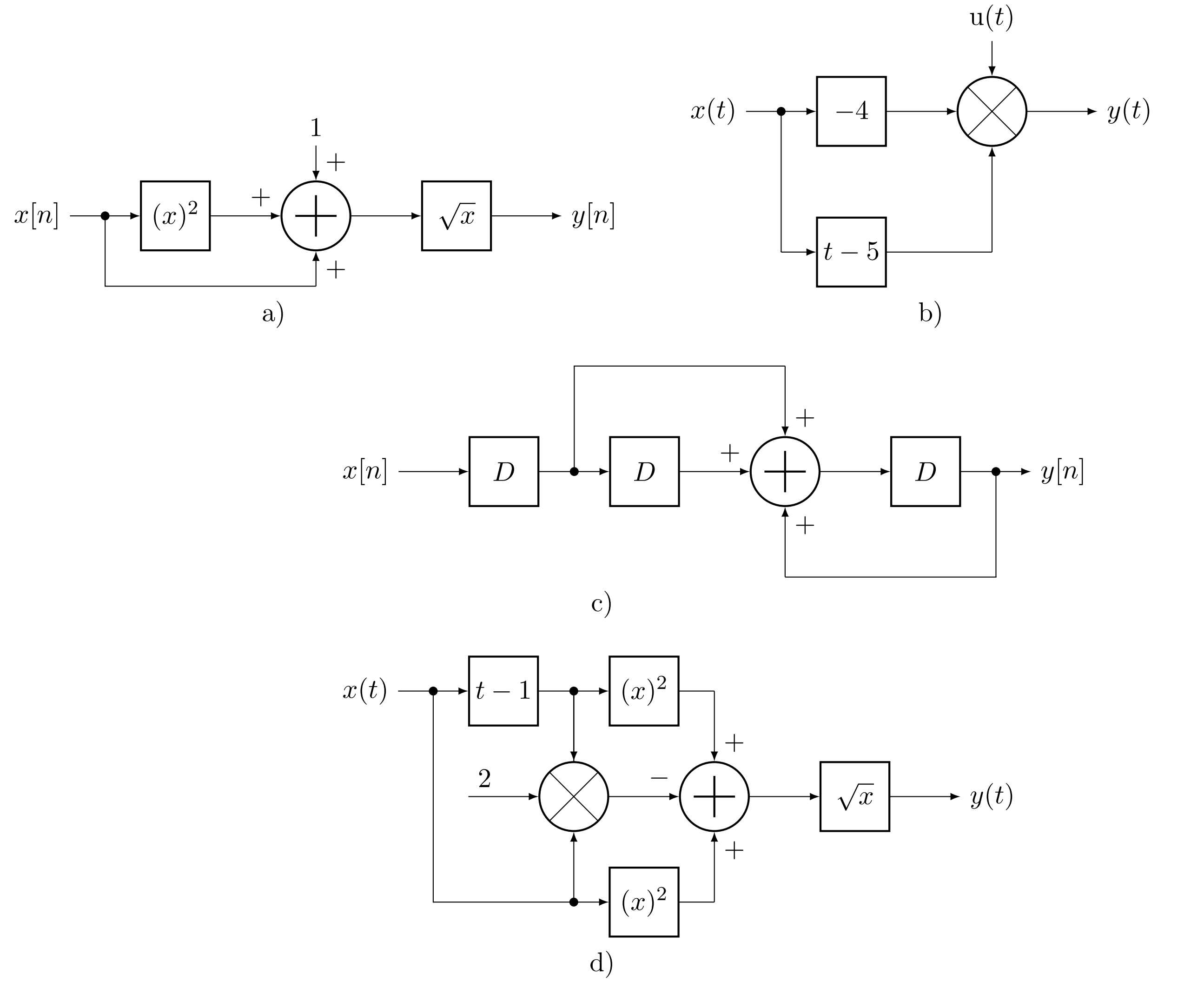
Slika 2.1.1.

Koristeći osnovne blokove naći funkcionalnu zavisnost kojom se opisuju sistemi sa slike 2.1.2.

Rešenje:

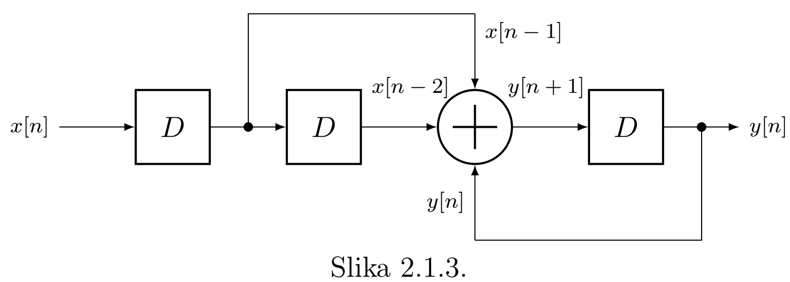
a) $y[n] = \sqrt{1 + x[n] + x^2[n]}$
b) $y(t) = -4\, x(t)\, x(t-5)\, \mathrm{u}(t)$
c) Na slici 2.1.3 su dati detalji za lakše razumevanje funkcionalne zavisnosti.

$$y[n+1] = y[n] + x[n-1] + x[n-2]$$



Slika 2.1.2.

$$y[n] = y[n-1] + x[n-2] + x[n-3]$$



Slika 2.1.3.

d) $y(t) = \sqrt{x^2(t-1) - 2\,x(t)\,x(t-1) + x^2(t)}$

$$y(t) = |x(t) - x(t-1)|$$

Zadatak 2.2.*

Neka je $y[n] = x[n] * h[n]$. Dokazati sledeće teoreme:
a) Ako je $x[n]$ parno i $h[n]$ parno, tada je i $y[n]$ parno.
b) Ako je $x[n]$ parno i $h[n]$ neparno, tada je $y[n]$ neparno.
c) Ako je $x[n]$ neparno i $h[n]$ neparno, tada je $y[n]$ parno.
d) Ako je $x[n]$ periodično sa periodom N, tada je i $y[n]$ periodično sa istom periodom.
e) Ponoviti sve tačke za slučaj konvolucije kontinualnih signala.

Rešenje:

a) Kako su $x[n]$ i $h[n]$ parni signali, važi da je $x[m] = x[-m]$ i $h[n-m] = h[-n+m]$. Prema tome važi:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, h[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[-m]\, h[-n+m].$$

Ako se uvede smena $k = -m$, dobija se:

$$y[n] = \sum_{-k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[-(n+k)] = \sum_{k=\infty}^{-\infty} x[k]\, h[-n-k].$$

Promenom redosleda sumiranja se dobija:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[-n-k] = y[-n],$$

što je i trebalo dokazati.

b) $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, h[n-m] = -\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[-m]\, h[-n+m] = -\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, h[-n-m] = -y[-n]$

c) Na isti način kao a) i b).

d) $y[n+N] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]\, x[n+N-m] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]\, x[n-m] = y[n]$

Zadatak 2.3.*

Ako je $y[n] = x[n] * h[n]$, dokazati sledeće osobine konvolucije:
a) $y[-n] = x[-n] * h[-n]$,
b) $y[n-a-b] = x[n-a] * h[n-b]$,
c) $x[n] * (h[n] + g[n]) = x[n] * h[n] + x[n] * g[n]$,
d) Ponoviti prethodne tačke za slučaj kontinualne konvolucije.

Rešenje:

a) Sledi na osnovu zadatka 2.2.

b) $x[n-a] * h[n-b] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m-a]\, h[n-b-m] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-b-a-k] = y[n-a-b]$

c) $x[n] * (h[n] + g[n]) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, (h[n-m] + g[n-m]) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, h[n-m] +$

$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, g[n-m] = x[n] * h[n] + x[n] * g[n]$

d) Isto kao u tačkama a), b) i c).

3.1.1 Osobine sistema

Zadatak 2.4.

Diskretan sistem je stabilan u BIBO smislu (*bounded-input bounded-output*) ako i samo ako svaka ograničena pobuda prouzrokuje ograničen odziv. Pobuda $x[n]$ je ograničena ako postoji konačna pozitivna konstanta B_X takva da važi $\forall n, n \in \mathbb{Z},\ |x[n]| < B_X < +\infty$. Ako za takvu pobudu postoji konačna pozitivna konstanta B_Y da važi $\forall n, n \in \mathbb{Z},\ |y[n]| < B_Y < +\infty$, gde je $y[n]$ odziv sistema, sistem je BIBO stabilan. Ekvivalentna definicija važi za kontinualne sisteme.

Odrediti stabilnost sledećih sistema:

a) $y[n] = x[n-k]$,
b) $y[n] = x[Mn]$,
c) $y[n] = x^2[n]$,
d) $y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum\limits_{k=-M}^{M} x[k]$,
e) $y[n] = \sum\limits_{k=0}^{n} x[k]$,
f) $y(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$,
g) $y(t) = \int\limits_{-t}^{t} x(\tau)\, d\tau$,
h) $y(t) = \int\limits_{-\infty}^{10t} x(\tau)\, \delta(\tau - t)\, d\tau$,
i) $y(t) = \frac{1}{t} \int\limits_{-t}^{t} x(\tau)\, d\tau$.

Rešenje:

a) Ako je $x[n]$ ograničeno $\forall n, n \in \mathbb{Z}$, biće ograničeno i za $n-k$, pa je i $y[n]$ ograničeno stabilan. Samim tim je i sistem BIBO stabilan.
b) Odziv se dobija decimacijom pobudnog signala. Ako su svi odbirci pobude ograničeni, sigurno će biti i odbirci odziva zato što predstavljaju „proređene" odbirke pobude.
c) Ako je ispunjeno da je $\forall n, |x[n]| < B_X < +\infty$, ispunjeno je i da je $\forall n, |x^2[n]| < B_X^2 < +\infty$, odnosno važi da je $\forall n, |y[n]| < B_X^2 < +\infty$, pa je sistem BIBO stabilan.
d) Ako je $\forall n, |x[n]| < B_X < +\infty$, onda je

$$|y[n]| = \left| \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} x[n] \right| \le \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} |x[n]| < \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} B_X = B_X.$$

Znači da važi $\forall n, |y[n]| < B_X < +\infty$, pa je sistem BIBO stabilan.
e) Ako je $\forall n, |x[n]| < B_X < +\infty$, onda

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=0}^{n} x[n] \right| \le \sum_{k=0}^{n} |x[n]| < \sum_{k=0}^{n} B_X = (n+1)\, B_X.$$

Sistem nije BIBO stabilan jer ako $n \to \infty$, važi i $y[n] \to \infty$.
f) Sistem je stabilan jer samo obavlja ekspanziju vremenske ose, a amplituda izlaza je ista kao i amplituda ulaza.
g) Ako je $\forall t, |x(t)| < B_X < +\infty$, tada je

$$|y(t)| = \left| \int_{-t}^{t} x(\tau)\, d\tau \right| \le \int_{-t}^{t} |x(\tau)|\, d\tau < \int_{-t}^{t} B_X\, d\tau = 2t\, B_X.$$

Kao u prethodnoj tački sistem nije BIBO stabilan jer postoji pobuda koja je ograničena, a daje neograničeni odziv.
h) Rešavanjem integrala se dobija $y(t) = x(t)\,\mathrm{u}(t)$, što znači da je sistem stabilan.
i) Na osnovu tačke g) se dobija da je $|y(t)| < 2\,B_X$. Sistem je BIBO stabilan.

Zadatak 2.5.

Za sistem se kaže da je vremenski invarijantan (stacionaran, nezavistan) ako važi sledeći iskaz: ako je $y[n]$ odziv na pobudu $x[n]$, tada je $y_1[n] = y[n-k]$ odziv na pobudu $x_1[n] = x[n-k]$, $y[n]|_{n-k} = y[n]|_{x[n-k]}$. Ekvivalentna definicija važi za linearne sisteme: $y(t)|_{t-t_0} = y(t)|_{x(t-t_0)}$. Ispitati da li su sledeći sistemi vremenski invarijantni:
a) $y[n] = x[n] - x[n-A]$,
b) $y[n] = n\,x[n]$.

Rešenje:

a) $y_1[n] = x_1[n] - x_1[n-A] = x[n-k] - x[n-k-A] = y[n-k]$
Sistem je vremenski invarijantan.
b) $y_1[n] = n\,x_1[n] = n\,x[n-k] \neq y[n-k] = (n-k)\,x[n-k]$
Sistem nije vremenski invarijantan.

Zadatak 2.6.

Dokazati tvrđenja:
a) Neka je $y(t)$ odziv vremenski invarijantnog sistema na pobudu $x(t)$. Ako je $x(t)$ periodično sa osnovnom periodom T_0, tada je i $y(t)$ periodično sa periodom T_0 koja ne mora da bude osnovna perioda.
b) Ponoviti a) za slučaj diskretnog vremenski invarijantnog sistema i periodu N_0.
c) Neka je $y(t)$ odziv vremenski promenljivog sistema na pobudu $x(t)$. Ako je $x(t)$ periodično, tada $y(t)$ može, a ne mora da bude periodično.

Rešenje:

a) Kako je $y(t) = O\{x(t)\}$ linearan vremenski nepromenljiv sistem i važi da je $x(t+T_0) = x(t)$, to je $y(t+T_0) = O\{x(t+T_0)\} = O\{x(t)\} = y(t)$, što je i trebalo dokazati.
b) Kako je $y[n] = O\{x[n]\}$ linearan vremenski nepromenljiv sistem i važi da je $x[n+N_0] = x[n]$, to je $y[n+N_0] = O\{x[n+N_0]\} = O\{x[n]\} = y[n]$, što je i trebalo dokazati.
c) Za vremenski promenljivi sistem ne mora da važi da je $O\{x(t+T_0)\} = O\{x(t)\}$, pa samim tim zavisno od toga koja je funkcija $y(t)$ u pitanju, ona može, a i ne mora biti periodična. Primer periodične funkcije je $y(t) = x^2(t)$, a aperiodične $y(t) = t\,x(t)$.

Zadatak 2.7.

Ispitati linearnost sistema:
a) $y[n] = f(x[n]) = x^2[n]$,
b) $y[n] = f(x[n]) = x[n] - x[n-A]$.

Rešenje:

a) $f(a\,x_1[n] + b\,x_2[n]) = (a\,x_1[n] + b\,x_2[n])^2 \neq a\,x_1^2[n] + b\,x_2^2[n]$
Sistem je nelinearan.
b) $f(a\,x_1[n] + b\,x_2[n]) = (a\,x_1[n] + b\,x_2[n]) - (a\,x_1[n-A] + b\,x_2[n-A]) = a\,(x_1[n] - x_1[n-A]) + b\,(x_2[n] - x_2[n-A]) = a\,f(x_1[n]) + b\,f(x_2[n])$
Sistem je linearan.

Zadatak 2.8.

Sistem je bez memorije ako izlaz za bilo koju vrednost nezavisne promenljive zavisi samo od vrednosti pobude u istom trenutku.

Sistem je kauzalan ako njegov odziv u svakom trenutku zavisi samo od vrednosti pobude u istom tom trenutku i u prošlosti. Ako je sistem bez memorije, sigurno je kauzalan.

Za sledeće sisteme ispitati da li su stabilni, linearni vremenski invarijantni, sa ili bez memorije:
a) $y[n] = (x[n] + x[n-10])\,\mathrm{u}[n]$,
b) $y[n] = \sum\limits_{k=N}^{n} x[k]$,
c) $y[n] = \sum\limits_{k=n-N}^{n+N} x[k]$,
d) $y[n] = \mathrm{e}^{-x[n]}$,
e) $y[n] = x[-n]$,
f) $y[n] = x[2n - n_0]$,
g) $y[n] = A\,x[n] + B$,
h) $y[n] = x[n] + 3\,\mathrm{u}[n+1]$,
i) $y[n] = x[n] - x[-n]$,
j) $y(t) = A\,x(t)\,x(t-1)$,
k) $y(t) = x'(t)$,
l) $y(t) = x(t)\,\sin(t)$.

Rešenje:

a) Stabilan, linearan, kauzalan, sa memorijom. Sistem nije vremenski invarijantan jer

$$y_1[n] = (x_1[n]+x_1[n-10])\,\mathrm{u}[n] = (x[n-k]+x[n-10-k])\,\mathrm{u}[n] \neq (x[n-k]+x[n-10-k])\,\mathrm{u}[n-k] = y[n-k].$$

b) Nestabilan, linearan, kauzalan, sa memorijom. Sistem nije vremenski invarijantan jer

$$y_1[n] = \sum_{k=N}^{n} x_1[k] = x_1[n] + x_1[n-1] + \cdots + x_1[n-(n-N)] =$$

$$= x[n-m] + x[n-m-1] + \cdots + x[n-(n-N)-m] \neq \sum_{k=N}^{n-m} x[k] = y[n-m].$$

c) Stabilan, vremenski invarijantan, nekauzalan, sa memorijom.
d) Stabilan, vremenski invarijantan, kauzalan, bez memorije. Sistem nije linearan jer je

$$f(a\,x_1[n] + b\,x_2[n]) = \mathrm{e}^{-(a\,x_1[n]+b\,x_2[n])} \neq a\,f(x_1[n]) + b\,f(x_2[n]).$$

e) Stalilan, linearan, nekauzalan, sa memorijom. Sistem nije vremenski invarijantan jer ako pobuda prednjači, odziv će da zakasni, što je suprotno smislu invarijantnosti.
f) Stabilan, linearan, kauzalan, sa memorijom. Invarijantnost se proverava za $x_1[n] = x[n-k]$, i tada je

$$y_1[n] = x_1[2n-n_0] = x[2n-n_0-k] \neq x[2n-2k-n_0] = y[n-k].$$

g) Stabilan, vremenski invarijantan, nekauzalan, bez memorije. SIstem nije linearan zato što važi

$$f(a\,x_1[n]+b\,x_2[n]) = A\,(a\,x_1[n]+b\,x_2[n])+B \neq a\,f(x_1[n])+b\,f(x_2[n]) = a\,(A\,x_1[n]+B)+b\,(A\,x_2[n]+B).$$

h) Sistem je stabilan, bez memorije i nekauzalan. Pošto je $x_1[n] = x[n-k]$, dobija se da je

$$y_1[n] = x_1[n] + 3\,\mathrm{u}[n+1] = x[n-k] + 3\,\mathrm{u}[n+1] \neq x[n-k] + 3\,\mathrm{u}[n+1-k] = y[n-k],$$

što znači da nije vremenski invarijantan. Na osnovu tačke g) sistem nije linearan.
i) Stabilan, nije vremenski invarijantan, linearan, nekauzalan, sa memorijom.
j) Stabilan, kauzalan, sa memorijom, vremenski invarijantan, nelinearan.
k) Stabilan, vremenski invarijantan, linearan, kauzalan, bez memorije.
l) Stabilan, linearan, nije vremenski invarijantan, kauzalan, bez memorije.

Zadatak 2.9.

Za sistem se kaže da je invertibilan ako se na osnovu odziva može nedvosmisleno rekonstruisati pobuda u bilo kom trenutku. Za sledeće sistem ispitati da li su invertibilni:
a) $y[n] = 2\,x[n]$,
b) $y(t) = x^2(t)$,
c) $y(t) = \mathrm{u}(x(t))$,
d) $y(t) = x(t-4) - x(2-t)$,
e) $y(t) = x\left(\frac{t}{M}\right)$,
f) $y(t) = x(t)\,\cos(\omega_0 t)$,
g) $y[n] = (n+1)\,x[n]$,
h) $y[n] = x[n]\,\mathrm{u}[n]$.

Rešenje:

a) Sistem jeste invertibilan jer je $x[n] = \frac{y[n]}{2}$.
b) Sistem nije invertibilan jer pobuda može biti i $x(t) = \sqrt{y(t)}$ i $x(t) = -\sqrt{y(t)}$.
c) Sistem nije invertibilan jer je $\mathrm{u}(x(t)) = \mathrm{u}(A\,x(t))$, $\forall A > 0$.
d) Sistem nije invertibilan jer je $y(t) = x(t-4) - x(2-t)$, istovremeno sa $y(t) = x_1(t-4) - x_1(2-t)$, gde je $x_1(t) = x(t) + C$, a C proizvoljna konstanta.
e) Sistem je invertibilan jer je $x(t) = y(Mt)$.
f) Sistem nije invertibilan jer u trenucima prolasna konsinusa kroz nulu, dobiće se nula na izlazu. U tom trenutku pobuda može imati bilo koju vrednost.
g) Sistem jeste invertibilan jer je $x[n] = \frac{y[n]}{n+1}$.
h) Sistem nije invertibilan jer za $n < 0$ važiće da je $y[n] = 0$ za bilo kakvu pobudu $x[n]$.

Zadatak 2.10.

Za sisteme definisane sledećim jednačinama ispitati linearnost, vremensku nepromenljivost i kauzalnost:
a) $y(t) = t^2\,x(t-1)$,
b) $y(t) = x(t-1) + x(1-t)$,
c) $y(t) = x(\sin(t))$,
d) $y[n] = x^2[n-2]$,
e) $y[n] = x[n] + 3\,u[n+1]$,
f) $y[n] = e^{x[n]}$,
g) $y[n] = \frac{1}{2n_0+1} \sum\limits_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$.

Rešenje:

a) Da bi sistem bio linearan, odziv na pobudu $x(t) = a\,x_1(t) + b\,x_2(t)$ mora biti $y(t) = a\,y_1(t) + b\,y_2(t)$. Imamo da je:

$$\begin{aligned}
&y_1(t) = t^2\,x_1(t-1),\\
&y_2(t) = t^2\,x_2(t-1),\\
&a\,y_1(t) + b\,y_2(t) = a\,t^2\,x_1(t-1) + b\,t^2\,x_2(t-1).
\end{aligned}$$

Pošto je $y(t) = t^2\,x(t-1) = a\,t^2\,x_1(t-1) + b\,t^2\,x_2(t-1) = a\,y_1(t) + b\,y_2(t)$, sistem je linearan.

Da bi sistem bio vremenski nepromenljiv, odziv na pobudu $x(t-t_0)$ mora biti $y(t-t_0)$.

$$y(t-t_0) = (t-t_0)^2\,x(t-t_0-1) \neq t^2\,x(t-t_0-1)$$

Sistem je vremenski promenljiv.

Sistem je kauzalan kada njegov odziv u bilo kom trenutku vremena $t = t_0$ zavisi samo od pobudnog signala za $t \leq t_0$. Ovaj sistem je kauzalan zato što je za na primer $x(t) = \mathrm{u}(t)$, odziv sistema jednak

$$y(t) = t^2\ \mathrm{u}(t-1) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ t^2, & t \geq 1. \end{cases}$$

b) Slično kao pod a) se proverava da je sistem linearan, vremenski promenljiv i nekauzalan.
c) Sistem je linearan jer za $y_1(t) = x_1(\sin(t))$ i $y_2(t) = x_2(\sin(t))$ sledi:

$$a\, y_1(t) + b\, y_2(t) = a\, x_1(\sin(t)) + b\, x_2(\sin(t)) = O\left\{a\, x_1(\sin(t)) + b\, x_2(\sin(t))\right\} = y(t).$$

Sistem je vremenski promenljiv zato što je

$$y(t-t_0) = x(\sin(t-t_0)) \neq O\left\{x(t-t_0)\right\}.$$

Sistem nije kauzalan zato što je na primer $y(-\pi) = x(0)$.
d) Kako je za $x[n] = a\, x_1[n] + b\, x_2[n]$, odziv sistema jednak

$$y[n] = (a\, x_1[n-2] + b\, x_2[n-2])^2 = a^2\, x_1^2[n-2] + 2ab\, x_1[n-2]\, x_2^2[n-2] \neq a\, y_1[n-2] + b\, y_2[n-2],$$

sistem nije linearan.

Neka je $x_1[n] = x[n-n_0]$. Odziv na signal $x_1[n]$ je $y_1[n] = x_1^2[n-2] = x^2[n-n_0-2] = y[n-n_0]$, pa je sistem vremenski nepromenljiv.

Sistem je kauzalan zato što u odsustvu pobudnog signala nema ni signala na izlazu sistema.
e) Sistem je nelinearan zato što je za $y_1[n] = O\left\{x_1[n]\right\} = x_1[n] + 3\ \mathrm{u}[n+1]$ i $y_2[n] = O\left\{x_2[n]\right\} = x_2[n] + 3\ \mathrm{u}[n+1]$:

$$y[n] = O\left\{a\, x_1[n] + b\, x_2[n]\right\} = a\, x_1[n] + b\, x_2[n] + 3\ \mathrm{u}[n+1] \neq a\, y_1[n] + b\, y_2[n].$$

Sistem je vremenski promenljiv zato što je

$$y[n-n_0] = x[n-n_0] + 3\ \mathrm{u}[n-n_0+1] \neq O\left\{x[n-n_0]\right\} = x[n-n_0] + 3\ \mathrm{u}[n+1].$$

Sistem je kauzalan.
f) Sistem nije linearan zato što je nehomogen: $y[n] = O\left\{Ax[n]\right\} = e^{A\, x[n]} \neq A\, O\left\{x[n]\right\}$ i neaditivan: $O\left\{x_1[n] + x_2[n]\right\} = e^{x_1[n]\, x_2[n]} = e^{x_1[n]}\, e^{x_2[n]} = y_1[n]\, y_2[n] \neq y_1[n] + y_2[n]$.

Sistem je vremenski nepromenljiv zato što je $y[n-n_0] = e^{x[n-n_0]} = O\left\{x[n-n_0]\right\}$.

Sistem je kauzalan.
g) Neka je suma koja odgovara signalu $x[n]$ jednaka $X[n] = \sum x[n] - C$, gde je $C \in \mathbb{R}$. Može se napisati da je:

$$y[n] = \frac{1}{2n_0+1}\left(X[n+n_0+1] - X[n-n_0]\right).$$

Lako se proverava da je sistem linearan i vremenski nepromenljiv.

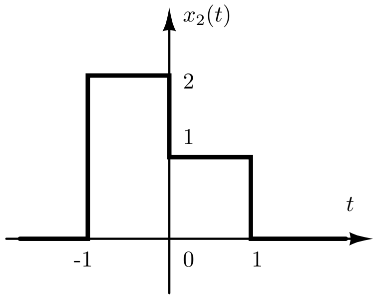
Za kauzalni signal $x[n]$ je suma $X[n]$ kauzalna. Kako odziv zavisi i od odbiraka koji tek treba da se „pojave” na ulazu u sistem, jer ima i sabirak $X[n+n_0+1]$, tako sistem nije kauzalan.

Zadatak 2.11.

a) Dat je linearni vremenski invarijantni sistem čiji je odziv $y_1(t)$ na pobudu $x_1(t) = \mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-1)$. Odrediti odziv na pobudu sa slike 2.10.1 u funkciji od $y_1(t)$.
b) Neka $h(t)$ impulsni odziv kauzalnog sistema i neka je za $t > 0$ parni deo signala jednak:

$$h_{e1}(t) = t\left(\mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-1)\right) + \mathrm{u}(t-1), \quad t > 0.$$

Odrediti $h(t)$.



Slika 2.11.1

Rešenje:

a) Sa slike 2.11.1 se vidi da je $x_2(t) = 2\,(\mathrm{u}(t+1) - \mathrm{u}(t)) + \mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-1) = 2\,x_1(t+1) + x_1(t)$. Na osnovu toga je odziv $y_2(t) = 2\,y_1(t+1) + y_1(t)$.
b) Neka je kauzalni impulsni odziv oblika $h(t) = y(t)\,\mathrm{u}(t)$. Parni deo signala je jednak

$$h_e(t) = \frac{h(t) + h(-t)}{2} = \frac{y(t)\,\mathrm{u}(t) + y(-t)\,\mathrm{u}(-t)}{2} = h_{e1}(t)\,\mathrm{u}(t) + h_{e2}\,\mathrm{u}(-t),$$

pri čemu je očigledano da je $h_{e2}(t) = h_{e1}(-t)$. Na osnovu prethodne jednačine se dobija da je

$$y(t)\,\mathrm{u}(t) = h(t) = 2\,h_{e1}(t)\,\mathrm{u}(t) = 2t\,(\mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-1)) + 2\mathrm{u}(t-1).$$

Zadatak 2.12.

Serijska veza dva sistema podrazumeva da je izlaz jednog sistema ulaz drugog. Paralelna veza dva sistema podrazumeva da su ulazi sistema kratko spojeni, a da se izlazi sabiraju ili oduzimaju.

Ispitati sledeće tvrdnje:
a) Serijska veza dva linearna, vremenski invarijalnta sistema je linearan, vremenski invarijantan sistem.
b) Serijska veza nelinearna sistema je nelinearan sistem.
c) Paralelna veza dva linearna, vremenski invarijanta sistema je linearan, vremenski invarijantan sistem.
d) Paralelna veza dva nelinenarna sistema je nelinearan sistem.

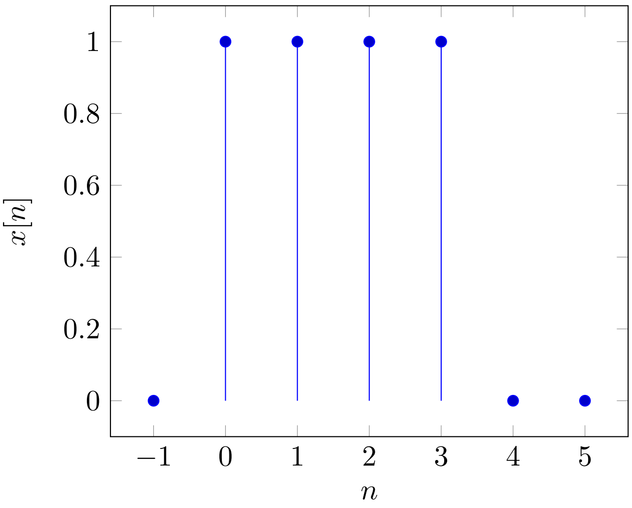
Rešenje:

a) Serijska veza daje konvoluciju dva sistema. Neka su h_1 i h_2 dva linearna, vremenski nepromenljiva sistema. Njihova serijska veza je $h = h_1 * h_2$. Po definiciji linearnog, vremenski nepromenljivog sistema je za $y = O\{x\}$ i $x = a\,x_1 + b\,x_2$, $y = a\,O\{x_1\} + b\,O\{x_2\} = y_1 + y_2$. Neka je na ulazu u sistem dat signal $x = a\,x_1 + b\,x_2$, tada je na izlazu iz sistema $h = h_1 * h_2$ signal $z = x * h = ax_1 * h + bx_2 * h = z_1 + z_2$. Vremenska invarijantnost se dokazuje na isti način.
b) Konvolucija nelinearnih sistema je nelinearan sistem.
c) Praralelna veza predstavlja aditivnost. Po definiciji sistem je linearan ako je homogen i aditivan. Samim tim je i zbir dva linearna, vremenski invarijantna sistema linearan, vremenski nepromenljiv sistem.
d) Ako su sistemi h_1 i h_2 nelinearni sistemi, onda je i sistem $h_1 \pm h_2$ nelinearan sistem.

3.1.2 Konvolucija diskretnih sistema

Zadatak 2.13.

Dat je signal $x[n] = \mathrm{u}[n] - \mathrm{u}[n-4]$.
a) Nacrtati dati signal.
b) Grafički odrediti konvoluciju signala sa samim sobom.
c) Analitički odrediti konvoluciju.



Slika 2.13.1.

Rešenje:

a) Signal je prikazan na slici 2.13.1.
b) $y[n] = x[n] * x[n]$

$y[-1] = \sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,x[-1-m] = 0$, jer ne postoje impulsi koji se poklapaju, videti na slici 2.13.2.
Isto važi za svako $n < 0$.

$y[0] = \sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,x[-m] = 1$, jer se poklapa jedan impuls.

$$y[1] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,x[1-m] = 2$$

$$y[2] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,x[2-m] = 3$$

$$y[3] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,x[3-m] = 4$$

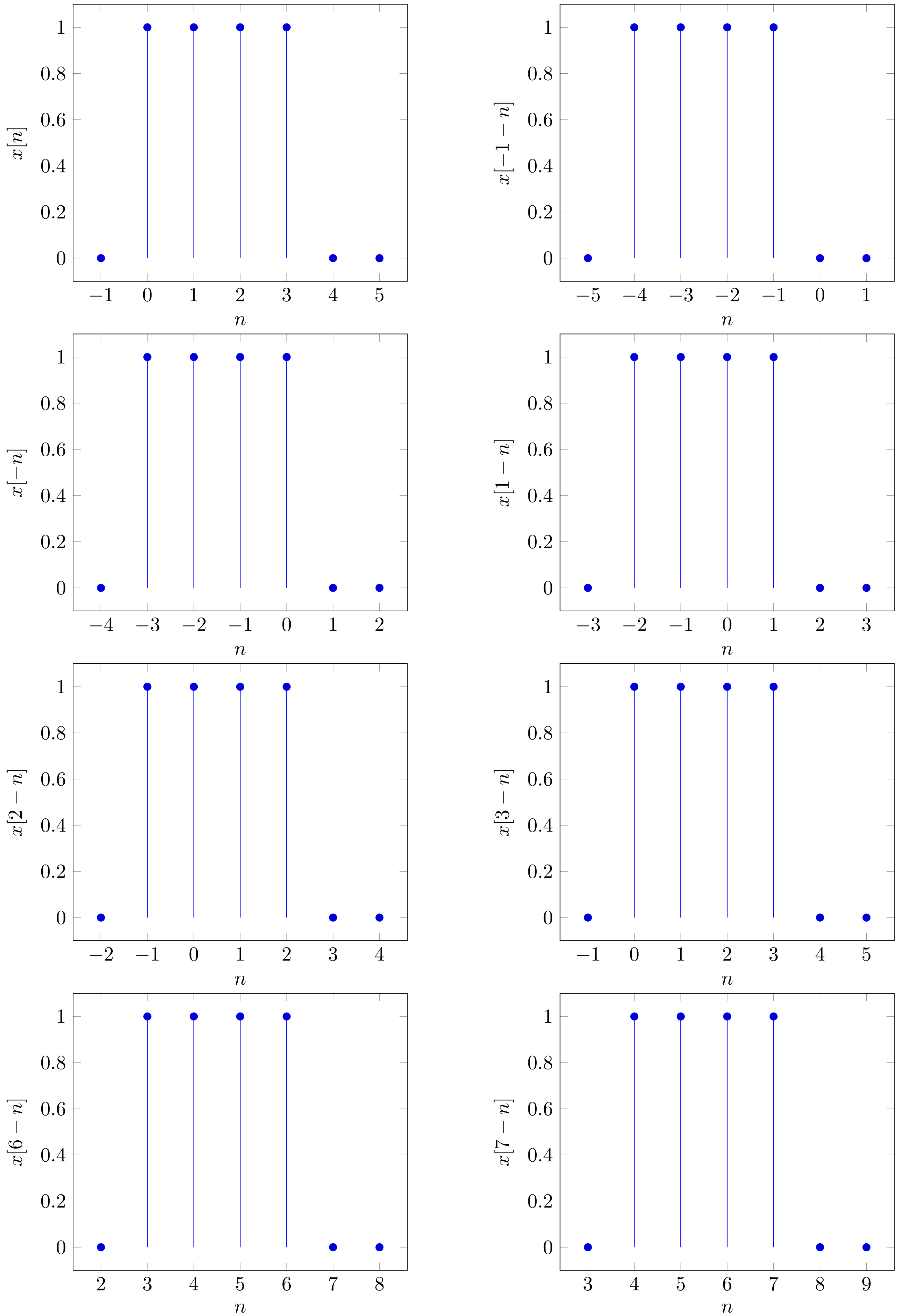
$$y[4] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,x[4-m] = 3$$

$$y[5] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,x[5-m] = 2$$

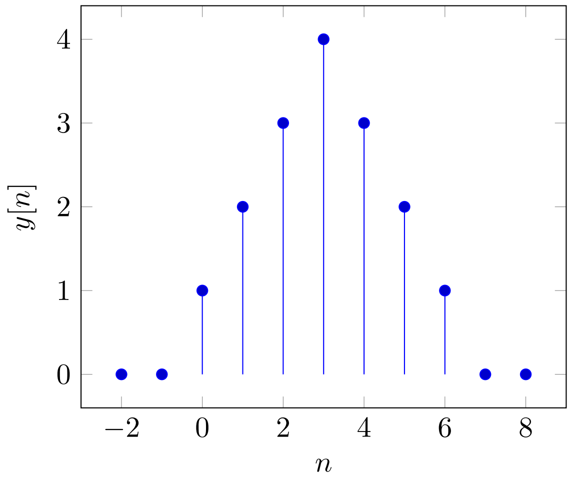
$$y[6] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,x[6-m] = 1$$

$$y[7] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,x[7-m] = 0$$

Na slici 2.13.3 je prikazan signal $y[n]$.



Slika 2.13.2.



Slika 2.13.3.

c) Formalnom primenom osobina konvolucije: $y[n] = x[n] * h[n]$ i $x[n-a] * h[n-b] = y[n-a-b]$, kao i

$$(x_1[n] + x_2[n]) * (h_1[n] + h_2[n]) = x_1[n] * h_1[n] + x_1[n] * h_2[n] + x_2[n] * h_1[n] + x_2[n] * h_2[n],$$

direktno se dolazi do rezultata

$$y[n] = x[n] * x[n] = \mathrm{u}[n] * \mathrm{u}[n] - 2\,\mathrm{u}[n] * \mathrm{u}[n-4] + \mathrm{u}[n-4] * \mathrm{u}[n-4].$$

Ako je $y_1[n] = \mathrm{u}[n] * \mathrm{u}[n]$, onda je $y[n] = y_1[n] - 2\,y_1[n-4] + y_1[n-8]$. Kako je:

$$y_1[n] = \mathrm{u}[n] * \mathrm{u}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathrm{u}[m]\,\mathrm{u}[n-m] = \mathrm{u}[n] \sum_{m=0}^{n} 1 = (n+1)\,\mathrm{u}[n],$$

sleduje da je

$$y[n] = (n+1)\,\mathrm{u}[n] - 2\,(n-3)\,\mathrm{u}[n-4] + (n-7)\,\mathrm{u}[n-8].$$

Zadatak 2.14.

Naći analitički oblik signala sa slike 2.14.1, a zatim odrediti njihovu konvoluciju. Rezultat proveriti određivanjem konvolucije direktno sa slike.

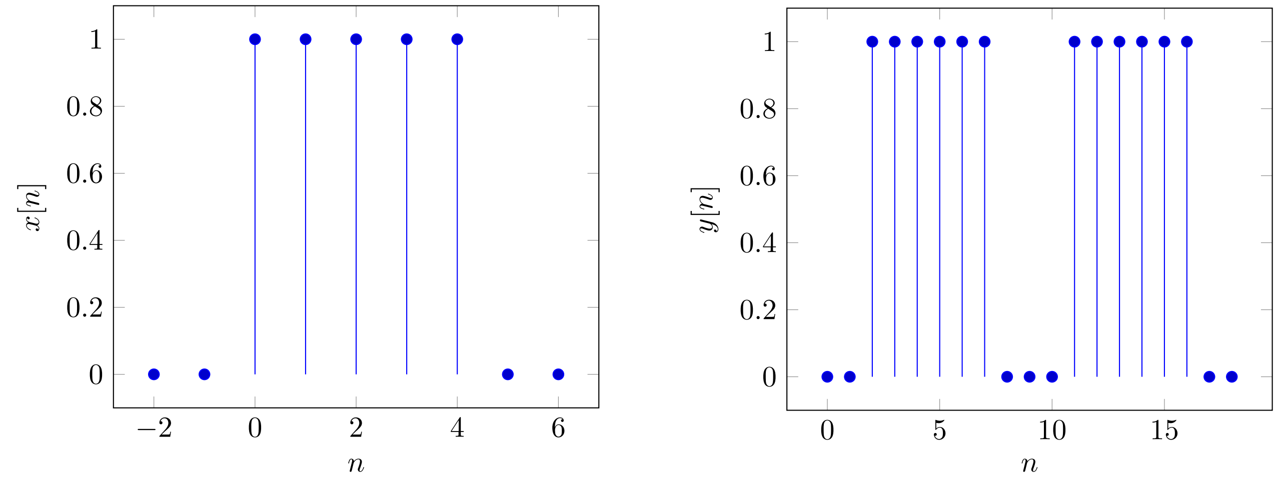
Rešenje:

a) $x[n] = \mathrm{u}[n] - \mathrm{u}[n-5]$, $y[n] = \mathrm{u}[n-2] - \mathrm{u}[n-8] + \mathrm{u}[n-11] - \mathrm{u}[n-17]$
$x[n] * y[n] = (n-1)\,\mathrm{u}[n-2] - (n-6)\,\mathrm{u}[n-7] - (n-7)\,\mathrm{u}[n-8] + (n-12)\,\mathrm{u}[n-13] +$
$(n-10)\,\mathrm{u}[n-11] - 2\,(n-16)\,\mathrm{u}[n-17] + (n-21)\,\mathrm{u}[n-22]$
b) $x[n] = \mathrm{u}[n+2] - \mathrm{u}[n-3] + \delta[n+1]$, $y[n] = \mathrm{u}[n] - \mathrm{u}[n-5] - 2\,\delta[n-1]$

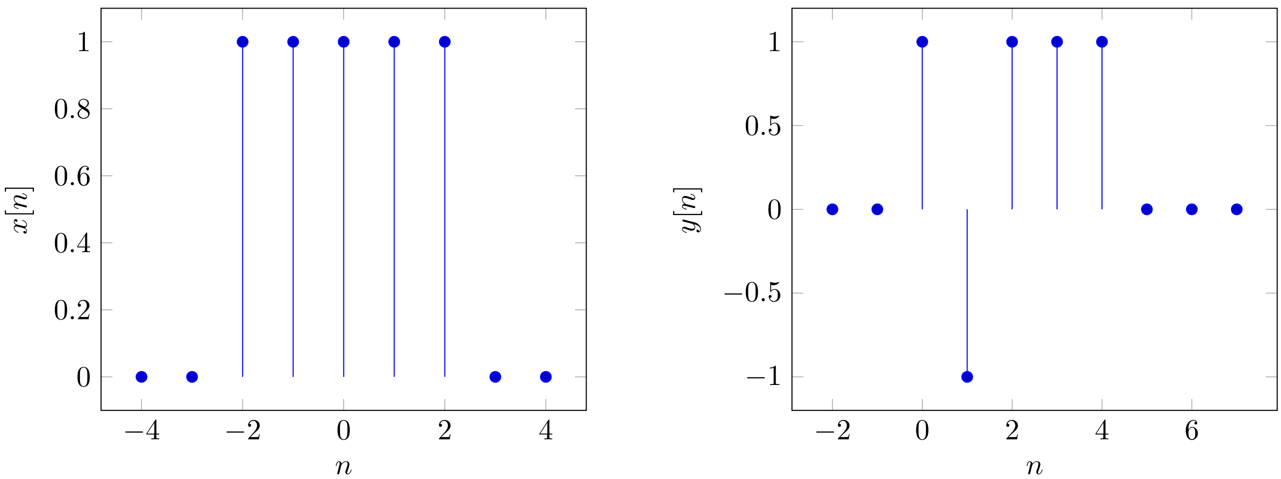
$$x[n] * y[n] = (n+3)\,\mathrm{u}[n+2] - 2\,(n-2)\,\mathrm{u}[n-3] + (n-7)\,\mathrm{u}[n-8] + \mathrm{u}[n+1] - \mathrm{u}[n-4] - 2\,\delta[n]$$

c) $x[n] = \mathrm{u}[n+1] - \mathrm{u}[n-4] - \delta[n-1]$, $y[n] = (n+3)\,(\mathrm{u}[n+3] - \mathrm{u}[n]) + (3-n)\,(\mathrm{u}[n] - \mathrm{u}[n-3])$

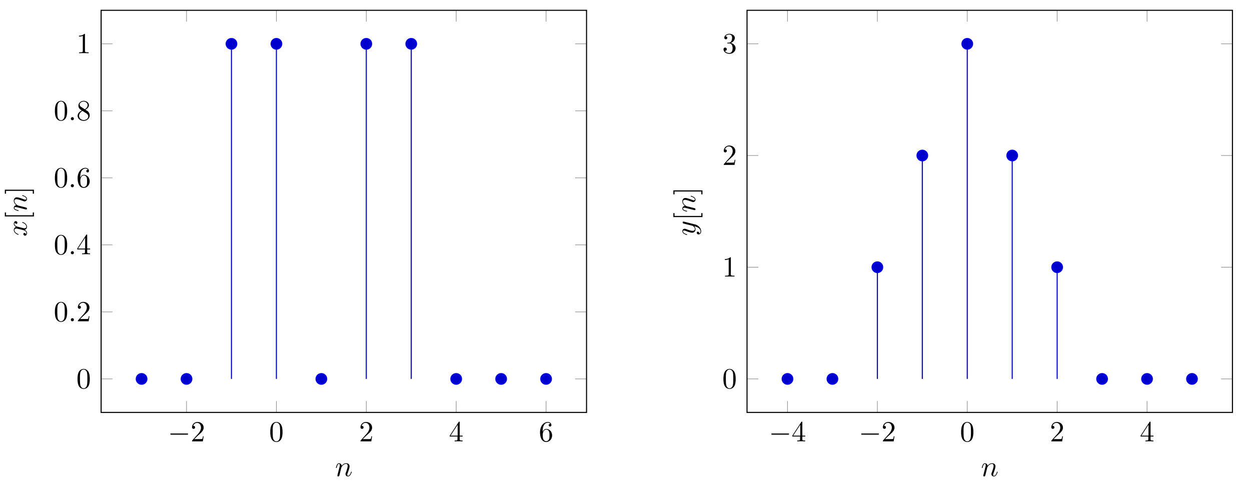
Kako je $n\,\mathrm{u}[n] * \mathrm{u}[n] = \frac{n\,(n+1)}{2}\,\mathrm{u}[n]$ i kako $y[n]$ može da se zapiše kao $y[n] = (n+3)\,\mathrm{u}[n+3] - 2\,n\,\mathrm{u}[n] + (n-3)\,\mathrm{u}[n-3]$, važi:
$x[n] * y[n] = \frac{(n+4)\,(n+5)}{2}\,\mathrm{u}[n+4] - \frac{n\,(n-1)}{2}\,\mathrm{u}[n-1] - (n-1)\,(n+2)\,\mathrm{u}[n+1] + (n-3)\,(n-4)\,\mathrm{u}[n-4]$
$+\ \frac{(n-2)\,(n-1)}{2}\,\mathrm{u}[n-2] - \frac{(n-7)\,(n-6)}{2}\,\mathrm{u}[n-7] - (n+2)\,\mathrm{u}[n+2] + 2\,(n-1)\,\mathrm{u}[n-1] - (n-4)\,\mathrm{u}[n-4].$



a)



b)



c)

Slika 2.14.1

Zadatak 2.15.

Nacrtati sledeće signale i odrediti njihovu konvoluciju:
a) $x[n] = a^n\,\mathrm{u}[n]$, $h[n] = b^n\,\mathrm{u}[n]$, $a \neq b$,

b) $x[n] = h[n] = a^n \, \mathrm{u}[n]$,
c) $x[n] = 2^n \, \mathrm{u}[-n]$, $h[n] = \mathrm{u}[n]$,
d) $x[n] = (-1)^n \, (\mathrm{u}[-n] - \mathrm{u}[-n-8])$, $h[n] = \mathrm{u}[n] - \mathrm{u}[n-8]$,
e) $x[n] = 1$, $h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \mathrm{u}[n]$,
f) $x[n] = \mathrm{u}[n] - \mathrm{u}[-n]$, $h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \mathrm{u}[n]$,
g) $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{u}[n-4]$, $h[n] = 4^n \, \mathrm{u}[2-n]$,
h) $x[n] = 1$, $h[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \geq 0, \\ 4^n, & n < 0, \end{cases}$
i) $x[n] = \mathrm{u}[n] - \mathrm{u}[-n]$, $h[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \geq 0, \\ 4^n, & n < 0, \end{cases}$
j) $x[n] = 3^n \, (\mathrm{u}[n-3] - \mathrm{u}[2-n])$, $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n} \mathrm{u}[n+1]$.

Rešenje:

a)

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \, h[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a^m \, b^{n-m} \, \mathrm{u}[m] \, \mathrm{u}[n-m] = b^n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^m \mathrm{u}[m] \, \mathrm{u}[n-m]$$

Kako je $\mathrm{u}[m] = 0$ za $m < 0$ i $\mathrm{u}[n-m] = 0$ za $n - m < 0$, odnosno za $m > n$, mogu da se promene granice sumiranja.

$$y[n] = b^n \, \mathrm{u}[n] \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{a}{b}\right)^m = b^n \, \mathrm{u}[n] \, \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{1 - \frac{a}{b}} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} \, \mathrm{u}[n]$$

b) $y[n] = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a^m \, \mathrm{u}[m] \, a^{n-m} \, \mathrm{u}[n-m] = a^n \, \mathrm{u}[n] \sum_{m=0}^{n} 1 = (n+1) \, a^n \, \mathrm{u}[n]$

c) Prvi način, direktno:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^m \, \mathrm{u}[-m] \, \mathrm{u}[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{0} 2^m \, \mathrm{u}[n-m]$$

Pošto je $\mathrm{u}[n-m] = 0$ za $n - m < 0$, odnosno za $m > n$, sumiranje ide samo do $\min\{0, n\}$.

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\min\{0,n\}} 2^m = 2^{1+\min\{0,n\}} = 2^{n+1} \, \mathrm{u}[-n] + 2 \, \mathrm{u}[n-1]$$

Drugi način, svođenjem na kauzalne sekvence: $\mathrm{u}[-n] = 1 - \mathrm{u}[n-1]$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^m \, (1 - \mathrm{u}[m-1]) \, \mathrm{u}[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^m \, \mathrm{u}[n-m] - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^m \, \mathrm{u}[m-1] \, \mathrm{u}[n-m] =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{n} 2^m - \mathrm{u}[n-1] \sum_{m=1}^{n} 2^m = 2^{n+1} - (2^{n+1} - 2) \, \mathrm{u}[n-1] = 2^{n+1} \, \mathrm{u}[-n] + 2 \, \mathrm{u}[n-1]$$

d) $x[n] = (-1)^n \, (1 - \mathrm{u}[n-1] - 1 + \mathrm{u}[n-9]) = (-1)^n \, (\mathrm{u}[n-9] - \mathrm{u}[n-1])$

Neka je $y_1[n] = (-1)^n \, \mathrm{u}[n] * \mathrm{u}[n] = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \, \mathrm{u}[m] \, \mathrm{u}[n-m] = \mathrm{u}[n] \sum_{m=0}^{n} (-1)^m$, tada je

$$y_1[n] = \begin{cases} \mathbf{u}[n] & n+1 \text{ neparan broj} \\ 0 & n+1 \text{ paran broj} \end{cases} = \mathrm{comb}_2[n] \, \mathrm{u}[n].$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = -2\, y_1[n-9] + y_1[n-1] + y_1[n-17]$$

$$y[n] = -2\,\mathrm{comb}_2[n-9]\,\mathrm{u}[n-9] + \mathrm{comb}_2[n-1]\,\mathrm{u}[n-1] + \mathrm{comb}_2[n-17]\,\mathrm{u}[n-17]$$

e) $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^m \mathrm{u}[m] = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^m = \frac{3}{2}$

f) $x[n] = \mathrm{u}[n] + \mathrm{u}[n-1] - 1$

$$y_1[n] = \mathrm{u}[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^m \mathrm{u}[m]\,\mathrm{u}[n-m] = \mathrm{u}[n] \sum_{m=0}^{n} 3^{-m} = \frac{3^{n+1}-1}{2\cdot 3^n}\,\mathrm{u}[n]$$

$$y[n] = \frac{3^{n+1}-1}{2\cdot 3^n}\,\mathrm{u}[n] + \frac{3^n-1}{2\cdot 3^{n-1}}\,\mathrm{u}[n-1] - \frac{3}{2}$$

g) Prvi način:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^m 4^{n-m}\,\mathrm{u}[m-4]\,\mathrm{u}[2-n+m] = 4^n \sum_{m=4}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{3m} \mathrm{u}[2-n+m]$$

Kako je $\mathrm{u}[2-n+m] = 0$ za $m < n-2$, onda sumiranje može da počne od $\max\{4, n-2\}$.

$$y[n] = 4^n \sum_{m=\max\{4,n-2\}}^{+\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^m = 4^n \frac{\left(-\frac{1}{8}\right)^{\max\{4,n-2\}}}{1-\left(-\frac{1}{8}\right)} = \frac{8\cdot 4^n}{9} \left(-\frac{1}{8}\right)^{\max\{4,n-2\}}$$

Za $n-2 \le 4$ je $y[n] = \frac{8\cdot 4^n}{9}\left(-\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{8\cdot 4^{n-6}}{9}$, a ako je $n \ge 7$ važi $y[n] = \frac{8\cdot 4^n}{9}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-2} = -\frac{4}{9\cdot(-2)^{n-7}}$.

$$y[n] = \frac{8\cdot 4^{n-6}}{9}\,\mathrm{u}[6-n] - \frac{4}{9\cdot(-2)^{n-7}}\,\mathrm{u}[n-7]$$

Drugi način:

$$x[n] = \frac{1}{16}\,(-2)^{-(n-4)}\,\mathrm{u}[n-4]$$

$$h[n] = 4^n\,(1-\mathrm{u}[n-3])$$

Neka je $y_1[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{u}[n] * 4^n$ i $y_2[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{u}[n] * 4^n\,\mathrm{u}[n]$.

$$y_1[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^m \mathrm{u}[m]\,4^{n-m} = 4^n \sum_{m=0}^{+\infty} (-2)^{3m} = \frac{8}{9}\,4^n$$

$$y_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^m \mathrm{u}[m]\,4^{n-m}\,\mathrm{u}[n-m] = 4^n\,\mathrm{u}[n] \sum_{m=0}^{n} (-2)^{3m} = \frac{8\cdot 4^n}{9}\,(1-(-2)^{-3\,(n+1)})\,\mathrm{u}[n]$$

$$y[n] = \frac{y_1[n-4]}{16} - \frac{4^3}{16}\,y_2[n-7] = \frac{8\cdot 4^{n-6}}{9}\,\mathrm{u}[6-n] - \frac{4}{9\cdot(-2)^{n-7}}\,\mathrm{u}[n-7]$$

h) $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{-1} 4^m + \sum_{m=0}^{+\infty} 3^{-m} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{11}{6}$

i) $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{-1} 4^m\,x[n-m] + \sum_{m=0}^{+\infty} 3^{-m}\,x[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{-1} 4^m\,(\mathrm{u}[n-m] - \mathrm{u}[-n+m]) +$

$$+\sum_{m=0}^{+\infty} 3^{-m}\,(\mathrm{u}[n-m] - \mathrm{u}[-n+m]) = -\mathrm{u}[-n] \sum_{m=n}^{-1} 4^m + \mathrm{u}[n] \sum_{m=0}^{n} 3^{-m}$$

$$y[n] = \frac{1}{3}\,(1-4^n)\,\mathrm{u}[-n] + \frac{3}{2}\,(1-3^{-(n+1)})\,\mathrm{u}[n]$$

j) Ako se eliminišu nekauzalni oblici:

$$x[n] = 3^n \,(2\,\mathrm{u}[n-3] - 1),$$

$$h[n] = \frac{1}{2}\,2^n\,\mathrm{u}[n+1].$$

Kako važi

$$a^n\,\mathrm{u}[n] * b^n\,\mathrm{u}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a^m\,\mathrm{u}[m]\,b^{n-m}\,\mathrm{u}[n-m] = b^n\,\mathrm{u}[n] \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{a}{b}\right)^m = b^n\,\mathrm{u}[n]\left.\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^m}{\frac{a}{b}-1}\right|_0^{n+1}$$

$$= b^n\,\mathrm{u}[n]\,\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}-1}{\frac{a}{b}-1} = \mathrm{u}[n]\,\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$

i

$$a^n\,\mathrm{u}[n] * b^n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a^m\,\mathrm{u}[m]\,b^{n-m} = b^n \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^m = b^n\left.\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^m}{\frac{a}{b}-1}\right|_0^{+\infty} = b^n\,\frac{-1}{\frac{a}{b}-1} = -\frac{b^{n+1}}{a-b},$$

dobija se:

$$y_1[n] = 2^n\,\mathrm{u}[n] * 3^n\,\mathrm{u}[n] = (3^{n+1}-2^{n+1})\,\mathrm{u}[n], \qquad y_2[n] = 2^n\,\mathrm{u}[n] * 3^n = 3^{n+1}.$$

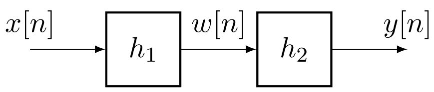
Zato je

$$y[n] = \frac{27}{2}\,y_1[n-2] - \frac{1}{4}\,y_2[n].$$

3.1.3 Prinudni i sopstveni odziv diskretnih signala

Zadatak 2.16.

Dokazati da se dva kaskadno spregnuta sistema prikazana na slici 2.7.1 čiji su impulsni odzivi $h_1[n]$ i $h_2[n]$ ponašaju kao jedan sistem čiji je impulsni odziv $h[n] = h_1[n] * h_2[n]$.



Slika 2.16.1.

Rešenje:

$w[n] = x[n] * h_1[n]$, $y[n] = w[n] * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = x[n] * h[n]$

Zadatak 2.17.

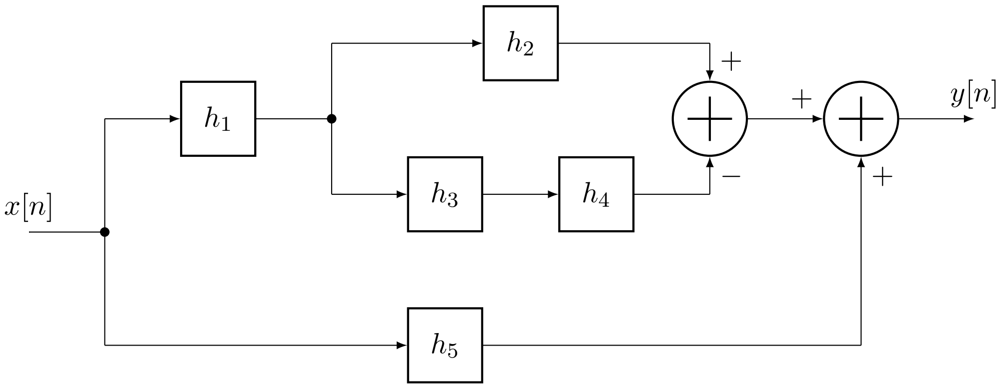
a) Odrediti impulsni odziv $h[n]$ celog sistema sa slike 2.17.1 ako su dati impulsni odzivi delova sistema:

$$h_1[n] = 4\cdot 2^{-n}\,(\mathrm{u}[n]-\mathrm{u}[n-3]), \qquad h_2[n] = h_3[n] = (n+1)\,\mathrm{u}[n],$$
$$h_4[n] = \delta[n-1], \qquad h_5[n] = \delta[n-1] - 4\,\delta[n].$$

b) Ponoviti tačku a) ako je $h_2[n]$ odziv na diskretni jedinični niz.

Rešenje:

a) $h[n] = h_1[n] * (h_2[n] - h_3[n] * h_4[n]) + h_5[n]$



Slika 2.17.1.

$$h_3[n] * h_4[n] = n\,\mathrm{u}[n-1]$$

$$h_2[n] - h_3[n] * h_4[n] = (n+1)\,\mathrm{u}[n] - n\,\mathrm{u}[n-1] = \delta[n] + (n+1)\,\mathrm{u}[n-1] - n\,\mathrm{u}[n-1] = \delta[n] + \mathrm{u}[n]$$

Kako je

$$h_1[n] = 4 \cdot 2^{-n}\,(\mathrm{u}[n] - \mathrm{u}[n-3]) = 4 \cdot 2^{-n}\,(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]) = 4\,\delta[n] + 2\,\delta[n-1] + \delta[n-2],$$

dobija se

$$h_1[n] * (h_2[n] - h_3[n] * h_4[n]) = (4\,\delta[n] + 2\,\delta[n-1] + \delta[n-2]) * (\delta[n] + \mathrm{u}[n]) =$$

$$= (4\,\delta[n] + 2\,\delta[n-1] + \delta[n-2]) * \mathrm{u}[n] = 4\,\mathrm{u}[n] + 2\,\mathrm{u}[n-1] + \mathrm{u}[n-2].$$

$$h[n] = 4\,\mathrm{u}[n] + 2\,\mathrm{u}[n-1] + \mathrm{u}[n-2] + \delta[n-1] - 4\,\delta[n] = 7\,\mathrm{u}[n-1]$$

b) Potrebno je prvo naći impulsni odziv $h_{2I}[n]$. Važi $h_2[n] = \mathrm{u}[n] * h_{2I}[n]$, pa je

$$h_2[n-1] = \delta[n-1] * h_2[n] = \delta[n-1] * \mathrm{u}[n] * h_{2I}[n] = \mathrm{u}[n-1] * h_{2I}[n].$$

Odavde je

$$h_2[n] - h_2[n-1] = (n+1)\,\mathrm{u}[n] - n\,\mathrm{u}[n-1] = \mathrm{u}[n],$$

$$h_2[n] - h_2[n-1] = \mathrm{u}[n] * h_{2I}[n] - \mathrm{u}[n-1] * h_{2I}[n] = h_{2I}[n],$$

pa je $h_{2I}[n] = \mathrm{u}[n]$.

$$h_{2I}[n] - h_3[n] * h_4[n] = \mathrm{u}[n] - n\,\mathrm{u}[n-1] = (1-n)\,\mathrm{u}[n]$$

Konačno je

$$h[n] = (4\,\delta[n] + 2\,\delta[n-1] + \delta[n-2]) * (1-n)\,\mathrm{u}[n] + h_5[n],$$

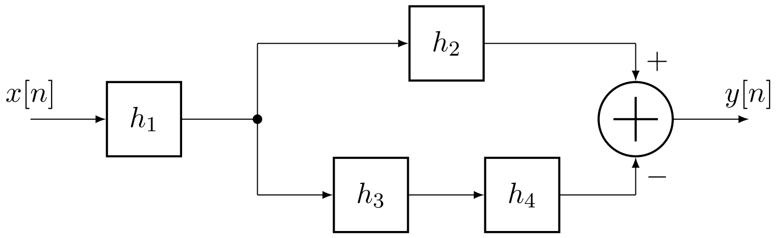
$$h[n] = 4\,(1-n)\,\mathrm{u}[n] + 2\,(2-n)\,\mathrm{u}[n-1] + (3-n)\,\mathrm{u}[n-2] + \delta[n-1] - 4\,\delta[n].$$

Zadatak 2.18.

a) Odrediti impulsni odziv sistema sa slike 2.18.1 $h[n]$ ako su dati pojedinačni impulsni odzivi:

$$h_1[n] = 3\,(-1)^n\,\left(\tfrac{1}{4}\right)^n\,\mathrm{u}[n-2],$$
$$h_2[n] = h_3[n] = \mathrm{u}[n+2],$$
$$h_4[n] = \delta[n-1].$$

b) Ispitati BIBO stabilnost i kauzalnost sistema.



Slika 2.18.1.

Rešenje:

a) $h[n] = h_1[n] * (h_2[n] - h_3[n] * h_4[n])$

$$h_2[n] - h_3[n] * h_4[n] = \mathrm{u}[n+2] - \mathrm{u}[n+2] * \delta[n-1] = \mathrm{u}[n+2] - \mathrm{u}[n+1] = \delta[n+2]$$

$$h[n] = h_1[n]\,\delta[n+2] = h_1[n+2] = 3\,(-1)^n \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} \mathrm{u}[n]$$

b) Diskretni sistem je stabilan ako mu je impulsni odziv apsolutno sumabilan.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \frac{3}{16} \sum_{n=0}^{+\infty} 4^n = \frac{\frac{3}{16}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

Vidi se da je sistem stabilan.

Sistem je kauzalan zato što je $h[n] = 0$, za $n < 0$.

Rešavanje diferencnih jednačina

Jednačina oblika

$$a_k\, y[n] + a_{k-1}\, y[n-1] + \cdots + a_0\, y[n-k] = x[n] \tag{3.1}$$

naziva se linearna nehomogena diferencna (rekurentna) jednačina k-tog reda sa konstantnim koeficijentima. Ukoliko je $x[n] = 0$, jednačina se naziva homogena.

Opšte rešenje homogene jednačine je zbir k partikularnih rešenja:

$$y[n] = s_1[n] + s_2[n] + \cdots + s_k[n].$$

Nalaženje partikularnih rešenja

Jednačini (3.1) se pridružuje karakteristični polinom oblika

$$P(\lambda) = a_k\, \lambda^k + a_{k-1}\, \lambda^{k-1} + \cdots + a_0, \tag{3.2}$$

koji može da se faktorizuje na članove oblika

$$P(\lambda) = a_k\,(\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)^p\,(\lambda^2 + \alpha_1\,\lambda + \beta_1)\,(\lambda^2 + \alpha_2\,\lambda + \beta_2)^r\,\cdots \tag{3.3}$$

- Vidi se da je $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ prosta realna nula. Njoj odgovara jedno partikularno rešenje oblika:

  $$s[n] = C \cdot \lambda_1^n,$$

  gde je $C \in \mathbb{R}$ neodređena konstanta.

- $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ je nula karakterističnog polinoma (3.1) reda p. Njoj odgovara p partikularnih rešenja oblika:

  $$s_1[n] + s_2[n] + \cdots + s_p[n] = (C_1 + n\,C_2 + \cdots + n^{p-1}\,C_p)\,\lambda_2^n,$$

  gde su $C_{1-p} \in \mathbb{R}$ neodređene konstante.

- Konjugovano-kompleksnom polu $\lambda_{3,4} = -\frac{\alpha_1}{2} \pm j\sqrt{\beta_1 - \frac{\alpha_1^2}{4}} = \rho\,(\cos(\theta) \pm \sin(\theta))$ odgovaraju dva partikularna rešenja

$$s_1[n] = C_1\,\rho^n\,\cos(n\,\theta), \qquad s_2[n] = C_2\,\rho^n\,\sin(n\,\theta).$$

- Svakom paru konjugovano-kompleksnih polova $\lambda_{5,6} = -\frac{\alpha_2}{2} \pm j\sqrt{\beta_2 - \frac{\alpha_2^2}{4}} = \rho\,(\cos(\theta) \pm \sin(\theta))$ odgovara $2r$ partikularnih rešenja:

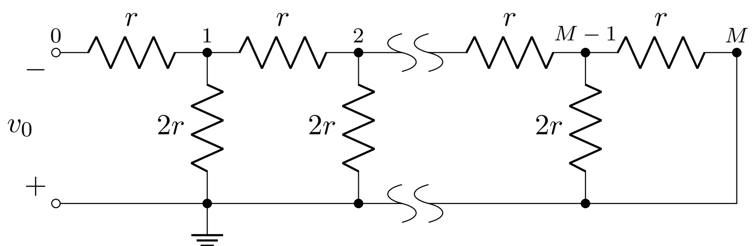
$$s_1[n] + s_2[n] + \cdots + s_r[n] = (C_1 + n\,C_2 + \cdots + n^{r-1}\,C_r)\,\rho^n\,\cos(n\,\theta),$$

$$s_{r+1}[n] + s_{r+2}[n] + \cdots + s_{2r}[n] = (B_1 + n\,B_2 + \cdots + n^{r-1}\,B_r)\,\rho^n\,\sin(n\,\theta),$$

Pošto svako partikularno rešenje sadrži neodređenu konstantu, za određivanje svih neodređenih konstanti potrebno je k početnih uslova, a to su početne vrednosti $y[0]$, $y[1]$, $\cdots$, $y[k-1]$. Zamenom početnih uslova se dobija sistem jednačina k-tog reda koji ne mora da ima jedinstveno rešenje.

Zadatak 2.19.

Na slici 2.19.1 je prikazana lestvičasta otporna mreža koja se sastoji od M sekcija. Svi otpornici u mreži su jednaki, a mreža je kratko spojena na izlazu. Potencijal ulaznog čvora je v_0.
a) Formirati rekurentnu jednačinu koja opisuje zavisnost potencijala $n+1$-vog čvora od potencijala n-tog i $n+2$-gog čvora za $0 < n < M-2$.
b) Odrediti potencijal n-tog čvora u funkciji od n ako je $v[0] = v_0$ i $v[1] = v_1$.
c) Odrediti potencijal $v[1] = v_1$ u funkciji od M i $v[0] = v_0$.



Slika 2.19.1.

Rešenje:

a) Pisanjem jednačine korišćenjem metode potencijala čvorova za $n+1$-vi čvor dobija se:

$$v[n+1]\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\,v[n] + \frac{1}{r}\,v[n+2],$$

$$v[n+1] = \frac{2}{5}\,(v[n] + v[n+2]).$$

b) Diferencna jednačina glasi

$$v[n+2] - \frac{5}{2}\,v[n+1] + v[n] = 0,$$

pa je njen karakterističn polinom

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5\,\lambda}{2} + 1,$$

čiji su korenovi $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Na osnovu toga je opšte rešenje diferencne jednačine:

$$v[n] = C_1\,2^n + C_2\,2^{-n}.$$

Kako je

$$v_0 = v[0] = C_1 + C_2,$$
$$v_1 = v[1] = 2\,C_1 + \tfrac{C_2}{2},$$

dobija se $C_1 = \frac{2\,v_1 - v_0}{3}$ i $C_2 = -\frac{2\,(v_1 - 2\,v_0)}{3}$.

$$v[n] = \frac{2\,v_1 - v_0}{3}\,2^n - \frac{2\,(v_1 - 2\,v_0)}{3}\,2^{-n}$$

c) Pošto je $v[M] = 0$, određuje se i drugi početni uslov $v[1]$:

$$v[M] = \frac{2\,v_1 - v_0}{3}\,2^M - \frac{2\,(v_1 - 2\,v_0)}{3}\,2^{-M} = 0,$$

$$v_1 = 2\,v_0\,\frac{2^{2M-2} - 1}{2^{2M} - 1}.$$

Zadatak 2.20.

Kutija X sadrži a belih i b crnih kuglica, kutija Y sadrži b belih i a crnih kuglica, pri čemu je $a, b \gg 100$. Izvlače se kuglice jednaza drugom tako da ako se izvuče bela kuglica, sledeće izvlačenje je iz kutije X. Ako je prvo izvlačenje bilo iz kutije X, kolika je verovatnoća sa je n-ta kuglica bela za $n < 100$?

Rešenje:

Pošto je $a, b \gg 100$, može se zanemariti promena broja kuglica u prvih 100 izvlačenja, pa je verovatnoa da je bela kuglica izvučena iz kutija X i Y:

$$P_X = \frac{a}{a+b}, \qquad P_Y = \frac{b}{a+b}.$$

Neka je $P[n]$ verovatnoća da je u n-tom izvlačenju izvučena bela kuglica. Kuglica se u n-tom izvlačenju uzima iz kutije X ako je u prethodnom izvlačenju izvučena bela kuglica, što je verovatno sa $P[n-1]$, a iz kutije Y ako je u prethodnom izvlačenju izvučena crna kuglica, što je verovatno sa $1 - P[n-1]$. Prema tome je diferencna jednačina

$$P[n] = \frac{a}{a+b}\,P[n-1] + \frac{b}{a+b}\,(1 - P[n-1]) = \frac{a-b}{a+b}\,P[n-1] + \frac{b}{a+b}$$

sa početnim uslovima $P[0] = 1$ i $P[1] = \frac{a}{a+b}$.

Kako je

$$P[n-1] = \frac{a-b}{a+b}\,P[n-2] + \frac{b}{a+b},$$

razlika $P[n] - P[n-1]$ iznosi

$$P[n] - P[n-1] = \frac{a-b}{a+b}\,(P[n-1] - P[n-2]).$$

Karakteristična jednačina glasi:

$$\lambda^2 - \lambda = (\lambda - 1)\,\frac{a-b}{a+b} \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{a-b}{a+b}\right) = 0,$$

pa je opšte rešenje:

$$P[n] = C_1 \cdot 1^n + C_2\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n.$$

Na osnovu početnih uslova formira se sistem jednačina čijim se rešavanjem dobijaju vrednosti neodređenih koeficijenata.

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + \frac{a-b}{a+b}\, C_2 = \frac{a}{a+b} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$$

Zamenom dobijenih koeficijenata u opšte rešenje diferencne jednačine dobija se konačno rešenje:

$$P[n] = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n\right).$$

Zadatak 2.21.

Odrediti rešenje sledećih diferencnih jednačina za zadate početne uslove:
a) $y[n] - 4\,y[n-1] + 5\,y[n-2] - 4\,y[n-3] + 4\,y[n-4] = 0$ i $y[0] = 0$, $y[1] = 1$, $y[2] = 11$, $y[3] = 41$;
b) $y[n] - 6\,y[n-1] + 8\,y[n-2] = 0$, $y[0] = 0$, $y[1] = 2$;
c) $y[n] - 2\,y[n-1] + 5\,y[n-2] = 0$, $y[0] = 0$, $y[1] = 1$;
d) $y[n] + y[n-1] - y[n-2] - y[n-3] = 0$, $y[0] = 2$, $y[1] = -1$, $y[2] = 3$.

Rešenje:

a) Karakteristična jednačina za zadatu diferencnu jednačinu je: $P(\lambda) = \lambda^4 - 4\,\lambda^3 + 5\,\lambda^2 - 4\,\lambda + 4 = 0$.

Ukoliko su koreni karakteristične jednačine celobrojni, onda koren karakteristične jednačine treba da deli koeficijent uz $\lambda^0 = 1$ bez ostatka. U ovom zadatku mogućnosti su $\lambda \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Jednostavnom proverom se utvrđuje da je jedno realno rešenje $\lambda_1 = 2$. Grupisanjem članova polinoma dobija se

$$P(\lambda) = (\lambda - 2)\,(\lambda^3 - 2\,\lambda^2 + \lambda - 2) = (\lambda - 2)^2\,(\lambda^2 + 1).$$

Dakle, karakteristični polinom ima dvostruki realni koren $\lambda_{1,2} = 2$ i jedan konjugovano-kompleksni par $\lambda_{3,4} = \pm j1$ koji u trigonometrijskom obliku glasi $\lambda_{3,4} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm j\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Opšte rešenje diferencne jednačine glasi

$$y[n] = C_1\,2^n + nC_2\,2^n + C_3\,\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + C_4\,\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

pa se na osnovu početnih uslova određuje rešenje u odnosu na zadate početne uslove:

$$\left.\begin{array}{l} y[0] = 0 = C_1 + C_3 \\ y[1] = 1 = 2\,C_1 + 2\,C_2 + C_4 \\ y[2] = 11 = 4\,C_1 + 8\,C_2 - C_3 \\ y[3] = 41 = 8\,C_1 + 24\,C_2 - C_4 \end{array}\right\} = \begin{array}{l} C_1 = -1, \\ C_2 = 2, \\ C_3 = 1, \\ C_4 = -1. \end{array}$$

$$y[n] = -2^n + 2n\,2^n + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

b) Karakteristična jednačina je $P(\lambda) = \lambda^2 - 6\,\lambda + 8$, čiji su korenovi $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 4$. Odatle je $y[n] = C_1\,2^n + C_2\,4^n$. Na osnovu početnih uslova se dobija $y[n] = -2^n + 4^n$.
c) Karakteristična jednačina je $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\,\lambda + 5$, čiji su korenovi $\lambda_{1,2} = 1 \pm j2 = \sqrt{5}\,(\cos(\varphi) \pm j\,\sin(\varphi))$, gde je $\varphi = \mathrm{arctg}(2) \approx 63.44°$. Odatle je $y[n] = \sqrt{5}^n\,(C_1\,\cos(n\varphi) + C_2\,\sin(n\varphi))$. Na osnovu početnih uslova se dobija $y[n] = \frac{\sqrt{5}^n}{2}\,\sin(n\varphi)$.
d) Karakteristična jednačina je $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1$, čiji su korenovi $\lambda_{1,2} = -1$ i $\lambda_3 = 1$. Odatle je $y[n] = (C_1 + n\,C_2)\,(-1)^n + C_3$. Na osnovu početnih uslova se dobija $y[n] = \frac{1}{4}\,((5 + 2n)\,(-1)^n + 3)$.

Impulsni odziv

Zadatak 2.22.

Odrediti impulsni odziv diskretnog sistema i ispitati njegovu stabilnost ako je opisan diferencnom jednačinom:
a) $25\,y[n] + 6\,y[n-1] + y[n-2] = x[n]$,
b) $4\,y[n] - 5\,y[n-1] + y[n-2] = x[n]$,
c) $16\,y[n] + 12\,y[n-1] - y[n-2] = x[n]$,
d) $16\,y[n] - y[n-4] = 2\,x[n] - \frac{1}{3}\,x[n-3]$,
e) $3\,y[n] + 4\,y[n-1] - y[n-2] = x[n] - x[n-1]$,
f) $\frac{5}{2}\,y[n] + 6\,y[n-1] + 10\,y[n-2] = x[n]$.

Rešenje:

a) Impulsni odziv se određuje kao odziv sistema koji je bio u mirovanju pre nailaska pobude, a pobuda je diskretni jedinični impuls.

$$x[n] = \delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Problem je ekvivalentiran nalaženju sopstvenog odziva na početne uslove, gde su početni uslovi definisani jediničnim impulsom:

$$25\,h[0] + 6\,\underbrace{h[-1]}_{0} + \underbrace{h[-2]}_{0} = \underbrace{x[0]}_{\delta[0]=1} \quad \Rightarrow \quad 25\,h[0] = 1 \quad \Rightarrow \quad h[0] = \frac{1}{25},$$

$$25\,h[1] + 6\,h[0] + \underbrace{h[-1]}_{0} = \underbrace{x[1]}_{\delta[1]=0} \quad \Rightarrow \quad 25\,h[1] + 6\,h[0] = 0 \quad \Rightarrow \quad h[1] = -\frac{6}{25^2}.$$

Sada se rešava diferencna jednačina sa početnim uslovima.

Karakteristični polinom je:

$$P(\lambda) = 25\,\lambda^2 + 6\,\lambda + 1 = 0,$$

čiji su korenovi $\lambda_{1,2} = -\frac{3}{25} \pm j\,\frac{4}{25} = a \pm j\,b$ koji se može napisati u obliku $\lambda_{1,2} = \rho\,(\cos(\varphi) \pm j\,\sin(\varphi))$, gde je

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

i

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\rho}, \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\rho},$$

pa je

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right), & a > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right), & a < 0. \end{cases}$$

Dobija se da je $\rho == \frac{1}{5}$, $\cos(\varphi) = -\frac{3}{5}$, $\sin(\varphi) = \frac{4}{5}$, pa je $\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) = 2.2143$.

Opšte rešenje diferencne jednačine glasi

$$h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n (C_1\,\cos(n\varphi) + C_2\,\sin(n\varphi))\,\mathrm{u}[n].$$

Kada se odrede neodređeni koeficijenti

$$\left.\begin{array}{l} h[0] = C_1 \\ h[1] = \frac{C_1}{5}\,\cos(\varphi) + \frac{C_2}{5}\,\sin(\varphi) \end{array}\right\} = \begin{array}{l} C_1 = \frac{1}{25} \\ C_2 = -\frac{3}{100} \end{array}$$

dobija se impulsni odziv

$$h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(\frac{1}{25}\,\cos(n\varphi) - \frac{3}{100}\,\sin(n\varphi)\right)\,\mathrm{u}[n].$$

Dovoljan uslov stabilnosti je da su svi korenovi karakterističnog polinoma po modulu manji od 1, odnosno unutar jediničnog kruga kompleksne ravni.

Očigledno je sistem stabilan zato što su mu koreni karakteristične jednačine po modulu manji od 1.

b) Impulsni odziv je oblika $h[n] = (C_1 + C_2\, 4^{-n})\, \mathrm{u}[n]$ sa početnim uslovima $h[0] = \frac{1}{4}$ i $h[1] = \frac{5}{16}$. Dobija se $h[n] = \left(\frac{1}{3} - \frac{4^{-n}}{12}\right) \mathrm{u}[n]$.

Sistem je granično stabilan zato što je jedan koren karakterističnog polinoma unutar jediničnog kruga u kompleksnoj ravni, a drugi je po modulu jednak 1.

c) Impulsni odziv je oblika $h[n] = \left(C_1 \left(\frac{-3+\sqrt{13}}{8}\right)^n + C_2 \left(\frac{-3-\sqrt{13}}{8}\right)^n\right) \mathrm{u}[n]$ sa početnim uslovima $h[0] = \frac{1}{16}$ i $h[1] = -\frac{2}{16^2}$. Dobija se

$$h[n] = \left(\frac{-3+\sqrt{13}}{32\sqrt{13}} \left(\frac{-3+\sqrt{13}}{8}\right)^n + \frac{3+\sqrt{13}}{32\sqrt{13}} \left(\frac{-3-\sqrt{13}}{8}\right)^n\right) \mathrm{u}[n].$$

Sistem je stabilan zato što su mu koreni karakterističnog polinoma po modulu manji od 1.

d) Neka je $h[n] = 2\, h_1[n] - \frac{1}{3}\, h_1[n-3]$, onda je $16\, h_1[n] - h_1[n-4] = \delta[n]$. Kako su početni ulsovi $h_1[0] = \frac{1}{16}$, $h_1[1] = h_1[2] = h_1[3] = 0$ i kako je

$$h_1[n] = \left(C_1\, 2^{-n} + C_2\, (-2)^{-n} + \left(C_3 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + C_4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) 2^{-n}\right) \mathrm{u}[n],$$

dobija se:

$$h_1[n] = \frac{1}{64} \left(2^{-n} + (-2)^{-n} + 2\, 2^{-n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \mathrm{u}[n]$$

Sistem je stabilan.

e) Impulsni odziv je $h[n] = h_1[n] - h_1[n-1]$, pri čemu je $h_1[n] = \left(C_1 \left(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right)^n + C_2 \left(\frac{-2-\sqrt{7}}{3}\right)^n\right) \mathrm{u}[n]$, sa početnim uslovima $h_1[0] = \frac{1}{3}$ i $h_1[1] = -\frac{4}{9}$. Dobija se

$$h_1[n] = \left(\frac{-2+\sqrt{7}}{6\sqrt{7}} \left(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right)^n + \frac{2+\sqrt{7}}{6\sqrt{7}} \left(\frac{-2-\sqrt{7}}{3}\right)^n\right) \mathrm{u}[n].$$

Sistem je stabilan zato što su mu koreni karakterističnog polinoma po modulu manji od 1.

f) Impulsni odziv je oblika $h[n] = 2^n\, (C_1 \cos(n\varphi) + C_2 \sin(n\varphi))\, \mathrm{u}[n]$, gde je $\varphi = -\mathrm{artcg}\left(\frac{4}{3}\right)$, sa početnim uslovima $h[0] = \frac{2}{5}$ i $h[1] = -\frac{24}{25}$. Dobija se $h[n] = 2^n \left(\frac{2}{5} \cos(n\varphi) - \frac{9}{10} \sin(n\varphi)\right) \mathrm{u}[n]$.

Sistem je nestabilan zato što su koreni karakterističnog polinoma po modulu veći od 1.

Prinudni odziv primenom konvolucije

Zadatak 2.23.

Za sistem opisan diferencnom jednačinom $2\, y[n] + 6\, y[n-1] = x[n] - x[n-2]$:

a) Nacrtati blok dijagram sistema.

b) Odrediti impulsni odziv i ispitati stabilnost sistema.

c) Odrediti odziv na diskretni jedinični niz $x[n] = \mathrm{u}[n]$ ako je sistem bio u stanju mirovanja za $n < 0$.

Rešenje:

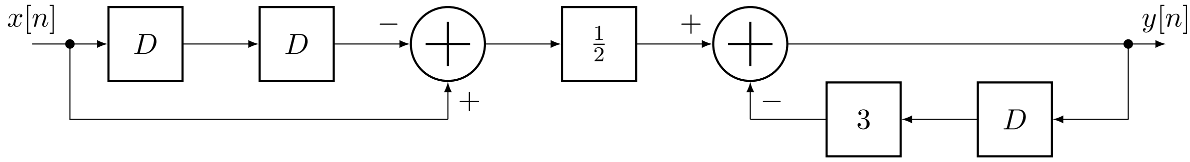
a) Diferencna jednačina može da se napiše u obliku

$$y[n] = -3\, y[n-1] + \frac{x[n] - x[n-2]}{2},$$

pa je blok dijagram sistema prikazan na slici 2.14.1.

b) Impulsni odziv je jednak $h[n] = h_1[n] - h_1[n-2]$, gde se $h_1[n]$ dobija kao impulsni odziv sistema

$$2\, h_1[n] + 6\, h_1[n-1] = \delta[n].$$



Slika 2.23.1.

Rešavanjem se dobija $h_1[n] = \frac{1}{2}\,(-3)^n\,\mathrm{u}[n]$, pa je ukupan impulsni odziv jednak

$$h[n] = \frac{1}{2}\,(-3)^n\left(\mathrm{u}[n] - \frac{\mathrm{u}[n-2]}{9}\right).$$

Sistem je nestabilan zato što nije apsolutno sumabilan, odnosno koren karakterističnog polinoma je po modulu veći od 1.
c) Odziv na pobudu se može odrediti konvolucijom impulsnog odziva sistema i pobude: $y[n] = h[n] * x[n] = h_1[n] * (x[n] - x[n-2]$. Kako je $x[n] - x[n-2] = \mathrm{u}[n] - \mathrm{u}[n-2] = \delta[n] + \delta[n-1]$, odziv sistema je

$$y[n] = h_1[n] * (\delta[n] + \delta[n-1]) = h_1[n] + h_1[n-1] = \frac{1}{2}\,(-3)^n\left(\mathrm{u}[n] - \frac{\mathrm{u}[n-1]}{3}\right).$$

Zadatak 2.24.

Sistem je opisan diferencnom jednačinom $4\,y[n] - 4\,y[n-1] + y[n-2] = x[n]$. Ukoliko je sistem bio u stanju mirovanja za $n < 0$, odrediti odziv na pobudu $x[n] = 3\,\left(\frac{1}{2}\right)^n\,\mathrm{u}[n]$.

Rešenje:

Prvo se određuje impulsni odziv sistema $4\,h[n] - 4\,h[n-1] + h[n-2] = \delta[n]$ čiji su početni uslovi $h[0] = \frac{1}{4}$ i $h[1] = \frac{1}{4}$. Na osnovu karakterističnog polinoma $P(\lambda) = 4\,\lambda^2 - 4\,\lambda + 1 = 4\,\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2$ i početnih uslova se dobija

$$h[n] = \frac{n+1}{4}\,2^{-n}\,\mathrm{u}[n].$$

Odziv na pobudu se dobija kao konvolucija pobudnog signala i impulsnog odziva.

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{m+1}{4}\,2^{-m}\,\mathrm{u}[m]\,3\,2^{-(n-m)}\,\mathrm{u}[n-m] = \frac{3}{4}\,2^{-n}\,\mathrm{u[n]}\sum_{m=0}^{n}(m+1) =$$

$$= \frac{3}{4}\,2^{-n}\,\mathrm{u[n]}\left(m\Big|_0^{n+1} + \left.\frac{m\,(m-1)}{2}\right|_0^{n+1}\right) = \frac{3}{4}\,2^{-n}\,\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\,\mathrm{u[n]}$$

Zadatak 2.25.

Sistem je opisan diferencnom jednačinom $y[n] - y[n-3] = x[n]$. Ukoliko je sistem bio u stanju mirovanja za $n < 0$, odrediti odziv na pobudu $x[n] = \mathrm{u}[n]$.

Rešenje:

Prvo se određuje impulsni odziv sistema $h[n] - h[n-3] = \delta[n]$ čiji su početni uslovi $h[0] = 1$, $h[1] = 0$ i $h[2] = 0$. Na osnovu karakterističnog polinoma $P(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)\,(\lambda^2 + \lambda + 1)$ se dobija

$$h[n] = \left(C_1 + C_2\,\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + C_3\,\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)\,\mathrm{u}[n].$$

Određivanjem neodređenih konstanti na osnovu početnih uslova je

$$h[n] = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)\mathrm{u}[n].$$

Odziv na pobudu se dobija kao konvolucija pobudnog signala i impulsnog odziva.

$$y[n] = \frac{1}{3}\,\mathrm{u[n]}\sum_{m=0}^{n}\left(1+\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{n+1}{3} + \frac{2}{3}\,\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\,\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)\mathrm{u[n]}$$

Zadatak 2.26.

Ako je impulsni odzvi diskretnog sistema jednak:
a) $h[n] = n\,A^n\,\mathrm{u}[n]$,
b) $h[n] = A\,\delta[n] + \alpha\,n\,B^n\,\mathrm{u}[n]$, primenom konvolucije naći odziv na diskretni jedinični niz.

Rešenje:

a) $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m\,A^m\,\mathrm{u}[m]\,\mathrm{u}[n-m] = \mathrm{u}[n]\sum_{m=0}^{n} m\,A^m$ Neka je $f[m] = m$ i $\Delta g[m] = A^m$, tada je $g[m] = \frac{A^m}{A-1}$. Na osnovu teoreme o parcijalnoj akumulaciji i Njutm-Lajbnicove teoreme je

$$y[n] = \mathrm{u}[n]\left(\left.\frac{m\,A^m}{A-1}\right|_0^{n+1} - \sum_{m=0}^{n}\frac{A^{m+1}}{A-1}\right) = \mathrm{u}[n]\left(\frac{(n+1)\,A^{n+1}}{A-1} + \left.\frac{A^{m+1}}{(A-1)^2}\right|_0^{n+1}\right),$$

$$y[n] = \frac{n\,A^{n+2} - (n+1)\,A^{n+1} + A}{(A-1)^2}\,\mathrm{u}[n].$$

b) Na osnovu tačke a) je: $y[n] = A\,\mathrm{u}[n] + \alpha\,\frac{n\,B^{n+2} - (n+1)\,B^{n+1} + B}{(B-1)^2}\,\mathrm{u}[n]$.

Zadatak 2.27.

Za diskretne sisteme bez početnih uslova koji su definisani sledećim diferencnim jednačinama prvo odrediti impulsni odziv, a zatim odziv na pobudu $x[n] = 2^{-n+1}\,\mathrm{u}[n]$:
a) $y[n] + 4\,y[n-2] = x[n] + x[n+2]$,
b) $y[n] + y[n-1] + y[n-2] = x[n-1]$,
c) $y[n] - \frac{5}{6}\,y[n-1] - \frac{1}{6}\,y[n-2] = x[n-1]$,
d) $y[n] + y[n-1] + \frac{1}{3}\,y[n-2] + \frac{1}{27}\,y[n-3] = x[n]$.

Rešenje:

a) Pomoćni impulsni odziv diferencne jednačine $h_1[n] + 4\,h_1[n-2] = \delta[n]$ je $h_1[n] = 2^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{u}[n]$. Zato je $h[n] = h_1[n] + h_1[n+2] = -3\cdot 2^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{u}[n] + \delta[n+2]$.

Odziv na pobudu se dobija konvolucijom.

$$y[n] = x[n]*h[n] = x[n+2] - 3\,\mathrm{u}[n]\sum_{m=0}^{n} 2\cdot 2^{-(n-m)}\,2^m\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = \left(2^{-n+3} - 3\cdot 2^{-n}\sum_{m=0}^{n}4^m\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right)\mathrm{u[n]}$$

Kako je

$$\sum_{m=0}^{n}4^m\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = \frac{1}{17}\left(1 + 4^{n+1}\left(4\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right),$$

dobija se:

$$y[n] = \left(2^{-n+3} - \frac{3}{17}\,2^{-n}\,\left(1 + 4^{n+1}\,\left(4\,\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right)\right)\,\mathrm{u}[n].$$

b) $h[n] = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\,\mathrm{u}[n-1]$

$$y[n] = \frac{4\sqrt{3}}{21}\,\left(\sqrt{3}\,2^{-n} + 4\,\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - 2\,\sin\left(\frac{2\pi\,(n+1)}{3}\right)\right)\,\mathrm{u}[n-1]$$

c) $h[n] = \frac{6}{7}\,\left(1 - (-6)^{-n}\right)\,\mathrm{u}[n-1]$

$$y[n] = -\frac{2^{n+2}}{7}\,\left(6\,(2^n - 1) + \frac{3}{4}\,\left(1 - (-3)^{-n}\right)\right)\,\mathrm{u}[n-1]$$

d) $h[n] = \left(1 + \frac{3}{2}\,n + \frac{n^2}{2}\right)\,(-3)^{-n}\,\mathrm{u}[n]$

$$y[n] = \left((-3)^{-n}\,\frac{25\,n^2 + 105\,n + 98}{125} + \frac{27}{125}\,2^{1-n}\right)\,\mathrm{u}[n]$$

Zadatak 2.28.

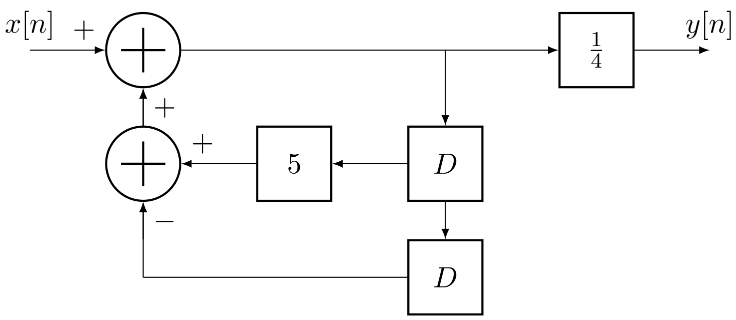
Diskretni sistem je opisan diferencnom jednačinom $4\,y[n] - 5\,y[n-1] + y[n-2] = x[n]$.
a) Nacrtati blok dijagram sistema koristeći standardne blokove.
b) Naći impulsni odziv sistema.
c) Naći odziv sistema na pobudu $x[n] = (1 - 2^{-n})\,\mathrm{u}[n-2]$.
d) Objasniti da li je sistem stabilan.

Rešenje:

a) Na osnovu transformisane diferencne jednačine

$$y[n] = \frac{5\,y[n-1] - y[n-2] + x[n]}{4}$$

je prikazan blok dijagram sistema na slici 2.28.1.



Slika 2.28.1.

b) $h[n] = \frac{1}{3}\,\left(1 - 4^{-(n+1)}\right)\,\mathrm{u}[n]$
c) $y[n] = \frac{1}{18}\,(2 \cdot 4^{-n} + 9 \cdot 2^{-n} + 6\,n - 11)\,\mathrm{u}[n-2]$
d) Za $n \gg 1$ je $y[n] \approx \frac{n}{3}$, što znači da je odziv neograničen. Naime: $\lim\limits_{n\to\infty} y[n] = \infty$.

Zadatak 2.29.

Diskretni sistem je opisan diferencnom jednačinom $y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4}\,y[n-2] - \frac{1}{4}\,y[n-3] = x[n]$.
a) Nacrtati blok dijagram sistema koristeći standardne blokove.

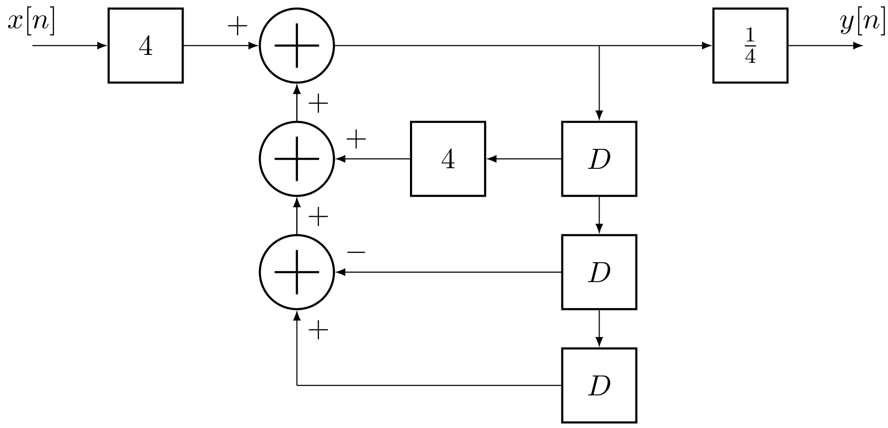
b) Naći impulsni odziv sistema.
c) Objasniti da li je sistem stabilan.

Rešenje:

a) Na osnovu transformisane diferencne jednačine

$$y[n] = \frac{4\,y[n-1] - y[n-2] + y[n-3] + 4\,x[n]}{4}$$

je prikazan blok dijagram sistema na slici 2.29.1.



Slika 2.29.1.

b) $h[n] = \frac{1}{5}\left(4 + 2^{-n}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2\,\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right)\mathrm{u}[n]$
c) Uslov stabilnosti je

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[m]| < \infty,$$

odnosno trbalo bi da sledeći red ima konačnu sumu:

$$\frac{1}{5}\sum_{m=0}^{n}\left|\left(4 + 2^{-m}\left(\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) + 2\,\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right)\right)\right|,$$

ali to nije zaovoljeno. Red divergira, pa je sistem nestabilan.

Potpuni odziv diskretnog sistema

Do odziva se dolazi metodom superpozicije: zbirom sopstvenog (autonomnog) odziva i prinudnog odziva mirnog sistema (odziva mirnog sistema sa nultim početnim uslovima) na primenjenu pobudu:

$$y[n] = y_s[n] + y_p[n] = y_s[n] + h[n] * x[n].$$

Sopstveni odziv opisuje ponašanje sistema koje ne zavisi od pobude koja počinje da deluje u trenutku $t = 0$. Sistem može da ima izlaz različit od nule jer je bio pobuđen u prošlosti i izveden iz mirnog stanja što je opisano početnim uslovima. Pri tome sopstveni odziv u opštem slučaju nije jednak prelaznom odzivu, a prinudni odziv nije u opšrem slučaju jednak isto što i ustaljeni odziv.

Ako su početni uslovi zadati za odbirke pre nailaska pobude, oni su nezavisni od pobude i na osnovu njih se može odrediti sopstveni odziv sistema.

Zadatak 2.30.

Primenom konvolucije naći odziv sistema opisanog diferencnom jednačinom: $y[n] - 4\,y[n-2] = x[n]$ sa početnim uslovima $y[-1] = 0$ i $y[-2] = \frac{1}{2}$ kada se primeni pobuda $x[n] = \mathrm{u}[n]$.

Rešenje:

Sopstveni odziv se dobija rešavanjem homogene diferencne jednačine sa početnim uslovima:

$$y_s[n] - 4\,y_s[n-2] = 0, \quad y_s[-1] = 0,\, y_s[-2] = \frac{1}{2},$$

$$y_s[n] = C_1\,2^n + C_2\,(-2)^n.$$

$$\left.\begin{array}{l} y_s[-1] = 0 = \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{2} \\ y_s[-2] = \frac{1}{2} = \frac{C_1}{4} - \frac{C_2}{4} \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad C_1 = C_2 = 1$$

$$y_s[n] = 2^n + (-2)^n$$

Da bi se odredio prinudni odziv na pobudu $x[n]$ pomoću konvolucije, potrebno je prvo naći impulsni odziv sistema. Za diferencnu jednačinu koja opisuje impulsni odziv $h[n] - 4\,h[n-2] = \delta[n]$, određuju se početni uslovi:

$$h[0] - 4\,\underbrace{h[-2]}_{0} = \delta[0] = 1 \qquad h[0] = 1,$$

$$h[1] - 4\,\underbrace{h[-1]}_{0} = \delta[1] = 0 \qquad h[1] = 0.$$

Impulsni odziv sistema je karakteristika sistema, a ne stvarni odziv, tako da početni uslovi dobijeni na osnovu prethodne jednačine nisu pravi početni uslovi, već korak u postupku određivanja impulsnog odziva. Jedina situacija gde se odziv i impulsni odziv poklapaju jeste kada se traži odziv sistema u mirovanju na jedinični impuls.

$$\left.\begin{array}{l} h[n] = (C_3\,(-2)^n + C_4\,2^n)\,\mathrm{u}[n] \\ \left.\begin{array}{l} C_3 + C_4 = 1 \\ -2\,C_3 + 2\,C_4 = 0 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad C_3 = C_4 = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad h[n] = \frac{2^n + (-2)^n}{2}\,\mathrm{u}[n]$$

$$y_p[n] = \frac{-1 + (-2)^n + 3\cdot 2^n}{3}\,\mathrm{u}[n]$$

Potpuni odziv glasi:

$$y[n] = 2^n + (-2)^n + \frac{-1 + (-2)^n + 3\cdot 2^n}{3}\,\mathrm{u}[n].$$

Kao što se vidi prinudni odziv postoji samo za $n \geq 0$, što je i očekivano s obzirom na kauzalnost sistema. Odziv na početne uslove, odnosno sopstveni odziv, postoji za $-\infty < n < +\infty$ jer početni uslovi opisuju ponašanje sistema koje je postojalo i pre pobude.

Zadatak 2.31.

Primenom konvolucije naći odziv sistema opisanog diferencnom jednačinom: $y[n] + 2\,y[n-1] - 15\,y[n-2] = x[n]$ sa početnim uslovima $y[0] = 2$ i $y[1] = -2$ kada se primeni pobuda $x[n] = n\,6^{-n}\,\mathrm{u}[n]$.

Rešenje:

Potpuni odziv će biti određen primenom superpozicije: prvo računanjem sopstvenog odziva, a zatim odziva na pobudu.

Sopstveni odziv se dobija rešavanjem diferencne jednačine $y_s[n] + 2\,y_s[n-1] - 15\,y_s[n-2] = 0$, gde se početni uslovi određuju na osnovu sledećih jednačina:

$$\left.\begin{array}{l} y[1] + 2\,y[0] - 15\,y[-1] = \frac{1}{6} \\ y[0] + 2\,y[-1] - 15\,y[n-2] = 0 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} y[-1] = y_s[-1] = \frac{11}{90}, \\ y[-2] = y_s[-2] = \frac{101}{675}. \end{array}$$

$$y_s[n] = C_1\,3^n + C_2\,(-5)^n$$
$$\left.\begin{array}{l}\frac{C_1}{3} - \frac{C_2}{5} = \frac{11}{90}\\ \frac{C_1}{9} + \frac{C_2}{25} = \frac{101}{675}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad C_1 = \tfrac{47}{48}, \quad C_2 = \tfrac{49}{48}$$

Da bi se odredio prinudni odziv na pobudu $x[n]$ pomoću konvolucije, potrebno je prvo naći impulsni odziv sistema. Za diferencnu jednačinu koja opisuje impulsni odziv $h[n]+2\,h[n-1]-15\,h[n-2] = \delta[n]$, određuju se početni uslovi $h[0] = 1$ i $h[1] = -2$.

Impulsni odziv sistema je karakteristika sistema, a ne stvarni odziv koji se traži. Početni uslovi određeni za impulsni odziv nisu pravi početni uslovi, već korak u postupku određivanja impulsnog odziva.

$$h[n] = (C_3\,3^n + C_4\,(-5)^n)\,\mathrm{u}[n]$$
$$\left.\begin{array}{l}C_3 + C_4 = 1\\ 3\,C_3 - 5\,C_4 = -2\end{array}\right\} \Rightarrow \quad C_3 = \tfrac{3}{8}, \quad C_4 = \tfrac{5}{8}$$

$$y_p[n] = h[n] * x[n] = C_3\,3^n\,\mathrm{u}[n] \sum_{m=0}^{n} m\,18^{-m} + C_4\,(-5)^n\,\mathrm{u}[n] \sum_{m=0}^{n} m\,(-30)^{-m}$$

Kako je

$$\sum_{m=0}^{n} m\,a^{-m} = \frac{a - a\cdot a^{-n} - n\,(a-1)\,a^{-n}}{(a-1)^2},$$

dobija se da je

$$y_p[n] = \left(\frac{C_3}{289}\,6^{-n}\,(18^{n+1} - 17\,n - 18) + \frac{C_4}{961}\,6^{-n}\,((-30)^{n+1} + 31\,n + 30)\right)\mathrm{u}[n].$$

Potpuni odziv glasi:

$$y[n] = C_1\,3^n + C_2\,(-5)^n + \left(\frac{C_3}{289}\,6^{-n}\,(18^{n+1} - 17\,n - 18) + \frac{C_4}{961}\,6^{-n}\,((-30)^{n+1} + 31\,n + 30)\right)\mathrm{u}[n].$$

Zadatak 2.32.

Kauzalni vremenski invarijantni sistem opisan je diferencnom jednačinom: $y[n]-5\,y[n-1]+6\,y[n-2] = 2\,x[n-1]$. Ako su početni uslovi $y[-1] = -2$ i $y[0] = -1$:
a) Nacrtati blok dijagram sistema.
b) Naći odziv sistema na pobudu $x[n] = \delta[n]$ za $n \geq 0$.
c) Naći odziv sistema na pobudu $x[n] = \delta[n]$ za $n < 0$.
d) Ispitati stabilnost i invertibilnost sistema. Ako je sistem invertibilan, naći inverzan sistem.

Rešenje:

a) Na osnovu transformisane diferencne jednačine

$$y[n] = 2\,x[n-1] + 5\,y[n-1] - 6\,y[n-2]$$

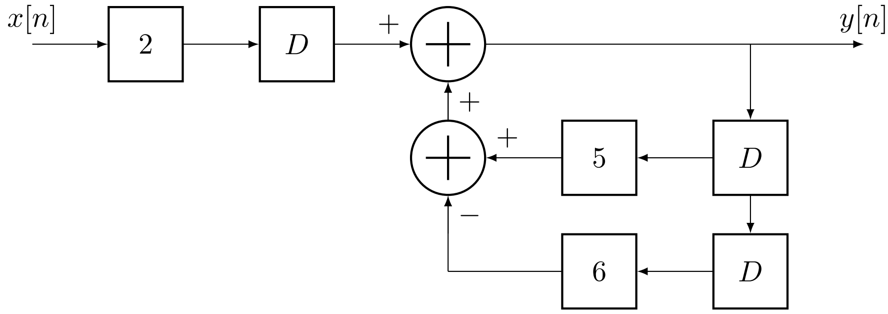
je prikazan blok dijagram sistema na slici 2.32.1.
b), c) Rešenje se može naći superpozicijom prinudnog i sopstvenog odziva.

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 5\,\lambda + 6 = (\lambda - 2)\,(\lambda - 3)$$

$$y_s[n] = C_1\,2^n + C_2\,3^n$$
$$\left.\begin{array}{l}C_1 + C_2 = -1\\ \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} = -2\end{array}\right\} \Rightarrow \quad C_1 = -10, \quad C_2 = 9$$

Prinudni odziv se dobija konvolucijom pobude sa impulsnim odziv. Impulsni odziv $h[n] - 5\,h[n-1] + 6\,h[n-2] = \delta[n]$ je $h[n] = (3^{n+1} - 2^{n+1})\,\mathrm{u}[n]$. Odziv na pobudu je

$$y_p[n] = h[n] * 2\,\delta[n-1] = 2\,h[n-1] = 2\,(3^n - 2^n)\,\mathrm{u}[n-1] = 2\,(3^n - 2^n)\,\mathrm{u}[n].$$



Slika 2.32.1.

Potpuni odziv je

$$y[n] = 2\left(3^n - 2^n\right)\mathrm{u}[n] - 10 \cdot 2^n + 9 \cdot 3^n,$$

pa je

$$y[n] = \begin{cases} 11 \cdot 3^n - 12 \cdot 2^n, & n \geq 0, \\ -10 \cdot 2^n + 9 \cdot 3^n & n < 0. \end{cases}$$

d) Sistem je nestabilan zato što su mi koreni karakterističnog polinoma veći od 1.

Sistem jeste invertibilan zato što se pobuda može rekonstruisati na osnovu poznavanja odziva:

$$x[n] = \frac{1}{2}\left(y[n+1] - 5\,y[n] + 6\,y[n-1]\right).$$

Inverzan sistem bi bio opisan diferencnom jednačinom

$$y[n] = \frac{1}{2}\left(x[n+1] - 5\,x[n] + 6\,x[n-1]\right).$$

Metod određivanja potpunog odziva operacionim racunom

Postoji više metoda u vremenskom domenu kojima se rešavaju linearne nehomogene diferencne jednačine sa konstantnim koeficijentima:

- heuristički metod* (metod tipa „seti se”),
- operacioni račun,
- metod neodređenih koeficijenata*,
- metod varijacije konstanti*,
- metod konvolucije.

Za standardne oblike pobudnih signala i date postinicijalne uslove operacioni racun se pokazao kao najefikasniji.

Univerzalni metodi koji daju rešenje u svim slučajevima su konvolucija, operacioni račun i metod varijacije konstanti. Metod varijacije konstanti je ekvivalentan metodu varijacije konstanti koji se primenjuje kod običnih diferencijlnih jednačina, samo što se umesto integrala koriste sume, a umesto izvoda diference. Međutim, kako se u praktičnim problemima skoro uvek kao pobuda javlja jedan tip signala, nekad je jednostavnije koristiti heurističke metode ili metod neodređenih koeficijenata.

Kako je nehomogena diferencna jednačina oblika

$$a_k\,y[n] + a_{k-1}\,y[n-1] + \cdots + a_0\,y[n-k] = x[n], \tag{3.4}$$

potpuni odziv se može odrediti kao zbir (superpozicija) dva rešenja: homogenog resenja i partikularnog rešenja.

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

Homogeno rešenje $y_h[n]$ se u literatiri sreće pod nazivima prelazni ili tranzijentni i predstavlja rešenje homogene diferencne jednačine:

$$a_k\, y_h[n] + a_{k-1}\, y_h[n-1] + \cdots + a_0\, y_h[n-k] = 0.$$

Partikularno rešenje polazne diferencijalne jednacine u nekim slučajevima se jos naziva ustaljeni ili steady-state odziv.

Operacioni račun

Koristeći operacioni račun diferencna jednačina (3.4) može da se napiše kao

$$P(E)\, y_p[n-k] = x[n].$$

Partikularno rešenje koje odgovara prinudnom odzivu se dobija kao

$$y_p[n-k] = \frac{1}{P(E)}\, x[n],$$

gde je $P(E)$ polinom k-tog reda. Kako svaka racionalna funkcija može da se razvije u Maklorenov potencijalni red, važi da je:

$$\frac{1}{P(E)}\, x[n] = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \alpha_m\, E^m \right) x[n], \quad \alpha_m = \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{P(E)} \right)^{(k)} \Bigg|_{E=0}.$$

Na osnovu oblika pobudnog signala $x[n]$ se razlikuje nekoliko slučajeva:

1. Ako je $x[n] = C$, gde je $C \in \mathbb{R}$ konstanta, tada je i $Ex[n] = x[n+1] = C$, pa je

$$\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \alpha_m\, E^m \right) C = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \alpha_m\, 1^m \right) C = \frac{C}{P(1)}.$$

2. Ako je $x[n] = C\, a^n$, gde je $C \in \mathbb{R}$ konstanta, a a se razlikuje od svih korena karakterističnog polinoma, važi da je:

$$\frac{1}{P(E)}\, C\, a^n = a^n\, \frac{1}{P(aE)}\, C = C\, a^n\, \frac{1}{P(a)}.$$

3. Ako je $x[n] = P_m(n)\, a^n$, gde je P_m polinom m-tog reda i gde se a razlikuje od svih korena karakterističnog polinoma, može se napisati:

$$\frac{1}{P(E)}\, P_m(n)\, a^n = a^n\, \frac{1}{P(aE)}\, P_m(n) = a^n\, \frac{1}{P(a\,\Delta + a)}\, P_m(n) = a^n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k\, \Delta^k \right) P_m(n),$$

gde su β_k koeficijenti Maklorenovog razvoja.

Pošto važi da je $\Delta^k P_m(n) = 0$ za $k > m$, sleduje da je:

$$\frac{1}{P(E)}\, P_m(n)\, a^n = a^n \left(\sum_{k=0}^{m} \beta_k\, \Delta^k \right) P_m(n).$$

Metod neodređenih koeficijenata

U većini praktičnih slučajeva pobudni signali su oblika $x[n] = P_m(n)\, a^{\Omega n}$, gde je m red polinoma $P_m(n)$, a a i Ω mogu biti kompleksni. Ukoliko a nije rešenje karakterističnog polinoma, ustaljeni odziv linearnog, vremenski invarijantnog sistema će biti istog oblika kao i pobuda: $y_p[n] = Q_m(n)\, a^{\Omega n}$. Koeficijenti polinoma $Q_m(n)$ se određuju zamenom rešenja $y_p[n]$ u početnu diferencnu jednačinu. Međutim, takav način rešavanja nije ništa jednostavniji od primene operacionog računa.

Ukoliko je a nula k-tog reda karakterističnog polinoma, pobuda je u „rezonansi" sa sistemom, pa se dobija mnogo veće pojačanje. U tom slučaju je ustaljeni odziv oblika $y[n] = n^k\, Q_m(n)\, a^{\Omega n}$. Razlikuje se nekoliko karakterističnih slučajeva kada a nije nula karakterističnog polinoma:

1. Kada je $m = 0$ i $a = 1$, tada je pobuda konstantna $x[n] = A$, a odziv je $y[n] = B = \frac{A}{P(1)}$, gde je $P(E)$ karakterističn polinom sistema. Ni u ovom slučaju nema potrebe za metodom neodređenih koeficijenata.

2. Kada je $m = 0$, $a \neq 1$ i $a \in \mathbb{R}$, pobuda je eksponencijalna $x[n] = A\, a^{n\Omega}$, a odziv je $y[n] = A\, a^n \frac{1}{P(1)}$, gde je $P(E)$ karakterističn polinom sistema. Ni u ovom slučaju nema potrebe za metodom neodređenih koeficijenata.

3. Kada je $m = 0$, $a \neq 1$ i $a \in \mathbb{C}, a \notin \mathbb{R}$, što odgovara slučaju $x[n] = A\, \cos(n\Omega) + B\, \sin(n\Omega)$. Tada je odziv oblika $y[n] = C\, \cos(n\Omega) + D\, \sin(n\Omega)$, a konstante C i D se mogu odrediti metodom neodređenih koeficijenata zamenom partikularnog rešenja u diferencnu jednačinu. Generealno, operacioni račun može brže dovesti do rešenja.

4. Kada je $x[n] = P_m(n)\, a^{n\Omega}$, odziv je oblika $y[n] = Q_m(n)\, a^{n\Omega}$. U nekim slučajevima ova metoda može dovesti do bržeg rešenja od operacionog računa.

Zadatak 2.33.

Odrediti odziv diskretnih sistema opisanih sledećim diferencnim jednačinama:
a) $y[n] - 4\, y[n-2] = x[n]$, $x[n] = 1$, $y[0] = 0$ i $y[1] = 4$;
b) $y[n] - 2\, y[n-1] + 1.25\, y[n-2] - 0.25\, y[n-3] = x[n]$, $x[n] = 3^{-n}$, $y[1] = 0$, $y[2] = y[0] = 2$;
c)* $y[n] - y[n-1] = x[n]$, $x[n] = (2n+1)\, \mathrm{u}[n]$, $y[0] = 0$;
d)* $y[n] + 2\, y[n-1] - 15\, y[n-2] = x[n]$, $x[n] = n^2\, 2^n - 3\, n$, $y[0] = y[1] = 0$;
e)* $y[n] - 3\, y[n-1] + 2\, y[n-2] = x[n]$, $x[n] = (1 + n\, 2^n)\, \mathrm{u}[n]$, $y[0] = 0$, $y[1] = 1$;
f) $y[n] - 5\, y[n-1] + 6\, y[n-2] = x[n]$, $x[n] = 4^n\, \mathrm{u}[n]$, $y[0] = 0$, $y[1] = 1$.

Rešenje:

a) Prvi način, heuristički metod:
Odziv sistema se dobija rešavanjem nehomogene diferencne jednačine

$$y[n] - 4\, y[n-2] = 1,$$

koja može da se napiše i u obliku

$$-y[n-1] + 4\, y[n-3] = -1.$$

Sabiranjem prethodnih jednačina se dobija

$$y[n] - y[n-1] - 4\, y[n-2] + 4\, y[n-3] = 0.$$

Dobijena jednačina je homogena, a njen karakteristični polinom glasi

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 4\,\lambda + 4 = (\lambda - 1)\,(\lambda - 2)\,(\lambda + 2).$$

$$y[n] = C_1\, 1^n + C_2\, 2^n + C_3\, (-2)^n$$

Pošto ima tri nepoznata koeficijenta, potreban je još jedan početni uslov koji se dobija rekurzivnim računanjem kao $y[2] = 4\, y[0] + x[2] = 1$. Formira se sistem jednačina

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= y[0] = 0, \\ C_1 + 2\, C_2 - 2\, C_3 &= 4, \\ C_1 + 4\, C_2 + 4\, C_3 &= 1, \end{aligned}$$

na osnovu kojih je $C_1 = -\frac{1}{3}$, $C_2 = \frac{5}{4}$ i $C_3 = -\frac{11}{12}$. Potpuni odziv je

$$y[n] = -\frac{1}{3} + \frac{5 \cdot 2^n}{4} - \frac{11 \cdot (-2)^n}{12}.$$

Drugi način, operacioni račun: Homogeno rešenje se dobija rešavanjem

$$y_h[n] - 4\,y_h[n-2] = 0$$

i oblika je $y_h[n] = C_1\,2^n + C_2\,(-2)^n$.

Diferencna jednačina može da se napiše kao

$$(E^2 - 4)\,y[n-2] = x[n],$$

pa je $P(E) = E^2 - 4$. Na osnovu oblika pobude $x[n] = 1$, dobija se

$$y_p[n-2] = \frac{1}{P(1)}\,1 = -\frac{1}{3}.$$

Pomeraj na konstantu daje istu konstantu, pa je $y_p[n] = -\frac{1}{3}$.

Opšte rešenje glasi $y[n] = C_1\,2^n + C_2\,(-2)^n - \frac{1}{3}$, pa se na osnovu početnih uslova računa da je $C_1 = \frac{5}{4}$ i $C_2 = -\frac{11}{12}$.

$$y[n] = -\frac{1}{3} + \frac{5\cdot 2^n}{4} - \frac{11\cdot(-2)^n}{12}.$$

b) Karakteristični polinom glasi

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\,\lambda^2 + 1.25\,\lambda - 0.25 = (\lambda - 1)\,(\lambda - 0.5)^2,$$

pa je homogeno rešenje

$$y_h[n] = C_1 + (C_2 + n\,C_3)\,2^{-n}.$$

Partikularno rešenje se dobija iz

$$y_p[n-3] = \frac{1}{P(E)}\,3^{-n} = \frac{1}{E^3 - 2\,E^2 + 1.25\,E - 0.25}\,3^{-n} = 3^{-n}\,\frac{1}{P\left(\frac{1}{3}\right)} = -2\,3^{-(n-3)},$$

$$y_p[n-3] = -2\,3^{-n}.$$

Kako je

$$y[n] = C_1 + (C_2 + n\,C_3)\,2^{-n} - 2\,3^{-n},$$

određuju se koeficijenti $C_1 = \frac{92}{9}$, $C_2 = -\frac{56}{9}$ i $C_3 = -\frac{116}{9}$.

c) Heuristički metod: U ovom slučaju je očigledno da je $D\Delta y[n] = (2n+1)\,\mathrm{u}[n]$, odnosno da je $ED\Delta y[n] = E((2n+1)\,\mathrm{u}[n]) = (2n+3)\,\mathrm{u}[n+1]$. Prema tome je

$$y[n] = \sum(2m+3)\,\mathrm{u}[m+1] = \left(C + 2\,\frac{n\,(n-1)}{2} + 3n\right)\,\mathrm{u}[n] = (C + n\,(n+2))\,\mathrm{u}[n].$$

Pošto je $y[0] = 0$, očigledno je da je $C = 0$. To znači da je $y[n] = n\,(n+2)\,\mathrm{u}[n]$.

Potrebno je odrediti i rešenje za $n < 0$. Pošto je $x[n] = 0$ za $n < 0$, potrebno je rešiti diferencnu jednačinu $y[n] - y[n-1] = 0$. Očigledno je da je $y[n] = A$ konstantno za $n < 0$. Pošto je ispunjeno da je $y[0] = 0$, važi da je $y[-1] = y[0] - x[0] = -1$. Znači da je $A = -1$. Sada može da se napiše:

$$y[n] = n\,(n+2)\,\mathrm{u}[n] - \mathrm{u}[-n-1] = (n+1)^2\,\mathrm{u}[n] - 1.$$

d) Prvi način, operacioni račun:

Karakteristična jednačina glasi:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\,\lambda - 15 = (\lambda - 3)\,(\lambda + 5),$$

pa je

$$y_h[n] = C_1\,3^n + C_2\,(-5)^n.$$

Partikularno rešenje je

$$y_p[n-2] = \frac{1}{P(E)}\,x[n] = \frac{1}{P(E)}\,n^2\,2^n - \frac{1}{P(E)}\,3n = 2^n\,\frac{1}{P(2E)}\,n^2 - \frac{1}{P(E)}\,3n,$$

gde su

$$\begin{aligned} P(E) &= E^2 + 2\,E - 15 = (\Delta + 1)^2 + 2\,(\Delta + 1) - 15 = \Delta^2 + 4\,\Delta - 12 = R(\Delta), \\ P(2E) &= 4\,E^2 + 4\,E - 15 = 4\,(\Delta + 1)^2 + 4\,(\Delta + 1) - 15 = 4\,\Delta^2 + 12\,\Delta - 7 = R_1(\Delta). \end{aligned}$$

Racionalnu funkciju $\frac{1}{R_1(\Delta)}$ je potrebno razviti u red samo do drugog stepena jer je n^2 polinom drugog reda, a funkciju $\frac{1}{R(\Delta)}$ samo do prvog stepena jer je $3n$ prvog reda.

Razvoj $\frac{1}{R(\Delta)}$ je:

$$\begin{aligned} \frac{1}{0!}\,\frac{1}{\Delta^2+4\,\Delta-12}\bigg|_{\Delta=0} &= -\frac{1}{12}, \\ -\frac{1}{1!}\,\frac{8\,\Delta+4}{(\Delta^2+4\,\Delta-12)^2}\bigg|_{\Delta=0} &= -\frac{1}{36}, \end{aligned}$$

dok je razvoj $\frac{1}{R_1(\Delta)}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{0!}\,\frac{1}{4\,\Delta^2+12\,\Delta-7}\bigg|_{\Delta=0} &= -\frac{1}{7}, \\ -\frac{1}{1!}\,\frac{8\,\Delta+12}{(4\,\Delta^2+12\,\Delta-7)^2}\bigg|_{\Delta=0} &= -\frac{12}{49}, \\ -\frac{1}{2!}\,\frac{8-2\,(4\,\Delta^2+12\,\Delta-7)\,(8\,\Delta+12)^2}{(4\,\Delta^2+12\,\Delta-7)^4}\bigg|_{\Delta=0} &= -\frac{172}{343}. \end{aligned}$$

Tako je

$$\begin{aligned} \frac{1}{R(\Delta)} &= -\frac{1}{12} - \frac{1}{36}\,\Delta + \cdots, \\ \frac{1}{R_1(\Delta)} &= -\frac{1}{7} - \frac{12}{49}\,\Delta - \frac{172}{343}\,\Delta^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Dobija se

$$y_p[n-2] = 2^n\,\frac{1}{R_1(\Delta)}\,n^2 - \frac{1}{R(\Delta)}\,3n = 2^n\,\left(-\frac{1}{7} - \frac{12}{49}\,\Delta - \frac{172}{343}\,\Delta^2 + \cdots\right)\,n^2 - \left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{36}\,\Delta + \cdots\right)\,3n.$$

Pošto je $\Delta^2 n^2 = 2$, $\Delta n^2 = 2n + 1$ i $3\,\Delta n = 3$, dobija se

$$y_p[n-2] = 2^n\,\left(-\frac{n^2}{7} - \frac{12\,(2n+1)}{49} - \frac{172 \cdot 2}{343}\right) + \frac{3n}{12} + \frac{3}{36},$$

$$y_p[n] = 2^{n+2}\,\left(-\frac{(n+2)^2}{7} - \frac{12\,(2n+5)}{49} - \frac{344}{343}\right) + \frac{n+2}{4} + \frac{1}{12},$$

$$y_p[n] = -2^{n+2}\,\frac{1}{343}\,(49\,n^2 + 364\,n + 960) + \frac{3n+7}{12}.$$

Potrebno je još odrediti konstante C_1 i C_2 na osnovu početnih uslova. DObija se $C_1 = \frac{21}{2}$ i $C_2 = \frac{8}{100}$.

Napomena: Razvijanje u Maklorenov red računanjem izvoda može da bude komplikovano u slučaju polinoma višeg stepena. Zato se može koristiti razvoj racionalne funkcije u parcijalne razlomke. Na primer:

$$P(E) = (E-3)\,(E+5) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{P(E)} = \frac{\frac{1}{8}}{E-3} - \frac{\frac{1}{8}}{E+5}.$$

Primenom formalnog razvoja

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{y}\,\frac{1}{x\,y^{-1}+1} = \frac{1}{y}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\,(x\,y^{-1})^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\,x^k\,y^{-k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\,x^{k-1}\,y^{-k},$$

se dobija

$$\frac{1}{R(\Delta)} = \frac{1/8}{\Delta-2} - \frac{1/8}{\Delta+6} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{+\infty}(-2^{-k} - (-1)^{k-1}\,6^{-k})\,\Delta^{k-1} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{+\infty}(-2^{-k} + (-1)^k\,6^{-k})\,\Delta^{k-1}.$$

Nastavkom rešavanja se dobija isti rezultat.

Drugi način, metod neodređenih koeficijenata:

Pobuda u ovom slučaju glasi $x[n] = n^2\, 2^n - 3n$, što je superpozicija dve pobude $x[n] = P_2(n)\, 2^n + P(n)$, gde je $P_2(n) = n^2$ i $P_1(n) = -3n$. Partikularno rešenje je oblika $y_p[n] = (A_1\, n^2 + A_2\, n + A_3)\, 2^n + B_1\, n + B_2$.

Zamenom u početnu diferencnu jednačinu

$$y_p[n] + 2\, y_p[n-1] - 15\, y_p[n-2] = x[n]$$

se dobija

$$(A_1\, n^2 + A_2\, n + A_3)\, 2^n + B_1\, n + B_2 + 2\left((A_1\,(n-1)^2 + A_2\,(n-1) + A_3)\, 2^{n-1} + B_1\,(n-1) + B_2\right) -$$

$$-15\left((A_1\,(n-2)^2 + A_2\,(n-2) + A_3)\, 2^{n-2} + B_1\,(n-2) + B_2\right) = n^2\, 2^n - 3n.$$

Sređivanjem izraza se dobija

$$-\frac{56A_1 - 26A_2 + 7A_3 - (52A_1 - 7A_2)\, n + 7A_1\, n^2}{8}\, 2^n - 4\,(3B_2 - 7B_1) - 12B_1\, n = n^2\, 2^n - 3n.$$

Rešavanjem dobijenog sistema jednačina

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{56A_1-26A_2+7A_3}{8} = 0 \\ \frac{52A_1-7A_2}{8} = 0 \\ -\frac{7A_1}{8} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A_1 = -\tfrac{8}{7}, \quad A_2 = -\tfrac{416}{49}, \quad A_3 = -\tfrac{7680}{343},$$

$$\left.\begin{array}{l} -4\,(3B_2 - 7B_1) = 0 \\ -12B_1 = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad B_1 = \tfrac{1}{4}, \quad B_2 = \tfrac{7}{12}.$$

e) Prvo će se rešavati slučaj kada je $n \geq 0$.

Karakteristični polinom je $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\,\lambda + 2 = (\lambda - 2)\,(\lambda - 1)$, pa je homogeno rešenje oblika $y_h[n] = C_1\, 2^n + C_2$.

Pošto se pobuda za $n \geq 0$ sastoji od dva signala $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$, gde je $x_1[n] = 1$ i $x_2[n] = n\, 2^n$, od čega se oba poklapaju sa korenima karakterističnog polinoma. Ustaljeni odziv će za $n \geq 0$ biti oblika

$$y_p[n] = n\, 2^n\,(A_2 + n\, A_1) + B_1 n.$$

Partikularno rešenje treba da zadovolji diferencnu jednačinu

$$n\, 2^n\,(A_2 + n\, A_1) + B_1 n - 3\left((n-1)\, 2^{n-1}\,(A_2 + (n-1)\, A_1) + B_1\,(n-1)\right) +$$

$$+2\left((n-2)\, 2^{n-2}\,(A_2 + (n-2)\, A_1) + B_1\,(n-2)\right) = 1 + n\, 2^n.$$

Sređivanjem jednačine se dobija

$$2^{n-1}\,(A_1 + A_2 + 2n\, A_1) - B_1 = 1 + n\, 2^n,$$

pa je $A_1 = 1$, $A_2 = -1$ i $B_1 = -1$.

Potpuni odziv glasi

$$y[n] = C_1\, 2^n + C_2 + 2^n\, n\,(n-1) - n,$$

za $n \geq 0$, pa se nakon zamene početnih uslova dobijaju konstante $C_1 = -C_2 = 2$.

Kada je $n < 0$ nema pobude, pa važi da je $y[n] = C_3\, 2^n + C_4$. Početni uslovi se dobijaju rekurzijom $y[-1] = 1$ i $y[-2] = 2$. Na osnovu početnih uslova su konstante $C_3 = -4$ i $C_4 = 3$.

Ukupan odziv je

$$y[n] = (2\,(2^n - 1) + 2^n\, n\,(n-1) - n)\, \mathrm{u}[n] + (3 - 4 \cdot 2^n)\,(1 - \mathrm{u}[n]).$$

f) Karakteristični polinom glasi $P(\lambda) = \lambda^2 - 5\,\lambda + 6 = (\lambda - 3)\,(\lambda - 2)$, pa je homogeno rešenje oblika $y_h[n] = C_1\, 2^n + C_2\, 3^n$.

Partikularno rešenje za $n \geq 0$ je

$$y_p[n-2] = 4^n\, \frac{1}{P(4)} = \frac{4^n}{2},$$

$$y_p[n] = 8 \cdot 4^n.$$

Potpuni odziv za $n \geq 0$ je

$$y[n] = C_1\, 2^n + C_2\, 3^n + 8 \cdot 4^n,$$

i na osnovu početnih uslova se računaju koeficijenti $C_1 = 7$ i $C_2 = -15$.

Za $n < 0$ nema pobude, pa je odziv oblika

$$y[n] = C_3\, 2^n + C_4\, 3^n,$$

sa početnim uslovima $y[-1] = \frac{1}{2}$ i $y[-2] = \frac{7}{12}$, na osnovu čega se računa $C_3 = 5$ i $C_4 = -6$.

Potpuni odziv za $\forall n \in \mathbb{Z}$ je

$$y[n] = (7 \cdot 2^n - 15 \cdot 3^n + 8 \cdot 4^n)\,\mathrm{u}[n] + (5 \cdot 2^n - 6 \cdot 3^n)\,(1 - \mathrm{u}[n]) = (2 \cdot 2^n - 9 \cdot 3^n + 8 \cdot 4^n)\,\mathrm{u}[n] + 5 \cdot 2^n - 6 \cdot 3^n.$$

Zadatak 2.34.

Odrediti odziv i ispitati stabilnost diskretnih sistema opisanih sledećim diferencim jednačinama:

a) $y[n+1] - \frac{\sqrt{2}}{2}\, y[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$, $y[-1] = -1$;

b) $y[n+1] - \frac{2}{3}\, y[n] - \frac{1}{3}\, y[n-1] = 3^{-}\ \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$, $y[0] = 0$, $y[3] = \sqrt{3}$.

Rešenje:

a) Na osnovu diferencne jednačine dobija se da je homogeno rešenje $y_h[n] = C_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$. Ustaljeni odziv je oblika $y_p[n] = A\, \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + B\, \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$. Na osnovu toga je

$$A\, \cos\left(\frac{(n+1)\,\pi}{4}\right) + B\, \sin\left(\frac{(n+1)\,\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\left(A\, \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + B\, \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right),$$

pa se dobija $A = 0$ i $B = \sqrt{2}$.

Potpuni odziv glasi

$$y[n] = \sqrt{2}\, \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + C_1\, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n,$$

pa je na osnovu $y[-1] = -\sqrt{2}\, \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + C_1\, \sqrt{2} = -1$ i $C_1 = 0$.

$$y[n] = \sqrt{2}\, \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Sistem je stabilan zato što je koren karakterističnog polinoma po modulu manji od 1.

b) <u>Prvi način:</u>

Jednačina može da se napiše u obliku

$$\left(E^2 - \frac{2}{3}\, E - \frac{1}{3}\right)\, y[n-1] = P(E)\, y[n-1] = x[n].$$

Pobuda $x[n]$ je zbir dva eksponencijalna signala

$$y[n] = 3^{-n}\, \frac{\mathrm{e}^{j\frac{n\pi}{3}} - \mathrm{e}^{-j\frac{n\pi}{3}}}{2j} = \frac{1}{2j}\, \left(\frac{\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{3}}}{3}\right)^n - \frac{1}{2j}\, \left(\frac{\mathrm{e}^{j\frac{-\pi}{3}}}{3}\right)^n = \frac{z^n - (z^*)^n}{2j},$$

gde je $z = \frac{\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{3}}}{3} = \frac{1}{6} + \frac{j}{2\sqrt{3}}$.

$$y_p[n-1] = \frac{1}{2j}\, \left(z^n\, \frac{1}{P(z)} - (z^*)^n\, \frac{1}{P(z^*)}\right) = \frac{1}{2j}\, \left(z^n\, \frac{1}{P(z)} - \left(z^n\, \frac{1}{P(z)}\right)^*\right) =$$

$$= \frac{1}{2j}\left(2j\,\Im\left\{z^n\,\frac{1}{P(z)}\right\}\right) = \Im\left\{z^n\,\frac{1}{P(z)}\right\}.$$

Kako je $z^n = 3^{-n}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + j\,\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$, a $\frac{1}{P(z)} = -\frac{27}{14} + j\,\frac{3\sqrt{3}}{14}$, dobija se da je

$$y_p[n-1] = 3^{-n}\left(\frac{3\sqrt{3}}{14}\,\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{27}{14}\,\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right),$$

$$y_p[n] = -\frac{3^{-n}}{7}\left(2\sqrt{3}\,\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + 3\,\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right).$$

Na osnovu karakterističnog polinoma $P(\lambda) = (\lambda - 1)\left(\lambda + \frac{1}{3}\right)$, pa je homogeno rešenje $y_h[n] = C_1 + C_2\,3^{-n}$. Potpuni odziv je jednak

$$y[n] = C_1 + C_2\,3^{-n} - \frac{3^{-n}}{7}\left(2\sqrt{3}\,\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + 3\,\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right).$$

Nepoznate konstante se računaju na osnovu početnih uslova $C_1 = \frac{27\sqrt{3}}{28}$ i $C_2 = -\frac{19\sqrt{3}}{28}$.

Pošto nisu svi koreni karakterističnog polinoma po modulu manji od 1, potrebno je da se primeni test apsolutne sumabilnosti na potpuni odziv. Međutim, u praksi nije moguće da se postigne tačna vrednost nekog parametra, tako da su u praksi rešenja karakterističnog polinoma: $\lambda_1 = -\frac{1}{3} \pm \lambda_\epsilon$ i $\lambda_2 = 1 \pm \lambda_\epsilon$, gde je $\lambda_\epsilon > 0$ mera neodređenosti korenova polinoma i zavisi od tolerancije parametara sistema. Zbog toga je praktični uslov stabilnosti mnogo strožiji od teoretskog: $|\lambda| < 1 - \alpha\,\lambda_\epsilon$, gde je $\alpha > 1$ margina sigurnosti koja obezbeđuje da i u najnepovoljnijem slučaju rešenja karakterističnog polinoma budu unutar jediničnog kruga kompleksne ravni.

Drugi način, metoda neodređenih koeficijenata:

Pošto je pobuda oblika zbira eksponencijalnih signala koji se ne poklapaju sa korenima karakterističnog polinoma, odziv će imati oblik:

$$y_p[n] = 3^{-n}\left(A\,\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + B\,\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right).$$

Formiranjem odgovarajuće diferencne jednačine se određuje $A = -\frac{2\sqrt{3}}{7}$ i $B = -\frac{3}{7}$.

Zadatak 2.35.

Sistem je opisan diferencnom jednačinom $y[n] - \frac{1}{2}\,y[n-1] = x[n]$. Ako je početni uslov $y[0] = 1$, odrediti:

a) Potpuni odziv sistema na pobudu $x[n] = 5^n$.
b) Potpuni odziv sistema na pobudu $x[n] = 5^{-n}$.
c) Ukoliko je moguće, primenom konvolucije naći odzive iz tačke a).
d) Ukoliko je moguće, primenom konvolucije naći odzive iz tačke b).

Rešenje:

a) Rešenje homogenog dela jednačine glasi $y_h[n] = C\,2^{-n}$, dok je ustaljeni odziv

$$y_p[n-1] = 5^n\,\frac{1}{P(5)} = \frac{2}{9}\,5^n,$$

$$y_p[n] = \frac{10}{9}\,5^n.$$

Potpuni odziv je jednak $y[n] = C\,2^{-n} + \frac{10}{9}\,5^n$, a na osnovu početnih uslova se računa $C = -\frac{1}{9}$.

$$y[n] = -\frac{1}{9}\,2^{-n} + \frac{10}{9}\,5^n$$

b) Ustaljeni odziv je jednak

$$y_p[n-1] = 5^{-n}\,\frac{1}{P(5^{-1})} = -\frac{10}{3}\,5^{-n},$$

$$y_p[n] = -\frac{2}{3}\,5^{-n}.$$

Potpuni odziv je jednak $y[n] = C\,2^{-n} - \frac{2}{3}\,5^{-n}$, a na osnovu početnih uslova se računa $C = \frac{5}{3}$.

$$y[n] = \frac{5}{3}\,2^{-n} - \frac{2}{3}\,5^{-n}$$

c) Pošto je ispunjeno $y[0] - \frac{y[-1]}{2} = x[0]$, vidi se da $y[0]$ zavisi i od pobude i od $y[-1]$. A pošto pobuda nije kauzalna, nije moguće rekurzijom doći do početnog uslova koji je važio pre pobude. Kako početni uslov koji je zadat predstavlja posledicu i pobude i sopstvenog odziva, samo na osnovu njega nije moguće odrediti sopstveni odziv sistema.

Pošto je ispunjeno da je $y[n] = y_s[n] + y_{pr}[n]$ i da važi da su

$$y_{pr}[n] - \frac{y_{pr}[n-1]}{2} = x[n]$$

i

$$y_s[n] - \frac{y_s[n-1]}{2} = 0,$$

moguće je na osnovu poznavanja $y_{pr}[n]$ rekonstruisati $y_s[n]$.

Impulsni odziv se lako nalazi i on je jednak $h[n] = 2^{-n}\,\mathrm{u}[n]$. Prinudni odziv je jednak

$$y_{pr}[n] = h[n] * x[n] = \frac{10}{9}\,5^{n}.$$

Potpuni odziv je jednak

$$y[n] = y_s[n] + \frac{10}{9}\,5^{n}.$$

Iako $y_s[n]$ nije moguće rekonstruisati nezavisno od $y_{pr}[n]$, za njega se zna da je oblika $y_s[n] = C\,2^{-n}$, pa je na osnovu $y[0] = 1$ konstanta $C = -\frac{1}{9}$.

d) Impulsni odziv je kao u tački c), ali prinudni odziv divergira:

$$y_{pr}[n] = 5^{-n}\sum_{m=0}^{+\infty} 2.5^{m} \to \infty.$$

3.1.4 Konvolucija kontinualnog sistema

Zadatak 2.36.*

Dokazati teoreme o izvodu Dirakove delta funkcije:
a) I teorema: $t\,\delta'(t) = -\delta(t)$,
b) II teorema: $t^n \frac{d^m}{dt^m}\delta(t) = \begin{cases} (-1)^n \frac{m!}{(m-n)!} \frac{d^{m-n}}{dt^{m-n}}\delta(t), & 0 \le n \le m, \\ 0, & 0 \le m < n, \end{cases}$
c) III teorema: $y(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta'(\tau - t)\,d\tau = -x'(t)$,
d) IV teorema: $y(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta^{(n)}(\tau - t)\,d\tau = (-1)^n \dfrac{d^n}{dt^n}x(t)$.

Rešenje:

a) Na osnovu jednakosti $x(t)\,\delta(t) = x(0)\,\delta(t)$, važi da je $t\,\delta(t) = 0$. Ako se ta jednačina diferencira po t, dobija se da je $t\,\delta'(t) + \delta(t) = 0$, odnosno $t\,\delta'(t) = -\delta(t)$, što je i trebalo dokazati.
b) Slučajevi kada je $n > m = 0$ i $m \ge n = 0$ su očigledni i neće biti razmatrani.
Matematičkom indukcijom je za $n > m$:

- Neka je $n > m = 1$. Ako se diferencira izraz $t^n\,\delta(t)$, dobija se:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(t^n\,\delta(t)\right)}_{0} = \underbrace{n\,t^{n-1}\,\delta(t)}_{0} + t^n\,\delta'(t),$$

  pa je $t^n\,\delta'(t) = 0$ i važi $\forall n > 0$.

- Ista zakonitost se dobija kada se diferencira proizvoljan broj puta:

$$t^n\,\frac{d^m}{dt^m}\delta(t) = 0, \quad \forall n > m.$$

  Ovo ćemo pretpostaviti da je tačno.

- Ako se diferencira izraz $t^n\,\dfrac{d^m}{dt^m}\delta(t)$ i ako je $n > m+1$, važi

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(t^n\,\frac{d^m}{dt^m}\delta(t)\right)}_{} = \underbrace{nt^{n-1}\,t^n\,\frac{d^m}{dt^m}\delta(t)}_{0,n>m+1} + t^n\,\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}\delta(t),$$

  odnosno $t^n\,\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}\delta(t) = 0$, čime je i dokazano tvrđenje za $n > m \ge 1$.

Za slučaj kada je $m \ge n \ge 1$ matematičkom indukcijom:

- Primenom Lajbnicove formule dobija se:

$$\frac{d^m}{dt^m}\,(t\delta(t)) = \sum_{k=0}^{m} \frac{d^{m-k}}{dt^{m-k}}\delta(t)\,\frac{d^k}{dt^k}t.$$

  Kako je $\frac{d^k}{dt^k}t \ne 0$ samo za slučaj kada je $k = 0$ i $k = 1$ prethodna jednačina se svodi na

$$\frac{d^m}{dt^m}\,\underbrace{(t\delta(t))}_{0} = t\,\frac{d^m}{dt^m}\delta(t) + m\,\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\delta(t),$$

  odakle sleduje da je

$$t\,\frac{d^m}{dt^m}\delta(t) = -m\,\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\delta(t).$$

- Za slučaj $m > n > 1$ se usvaja da važi:
$$t^n \frac{d^m}{dt^m}\delta(t) = (-1)^n \frac{m!}{(m-n)!}\frac{d^{m-n}}{dt^{m-n}}\delta(t).$$
- Ako se leva i desna strana prethodne jednačine pomnoži sa t, dobija se
$$t^{n+1} \frac{d^m}{dt^m}\delta(t) = (-1)^n \frac{m!}{(m-n)!}\, t\, \frac{d^{m-n}}{dt^{m-n}}\delta(t),$$
što je na osnovu prve stavke u ovoj matematičkoj indukciji jednako:
$$t^{n+1} \frac{d^m}{dt^m}\delta(t) = (-1)^n \frac{m!}{(m-n)!}\left(-(m-n)\frac{d^{m-n-1}}{dt^{m-n-1}}\delta(t)\right),$$
odnosno
$$t^{n+1} \frac{d^m}{dt^m}\delta(t) = (-1)^{n+1} \frac{m!}{(m-(n+1))!}\frac{d^{m-(n+1)}}{dt^{m-(n+1)}}\delta(t),$$
što je i trebalo pokazati.

c) Pošto je $x(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(\tau - t)\,d\tau$, diferenciranjem leve i desne strane se dobija:
$$x'(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(\tau-t)\,d\tau = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\frac{d}{dt}\delta(\tau-t)\,d\tau = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,(-\delta'(\tau-t))\,d\tau,$$
odnosno $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta'(\tau-t)\,d\tau = -x'(t)$, što je i trebalo dokazati.

d) Ako se jednačina $x(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(\tau-t)\,d\tau$ diferencira n puta, sleduje tvrđenje.

Zadatak 2.37.*

Dokazati da važi: $x(t) = \int\limits_a^b \tau\,\delta(\tau-t)\,d\tau = t\,(\mathrm{u}(t-a) - \mathrm{u}(t-b))$.

Rešenje:

Pošto je $x(\tau)\,\delta(\tau-t) = x(t)\,\delta(\tau-t)$, integral postaje
$$x(t) = \int\limits_a^b t\,\delta(\tau-t)\,d\tau = t\int\limits_a^b \delta(\tau-t)\,d\tau = t\,(\mathrm{u}(b-t) - \mathrm{u}(a-t)).$$
Kako je $\mathrm{u}(t_0 - t) = 1 - \mathrm{u}(t-t_0)$, zamenom u prethodnu jednačinu se dobija
$$x(t) = t\,(\mathrm{u}(t-a) - \mathrm{u}(t-b)).$$

Zadatak 2.38.*

Dokazati da je: $x(t)\,\delta(t-t_0) = \frac{x(t)+x(t_0)}{2}\,\delta(t-t_0)$.

Rešenje:

Pošto je $x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$, a istovremeno je $x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t)\,\delta(t-t_0)$, sabiranjem ovih dveju jednačina i deobom sa 2 sleduje tvrđenje.

Zadatak 2.39.*

Dokazati jednakosti:
a) $\delta(t) = -2\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)\delta'(t)$,
b) $\delta(t) = \dfrac{\delta'(t)}{\omega_0}\left(\mathrm{ctg}(\omega_0 t) - \frac{1}{\sin(\omega_0 t)}\right)$.

Rešenje:

a) Ako se $\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ razvije u red, dobija se

$$-2\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)\delta'(t) = -2\left(1 - 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4\cdot 2!} + \frac{t^3}{8\cdot 3!} - \cdots\right)\delta'(t) = \left(-t + \frac{t^2}{2\cdot 2!} - \frac{t^3}{4\cdot 3!} + \cdots\right)\delta'(t).$$

Na osnovu II teoreme o izvodu Dirakove delta funkcije je $t^k\,\delta'(t) = 0$ za $k > 1$. Jednakost se svodi na $\delta(t) = -t\delta'(t)$.
b) Množenjem polazne jednačine sa $\omega_0 \sin(\omega_0 t)$ dobija se

$$\omega_0 \sin(\omega_0 t)\,\delta(t) = \delta'(t)\,\left(\cos(\omega_0 t) - 1\right),$$

odnosno $0 = \delta'(t)\,(\cos(\omega_0 t) - 1)$.

Na osnovu III teoreme o izvodu Dirakove delta funkcije važi da je $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta'(\tau)\,d\tau = -x'(0)$. Ako se jednačina $0 = \delta'(t)\,(\cos(\omega_0 t) - 1)$ integrali, dobija se da je:
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(\tau)\,\left(\cos(\omega_0\tau) - 1\right)\,\tau = \omega_0\,\sin(\omega_0\cdot 0) = 0.$

3.1.5 Prinudni i sopstveni odziv kontinualnog sistema

Impulsni odziv

Primenom osobina linearnih vremenski invarijantnih sistema

Neka je sistem opisan diferencijalnom jednačinom sa konstantnim koeficijentima:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\,\frac{d^k}{dt^k}y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k\,\frac{d^k}{dt^k}x(t).$$

Ako je $h_1(t)$ rešenje diferencijalne jednačine

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\,\frac{d^k}{dt^k}h_1(t) = \delta(t),$$

tada je impulsni odziv sistema jednak

$$h(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k\,\frac{d^k}{dt^k}h_1(t).$$

Primenom metoda neodređenih koeficijenata

Neka je sistem opisan diferencijalnom jednačinom sa konstantnim koeficijentima:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\,\frac{d^k}{dt^k}y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k\,\frac{d^k}{dt^k}x(t).$$

Impulsni odziv se dobija rešavanjem diferencijalne jednačine

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k} h(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k}{dt^k} \delta(t).$$

Ukoliko je $n > m$, impulsni odzis se sastoji samo od regularnog odziva

$$h(t) = h_r(t)$$

koji je istog oblika kao i rešenje homogene diferencijalne jednačine

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k} h_r(t) = 0,$$

s tim što se neodređeni koeficijenti dobijaju zamenom u polaznu diferencijalnu jednačinu.

Ukoliko je $n \leq m$, impulsni odziv se sastoji regularnog i singularnog odziva:

$$h(t) = h_r(t) + h_s(t),$$

pri čemu je singularni odziv oblika

$$h_s(t) = \sum_{k=0}^{m-n} C_k \frac{d^k}{dt^k} \delta(t),$$

a neodređeni koeficijenti se dobijaju zamenom rešenja u polaznu diferencijalnu jednačinu.

Sistem je stabilan ako i samo ako su svi koreni karakterističnog polinoma raspoređeni u levoj kompleksnoj poluravni.

Zadatak 2.40.

Odrediti impulsni odziv sistema opisanog diferencijalnom jednačinom:

$$y'(t) + a\,y(t) = x'(t).$$

Rešenje:

Prvi način, primenom osobina linearnih vremenski invarijantnih sistema:

U ovom zadatku $h_1(t)$ je rešenje diferencijalne jednačine:

$$h_1'(t) + a\,h_1(t) = \delta(t)$$

i ono glasi

$$h_1(t) = C\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t).$$

Pošto je

$$\mathrm{u}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \frac{1}{2} & t = 0, \\ 1 & t > 0, \end{cases}$$

važi da je

$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & t = 0^-, \\ \frac{C}{2} & t = 0, \\ C & t = 0^+. \end{cases}$$

Integracijom leve i desne strane polazne diferencijalne jednačine za određivanje impulsnog odziva u granicama 0^- do 0^+ se dobija

$$\int_{0^-}^{0^+} (h_1'(t) + a\,h_1(t))\,dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt,$$

$$\int_{0^-}^{0^+} h_1'(t)\,dt + a\int_{0^-}^{0^+} h_1(t)\,dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt.$$

Integral $\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = 1$, a integral $\int_{0^-}^{0^+} h_1(t)\,dt$ je jednak nuli zato što je podintegralna funkcija konačna, a kako integral predstavlja površinu ispod podintegralne funkcije u segmentu $(0^-, 0^+)$, ta površina je jednaka nuli. Integral $\int_{0^-}^{0^+} h_1'(t)\,dt \neq 0$ jer podintegralna funkcija sadrži Dirakov impuls i iznosi:

$$\int_{0^-}^{0^+} h_1'(t)\,dt = h_1(0^+) - \underbrace{h_1(0^-)}_{0} = C.$$

Prema tome je $C = 1$, a kako je $h(t) = h_1'(t)$, dobija se da je:

$$h(t) = -a\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t) + \delta(t).$$

Drugi način, primenom metoda neodređenih koeficijenata

Opšte rešenje se sastoji od dva partikularna rešenja, regularnog i singularnog

$$h(t) = \underbrace{A\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t)}_{\text{regularno}} + \underbrace{B\,\delta(t)}_{\text{singularno}}.$$

Zamenom opšteg rešenja u polaznu diferencijalnu jednačinu dobija se

$$A\,\mathrm{e}^{-at}\,\delta(t) - aA\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t) + aA\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t) + B\,\delta'(t) + aB\,\delta(t) = \delta'(t),$$

i $B = 1$. Na osnovu osobina odabiranja delta funkcijom $x(t)\,\delta(t) = x(0)\,\delta(t)$ je

$$A\,\mathrm{e}^{-at}\,\delta(t) + aB\,\delta(t) = (A + aB)\,\delta(t) = 0,$$

pa je $A = -aB = -a$.

$$h(t) = -a\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t) + \delta(t)$$

Zadatak 2.41.

Odrediti impulsni odziv sistema opisanog diferencijalnom jednačinom:

$$y''(t) - 3\,y'(t) - 4\,y(t) = x(t) + x'(t).$$

Rešenje:

Prvi način, primenom osobina linearnih vremenski invarijantnih sistema:

Impulsni odziv je jednak $h(t) = h_1(t) + h_1'(t)$, pri čemu je $h_1(t)$ rešenje diferencijalne jednačine:

$$h_1''(t) - 3\,h_1'(t) - 4\,h_1(t) = \delta(t).$$

Karakteristični polinom glasi $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\,\lambda - 4 = (\lambda + 1)\,(\lambda - 4)$, pa je impulsni odziv oblika

$$h_1(t) = (A\,\mathrm{e}^{-t} + B\,\mathrm{e}^{4t})\,\mathrm{u}(t).$$

Izvod impulsnog odziva je jednak

$$h_1'(t) = (-A\,\mathrm{e}^{-t} + 4B\,\mathrm{e}^{4t})\,\mathrm{u}(t) + (A\,\mathrm{e}^{-t} + B\,\mathrm{e}^{4t})\,\delta(t).$$

Integracijom leve i desne strane polazne diferencijalne jednačine u granicama od 0^- do 0^+ dobija se:

$$\int_{0^-}^{0^+} h_1''(t) - 3\int_{0^-}^{0^+} h_1'(t)\,dt - 4\underbrace{\int_{0^-}^{0^+} h_1(t)\,dt}_{0} = \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt}_{1}.$$

Kako je izvod kauzalne funkcije uvek kauzalna funkcija sa Dirakovim impulsnom u nuli i pošto je $\delta(t) = 0$ za $t \neq 0$, vrednost integrala $\int_{0^-}^{0^+} h_1''(t)\,dt = h_1'(0^+)$, tako da važi:

$$h_1'(0^+) - 3\,h_1(0^+) = 1.$$

Ako se jednačina integrali dav puta, prvo u granicama od $-\alpha$ do t, gde je $\alpha > 0$, a zatim u granicama od 0^- do 0^+, dobija se:

$$\int_{0^-}^{0^+}\int_{-\alpha}^{t} h_1''(\tau)\,d\tau\,dt - 3\int_{0^-}^{0^+}\int_{-\alpha}^{t} h_1'(\tau)\,d\tau\,dt - 4\int_{0^-}^{0^+}\int_{-\alpha}^{t} h_1(\tau)\,d\tau\,dt = \int_{0^-}^{0^+}\int_{-\alpha}^{t} \delta(\tau)\,d\tau\,dt,$$

$$\int_{0^-}^{0^+}(h_1'(t) - h_1'(-\alpha))\,dt - 3\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}(h_1(t) - h_1(-\alpha))\,dt}_{0} - 4\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}(H_1(t) - H_1(-\alpha))\,dt}_{0} = \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} 1\cdot dt}_{0},$$

$$\int_{0^-}^{0^+}(h_1'(t) - h_1'(-\alpha))\,dt = h_1(0^+) - \underbrace{h_1(0^-)}_{0} - h_1'(-\alpha)\underbrace{\int_{0^-}^{0^+} dt}_{0} = 0,$$

odnosno $h_1(0^+) = 0$.

$$\left.\begin{aligned} h_1(0^+) &= A + B = 0 \\ h_1'(0^+) &= -A + 4B = 1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad B = -A = \frac{1}{5}$$

$$h(t) = h_1'(t) + h_1(t) = \mathrm{e}^{4t}\,\mathrm{u}(t) + \frac{1}{5}\,(\mathrm{e}^{4t} - \mathrm{e}^{-t})\,\delta(t) = \mathrm{e}^{4t}\,\mathrm{u}(t)$$

Drugi način, primenom metoda neodređenih koeficijenata

Pošto je red izvod odziva $y(t)$ viši od reda izvoda pobude $x(t)$, u odzivu neće postojati DIrakove delta funkcije, tako da je impulsni odzvi oblika

$$h(t) = (A\,\mathrm{e}^{-t} + B\,\mathrm{e}^{4t})\,\mathrm{u}(t).$$

Prvi izvod je jednak

$$h'(t) = (-A\,\mathrm{e}^{-t} + 4B\,\mathrm{e}^{4t})\,\mathrm{u}(t) + (A + B)\,\delta(t),$$

a drugi izvod je

$$h''(t) = (A\,\mathrm{e}^{-t} + 16B\,\mathrm{e}^{4t})\,\mathrm{u}(t) + (-A + 4B)\,\delta(t) + (A + B)\,\delta'(t).$$

Pošto je $h''(t) - 3\,h'(t) - 4\,h(t) = \delta(t) + \delta'(t)$, važi da je

$$\left.\begin{array}{l} -4A + B = 1 \\ A + B = 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad A = 0, \quad B = 1.$$

$$h(t) = \mathrm{e}^{4t}\,\mathrm{u}(t)$$

Zadatak 2.42.

Odrediti impulsni odziv sistema opisanog diferencijalnom jednačinom:
a) $y''(t) + 3\,y'(t) + 2\,y(t) = x(t)$,
b) $y''(t) + 3\,y'(t) + 2\,y(t) = 3\,x(t) - 2\,x'''(t)$.

Rešenje:

a) Impulsni odziv se dobija rešavanjem diferencijalne jednačine

$$h''(t) + 3\,h'(t) + 2\,h(t) = \delta(t).$$

Na osnovu karakterističnog polinoma se dobija da je opšte rešenje

$$h(t) = (A\,\mathrm{e}^{-2t} + B\,\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{u}(t).$$

Računaju se $h'(0^+) = 1$ i $h(0^+) = 0$, pa je

$$h(t) = (-\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{u}(t).$$

b) Impulsni odziv je $h_1(t) = 3\,h(t) - 2\,h'''(t)$, a $h(t)$ je impulsni odziv iz tačke a).

Zadatak 2.43.

Odrediti impulsni odziv sistema opisanog diferencijalnom jednačinom:
a) $y''(t) + \frac{10}{3}\,y'(t) + y(t) = x'(t)$,
b) $y'''(t) + y''(t) + \frac{1}{3}\,y'(t) + \frac{1}{27}\,y(t) = x(t)$,
c) $y''(t) + 4\,y(t) = x'(t) - x(t)$,
d) $y''(t) + y'(t) + y(t) = x'(t)$.

Rešenje:

a) $h(t) = \left(\frac{9}{8}\,\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}\right)\,\mathrm{u}(t)$
b) $h(t) = \frac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}\,\mathrm{u}(t)$
c) $h(t) = \left(\cos(2t) - \frac{1}{2}\,\sin(2t)\right)\,\mathrm{u}(t)$
d) $h(t) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\,\left(3\,\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt{3}\,\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right)\,\mathrm{u}(t)$

Zadatak 2.44.

Odrediti impulsni odziv sistema opisanog diferencijalnom jednačinom $y'(t) + a\,y(t) = x(t)$ ako je:
a) $x(t) = \delta''(t)$,
b) $x(t) = \delta''(t) - \delta(t)$,
c) $x(t) = \delta'(t - T)$.

Rešenje:

Impulsni odziv sistema je $h_1(t) = \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t)$.
a) $h(t) = h_1''(t) = a^2\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t) - a\,\delta(t) + \delta'(t)$
b) $h(t) = h_1''(t) - h_1(t) = (a^2-1)\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t) - a\,\delta(t) + \delta'(t)$
c) $h(t) = h_1'(t-T) = -a\,\mathrm{e}^{-a(t-T)}\,\mathrm{u}(t-T) + \delta(t-T)$

Zadatak 2.45.

Odrediti impulsni odziv sistema opisanog diferencijalnom jednačinom $y''(t) - 4a\,y(t) = x(t)$ za $a > 0$ ako je:
a) $x(t) = \delta'(t)$,
b) $x(t) = \delta''(t)$,
c) $x(t) = \delta''(t) + \delta'(t) + \delta(t)$.

Rešenje:

Impulsni odziv sistema je $h_1(t) = \frac{1}{4\sqrt{a}}\left(-\mathrm{e}^{-2\sqrt{a}t} + \mathrm{e}^{2\sqrt{a}t}\right)\mathrm{u}(t)$.
a) $h(t) = h_1'(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2\sqrt{a}t} + \mathrm{e}^{2\sqrt{a}t}\right)\mathrm{u}(t)$
b) $h(t) = h_1''(t) = \sqrt{a}\left(-\mathrm{e}^{-2\sqrt{a}t} + \mathrm{e}^{2\sqrt{a}t}\right)\mathrm{u}(t) + \delta(t)$
c) $h(t) = h_1''(t) + h_1'(t) + h_1(t) = \delta(t) + \left(\dfrac{1+2\sqrt{a}+4a}{4\sqrt{a}}\,\mathrm{e}^{2\sqrt{a}t} + \dfrac{-1+2\sqrt{a}-4a}{4\sqrt{a}}\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{a}t}\right)\mathrm{u}(t)$

Zadatak 2.46.

Odrediti impulsni odziv sistema opisanog diferencijalnom jednačinom $y'''(t) - 3a\,y''(t) + 3a^2\,y'(t) - a^3\,y(t) = x(t)$ ako je:
a) $x(t) = \delta(t)$,
b) $x(t) = \delta'(t)$,
c) $x(t) = \delta''(t) + \delta'(t) + \delta(t)$,
d) $x(t) = \delta'''(t)$.

Rešenje:

Impulsni odziv sistema je $h_1(t) = \frac{1}{2}\,t^2\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{u}(t)$.
a) $h(t) = h_1(t) = \frac{1}{2}\,t^2\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{u}(t)$
b) $h(t) = h_1'(t) = \frac{2t+at^2}{2}\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{u}(t)$
c) $h(t) = \frac{2+(4a+2)\,t+(a^2+a+1)\,t^2}{2}\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{u}(t)$
d) $h(t) = \frac{6a+6a^2\,t+a^3\,t^2}{2}\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{u}(t)$

Zadatak 2.47.

Odrediti impulsni odziv sledećih sistema:
a) $y'(t) + 5\,y(t) = x(t)$,
b) $2\,y'(t) + 3\,y(t) = x'(t)$,
c) $y''(t) + 6\,y'(t) + 4\,y(t) = x(t)$,
d) $4\,y'(t) + 9\,y(t) = 2\,x(t) + x'(t)$.

Rešenje:

a) $h(t) = \mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{u}(t)$

b) $h(t) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{3t}{2}}\,\mathrm{u}(t) + \delta(t)\right)$

c) $h(t) = \frac{1}{4\sqrt{5}}\left(\mathrm{e}^{-(3-2\sqrt{5})\,t} - \mathrm{e}^{-(3+2\sqrt{5})\,t}\right)\,\mathrm{u}(t)$

d) $h(t) = -\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-\frac{9t}{4}}\,\mathrm{u}(t) + \delta(t)$

Prinudni i sopstveni odziv

Zadatak 2.48.

Kontinualni sistem sa jednim ulazom i jednim izlazom opisan je diferencijalnom jednačinom:

$$8\,y''(t) - 2\,y'(t) - y(t) = 4\,x(t) - 2\,x''(t).$$

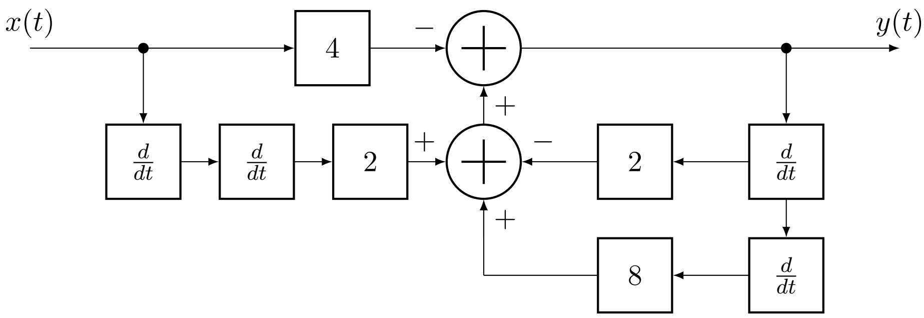
a) Koristeći diferencijatore, sumatore i pojačavače nacrtati blok šemu sistema.
b) Odrediti impulsni odziv sistema.
c) Ispitati stabilnost sistema.
d) Odrediti prinudni odziv sistema ako je $x(t) = \mathrm{u}(t)$.

Rešenje:

a) Diferencijalna jednačina sistema može da se napiše u obliku:

$$y(t) = -2\,y'(t) + 8\,y''(t) - 4\,x(t) + 2\,x''(t).$$

Na osnovu nje je formiran blok dijagram sa slike 2.48.1.



Slika 2.48.1.

b) Impulsni odziv se određuje pomoću diferencijalne jednačine $8\,h_1''(t) - 2\,h_1'(t) - h_1(t) = \delta(t)$. Ako se integrali leva i desna strana u granicama 0^- do 0^+ dobija se $8\,h_1'(0^+) - 2\,h_1(0^+) = 1$, a ako se integrali dva puta $8\,h_1(0^+) = 0$. To znači da je $h_1'(0^+) = \frac{1}{8}$.

Koreni karakterističnog polinoma su $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ i $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$, pa opšte rešenje glasi

$$h_1(t) = \left(A\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + B\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right)\,\mathrm{u}(t),$$

pa je prvi izvod

$$h_1'(t) = (A+B)\,\delta(t) + \left(-\frac{A}{4}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + \frac{B}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right)\,\mathrm{u}(t).$$

Na osnovu početnih uslova je

$$\left.\begin{array}{l} h_1(0^+) = A + B = 0 \\ h_1'(0^+) = -\frac{A}{4} + \frac{B}{2} = \frac{1}{8} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad B = -A = \frac{1}{6}.$$

$$h_1(t) = \frac{1}{6}\,\left(-\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right)\,\mathrm{u}(t)$$

$$h(t) = 4\,h_1(t) - 2\,h_1''(t) = \left(-\frac{31}{48}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} + \frac{7}{12}\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right)\,\mathrm{u}(t) - \frac{1}{4}\,\delta(t)$$

c) Sistem je nestabilan zato što je jedan koren karakterističnog polinoma veći od 0.
d) Odziv na pobudu se određuje konvolucijom pobude sa impulsnim odzivom sistema.

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,\mathrm{u}(t-\tau)\,d\tau = \mathrm{u}(t)\int\limits_{0}^{t}\left(-\frac{31}{48}\,\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{4}} + \frac{7}{12}\,\mathrm{e}^{\frac{\tau}{2}}\right)\,d\tau - \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)\,\mathrm{u}(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \left(\frac{31}{12}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}-1\right)+\frac{7}{6}\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}-1\right)\right)\mathrm{u}(t)-\frac{\mathrm{u}(t)}{4} = \left(\frac{31}{12}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}+\frac{7}{6}\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}-4\right)\mathrm{u}(t)$$

Zadatak 2.49.

Kontinualni sistem sa jednim ulazom i jednim izlazom opisan je diferencijalnom jednačinom:

$$4\,y''(t)+4\,y'(t)+y(t)=x'''(t)-2\,x(t).$$

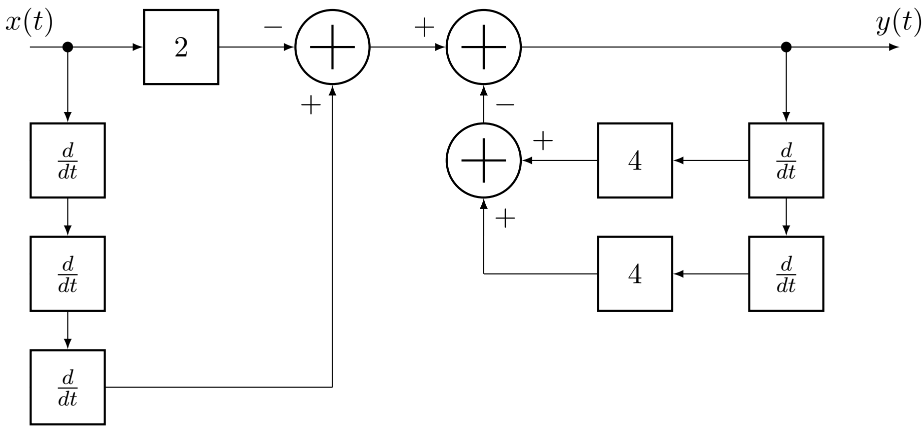
a) Koristeći diferencijatore, sumatore i pojačavače nacrtati blok šemu sistema.
b) Odrediti impulsni odziv sistema.
c) Ako je $x(t)=0$, naći sopstveni odziv sistema sa početnim uslovima $y(0^+)=-1$ i $y'(0^+)=1$.
d) Ispitati stabilnost sistema.

Rešenje:

a) Diferencijalna jednačina sistema može da se napiše u obliku:

$$y(t)=-4\,y'(t)-4\,y''(t)-2\,x(t)+x'''(t).$$

Na osnovu nje je formiran blok dijagram sa slike 2.49.1.



Slika 2.49.1.

b) Impulsni odziv se određuje pomoću diferencijalne jednačine $4\,h_1''(t)+4\,h_1'(t)+h_1(t)=\delta(t)$. Ako se integrali leva i desna strana u granicama 0^- do 0^+ dobija se $4\,h_1'(0^+)+4\,h_1(0^+)=1$, a ako se integrali dva puta $4\,h_1(0^+)=0$. To znači da je $h_1'(0^+)=\frac{1}{4}$.

Koreni karakterističnog polinoma su $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}$, pa opšte rešenje glasi

$$h_1(t)=\left(C_1\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}+t\,C_2\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)\mathrm{u}(t),$$

odakle se vidi da je $h_1(0^+)=C_1=0$, pa je prvi izvod

$$h_1'(t)=C_2\left(t\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\,\delta(t)+\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}-\frac{t}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)\mathrm{u}(t)\right).$$

Na osnovu $h_1'(0^+)=\frac{1}{4}=C_2$ je

$$h_1(t)=\frac{t}{4}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{u}(t),$$

$$h(t)=h_1'''(t)-2\,h_1(t)=\frac{\delta'(t)}{4}-\frac{\delta(t)}{4}+\frac{1}{32}\left(6\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}-17\,t\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)\mathrm{u}(t).$$

c) Sopstveni odziv se određuje rešavanjem homogene diferencijalne jednačine

$$4\,y_s''(t) + 4\,y_s'(t) + y_s(t) = 0,$$

čije je opšte rešenje $y_s(t) = (C_3 + t\,C_4)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$. Kako je $y_s(0^+) = -1 = C_3$, računa se

$$y_s'(t) = C_4\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} - \frac{1 + C_4\,t}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}},$$

i $y_s'(0^+) = C_4 + \frac{1}{2} = 1$, odnosno $C_4 = \frac{1}{2}$.

$$y_s(t) = \frac{t-2}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$$

d) Oba rešenja karakterističnog polinoma se nalaze u levoj kompleksnoj poluravni, pa je sistem stabilan.

Zadatak 2.50.

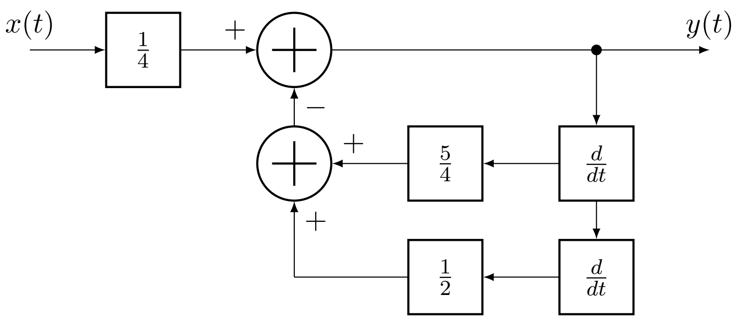
Sistem je opisan diferencijalnom jednačinom: $2\,y''(t) + 5\,y'(t) + 4\,y(t) = x(t)$.
a) Nacrtati blok dijagram sistema koristeći samo diferencijatore, pojačavače i sumatore.
b) Nacrtati blok dijagram sistema koristeći samo integratore, pojačavače i sumatore.
c) Objasniti razliku sa stanovišta upotrebe mogućih realizacija sistema na osnovu blok dijagrama iz prethodnih tačaka.

Rešenje:

a) Diferencijalna jednačina sistema može da se napiše u obliku:

$$y(t) = -\frac{1}{2}\,y'(t) - \frac{5}{4}\,y''(t) + \frac{1}{4}\,x(t).$$

Na osnovu nje je formiran blok dijagram sa slike 2.50.1.



Slika 2.50.1.

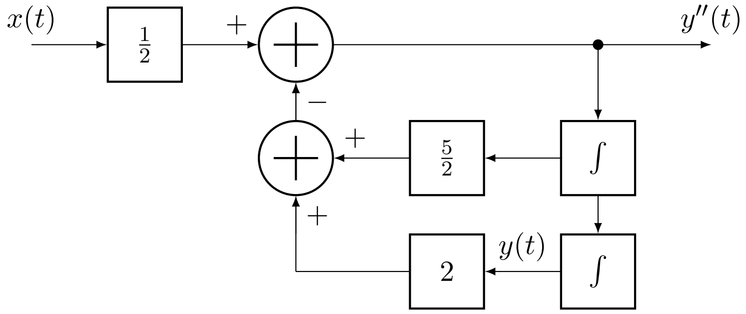
b) Napiše se diferencijalna jednačina u sledećem obliku

$$y''(t) = -\frac{5}{2}\,y'(t) - 2\,y(t) + \frac{1}{2}\,x(t).$$

Kako je $y' = \int y''(t)$ i $y = \int\int y''$, dolazi se do blok dijagrama sa slike 2.50.2
c) Matematički gledano realizacije u tačkama a) i b) su ekvivalentne. Međutim, u praksi se pokazalo da je realizacija sa integratorima bolja i u slučaju hardverske realizacije sistema i u slučaju softverske (simulacije) realizacije sistema.

U slučaju hardverske realizacije diferencijatori su osetljivi na visokofrekventni šum, dok su integratori osetljivi na niskofrekventni šum, posebno na ofset. Međutim, niskofrekventni šum se lakše može dovesti na prihvatljiv nivo.

U slučaju simulacije numeričko diferenciranje unosi znatno veće greške nego numerička integracija. Zbog toga je za istu tačnost prilikom diferenciranja potrebno znatno više procesorskog vremena nego prilikom integracije.



Slika 2.50.2.

Metodi za određivanje odziva na pobudu

Postoji više metoda u vremenskom domenu kojima se rešavaju linearne nehomogene diferncijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima:

- heuristički metod* (metod tipa „seti se”),
- hevisajdov operacioni račun,
- metod neodređenih koeficijenata*,
- metod varijacije konstanti*,
- metod konvolucije.

Neka je nehomogena diferencijalna jednačina oblika

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = x(t).$$

njeno rešenje se može odrediti kao zbir (superpozicija) dva rešenja: sopstvenog odziva i partikularnog rešenja.

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Homogeno rešenje $y_s(t)$ se u literatiri sreće pod nazivima prelazni ili tranzijentni i predstavlja rešenje homogene diferencijalne jednačine:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k} y_h(t) = 0.$$

Prinudni odziv se još naziva ustaljeni ili steady-state odziv i predstavlja partikularno rešenje polazne diferencne jednačine.

Operacioni račun

Koristeći operacioni račun diferencijalna jednačina može da se napiše kao

$$P(D)\, y_p(t) = x(t).$$

Partikularno rešenje koje odgovara prinudnom odzivu se dobija kao

$$y_p(t) = \frac{1}{P(D)}\, x(t),$$

gde je $P(D)$ polinom k-tog reda, a $D = \frac{d}{dt}$.

Na osnovu oblika pobudnog signala $x(t)$ se razlikuje nekoliko slučajeva:

1. Ako je $x(t) = e^{at}$, gde je $a \in \mathbb{R}$ konstanta i važi da je $P(a) \neq 0$:
$$\frac{1}{P(D)}\, e^{at} = e^{at}\, \frac{1}{P(a)}.$$

2. Ako je $x(t) = e^{at}$, gde je $a \in \mathbb{R}$ konstanta i važi da je $P(a) = 0$, odnosno a je nula k-tog reda polinoma $P(D)$:
$$\frac{1}{P(D)}\, e^{at} = t^k\, e^{at}\, \frac{1}{P^{(k)}(a)}.$$

3. Ako je $x(t) = \sin(\omega t + \varphi)$, može se napisati:
$$\frac{1}{P(D)}\, \sin(\omega t + \varphi) = \frac{R(D)}{Q(D^2)}\, \sin(\omega t + \varphi) = R(D)\, \left(\frac{1}{Q(-\omega^2)}\, \sin(\omega t + \varphi)\right).$$
Polinom $Q(D^2) = P(D)\, R(D)$ i formira se tako što se $R(D)$ izabere tako da u polinomu $Q(D^2)$ nema neparnih stepena D. Najzgodnije je izabratti $R(D)$ tako da sa $P(D)$ formira razliku kvadrata za svaki koren polinoma $P(D)$.

4. Ako je $x(t) = \cos(\omega t + \varphi)$, može se napisati:
$$\frac{1}{P(D)}\, \cos(\omega t + \varphi) = \frac{R(D)}{Q(D^2)}\, \cos(\omega t + \varphi) = R(D)\, \left(\frac{1}{Q(-\omega^2)}\, \cos(\omega t + \varphi)\right).$$

Zadatak 2.51.

Kontinualni sistem je opisan diferencijalnom jednačinom
$$y''(t) + 3\, y'(t) + 2\, y(t) = x(t) - x'(t),$$
i dato je $y'(0^-) = y(0^-) = \frac{1}{4}$. Odrediti potpuni odziv sistema ako je:
a) $x(t) = (\sin(4t) - 1)\ \mathrm{u}(t)$,
b) $x(t) = (\cos(4t) - 1)\ \mathrm{u}(t)$.

Rešenje:

a) Početne uslove u trenutku $t = 0^+$ određujemo na osnovu diferencijalne jednačine:
$$y''(t) + 3\, y'(t) + 2\, y(t) = (\sin(4t) - 1 - 4\, \cos(4t))\ \mathrm{u}(t) + \delta(t),$$
i dobijaju se dve jednačine:
$$\begin{aligned} & y'(0^+) - y'(0^-) + 3\, (y(0^+) - y(0^-)) = 1, \\ & y(0^+) - y(0^-) = 0, \end{aligned}$$
na osnovu kojih se računa $y(0^+) = y(0^-) = \frac{1}{4}$ i $y'(0^+) = \frac{5}{4}$.

Homogeno rešenje diferencijalne jednačine je $y_h(t) = C_1\, e^{-t} + C_2\, e^{-2t}$. Partikularno rešenje se računa primenom operacionog računa. Polinom $P(D) = D^2 + 3D + 2 = (D+2)\,(D+1)$, $R(D) = (D-2)\,(D-1)$, a $Q(D^2) = P(D)\, R(D) = (D^2 - 4)\,(D^2 - 1)$:
$$y_p(t) = \frac{1}{P(D)}\, (1 - D)\, x(t) = \frac{(1 - D)\, x(t)}{P(D)} = \frac{\sin(4t) - 1 - 4\, \cos(4t)}{P(D)} =$$
$$= -\frac{1}{P(D)} + R(D)\, \frac{\sin(4t) - 4\, \cos(4t)}{Q(D^2)} = -\frac{1}{P(0)} + R(D)\, \frac{\sin(4t) - 4\, \cos(4t)}{Q(-4^2)} =$$

$$= -\frac{1}{2} + (D^2 - 3D + 2)\,\frac{\sin(4t) - 4\,\cos(4t)}{340} = -\frac{1}{2} + \frac{-31\,\sin(4t) + 22\,\cos(4t)}{170}.$$

Ukupno rešenje je:

$$y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{-31\,\sin(4t) + 22\,\cos(4t)}{170} + C_1\,e^{-t} + C_2\,e^{-2t}, \qquad t > 0,$$

pa je $y(0^+) = -\frac{1}{2} + \frac{22}{170} + C_1 + C_2$ i $y'(0^+) = \left(\frac{-4\cdot 31\,\cos(4t) - 4\cdot 22\,\sin(4t)}{340}\right)\Big|_{t=0^+} - C_1 - 2\,C_2$. Računa se $C_1 + C_2 = \frac{211}{340}$ i $C_1 + 2C_2 = -\frac{673}{340}$, pa je $C_2 = -\frac{13}{5}$ i $C_1 = \frac{219}{68}$.

$$y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{-31\,\sin(4t) + 22\,\cos(4t)}{170} + \frac{219}{68}\,e^{-t} - \frac{13}{5}\,e^{-2t}, \qquad t > 0$$

b) Početne uslove u trenutku $t = 0^+$ određujemo na osnovu diferencijalne jednačine:

$$y''(t) + 3\,y'(t) + 2\,y(t) = (\cos(4t) - 1 - 4\,\sin(4t))\;\mathrm{u}(t),$$

i dobijaju se dve jednačine:

$$\begin{aligned} &y'(0^+) - y'(0^-) + 3\,(y(0^+) - y(0^-)) = 0,\\ &y(0^+) - y(0^-) = 0, \end{aligned}$$

na osnovu kojih se računa $y(0^+) = y(0^-) = y'(0^+) = y'(0^-) = \frac{1}{4}$.

Homogeno rešenje je isto kao u tački a), a partikularno rešenje je kao u tački a) samo pomereno za $\frac{\pi}{2}$.

$$y_p(t) = -\frac{1}{2} + \frac{-31\,\cos(4t) - 22\,\sin(4t)}{170}$$

Računaju se koeficijenti $C_1 = \frac{179}{68}$ i $C_2 = -\frac{17}{10}$, pa je unkupni odziv:

$$y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{-31\,\cos(4t) - 22\,\sin(4t)}{170} + \frac{179}{68}\,e^{-t} - \frac{17}{10}\,e^{-2t}, \qquad t > 0.$$

Glava 4

Furijeova analiza kontinualnih i diskretnih signala i sistema

4.1 Furijeovi redovi kontinualnih signala

Ako funkcija $x(t)$ ispunjava Dirihleove uslove na intervalu $[\tau, T_F+\tau]$, tada se ona na tom intervalu može razviti u red oblika

$$x_F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\omega_F t} = A[0] + \sum_{k=1}^{\infty} (A[k]\cos(k\omega_F t) + B[k]\sin(k\omega_F t)),\ \omega_F = \frac{2\pi}{T_F},$$

gde su

$$X[k] = \frac{1}{T_F}\int_{\tau}^{\tau+T_F} x(t)e^{-jk\omega_F t}dt,\ A[0] = \frac{1}{T_F}\int_{\tau}^{\tau+T_F} x(t)dt,$$
$$A[k] = \frac{2}{T_F}\int_{\tau}^{\tau+T_F} x(t)\cos(k\omega_F t)dt,\ B[k] = \frac{2}{T_F}\int_{\tau}^{\tau+T_F} x(t)\sin(k\omega_F t)dt.$$

Funkcija $x_F(t)$ekvivalentna periodičkom produženju intervala $[\tau, T_F+\tau]$ funkcije $x(t)$. Formalno se piše $x(t) \xleftrightarrow{F_s} X[k]$.

Alternativni oblik razvoja:

$$x_F(t) = C[0] + \sum_{k=1}^{\infty} C[k]\cos(k\omega_F t + \varphi_k),\ \omega_F = \frac{2\pi}{T_F}.$$

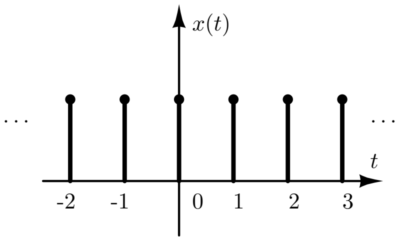
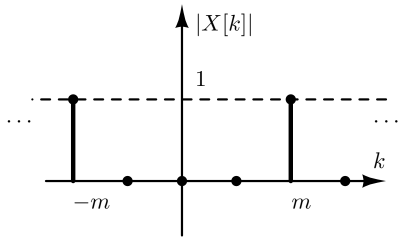
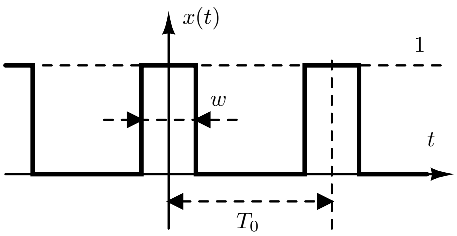
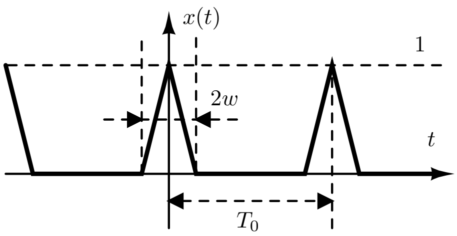
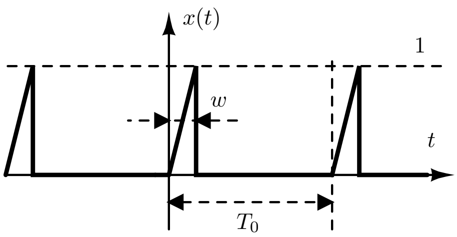
Pri tome je $C[k] = \sqrt{A^2[k] + B^2[k]} = 2\,|X[k]|$, a $\varphi_k = -\arctan\left(\frac{B[k]}{A[k]}\right) = \arg\left(X[k]\right),\ X[k] = \frac{A[k]-jB[k]}{2},\ k \neq 0,\ X[0] = A[0]$.

4.1.1 Osobine koeficijenata Furijeovih redova

Tabela 4.1: $x(t) \xleftrightarrow{F_s} X[k]$

Original $x(t) = x(t + n\,T_0)$	**Slika** $X[k]$
$ax(t) + by(t)$	$aX[k] + bY[k]$
$x(t - t_0)$	$X[k]\,\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t_0}$
$x(-t)$	$X[-k]$
$x^*(t)$	$X^*[-k]$
$x(at), \quad a > 0$	$X[k]$ ako je $T_F = \frac{T_0}{a}$ $\left.\begin{matrix} X\left[\frac{k}{a}\right], & \frac{k}{a} \in \mathbb{Z} \\ 0, & \frac{k}{a} \notin \mathbb{Z} \end{matrix}\right\\} \quad T_F = T_0$
$x(t)$	$\left.\begin{matrix} X\left[\frac{k}{m}\right], & \frac{k}{m} \in \mathbb{Z} \\ 0, & \frac{k}{m} \notin \mathbb{Z} \end{matrix}\right\\} \quad T_F = m\,T_0$
$x(t) * y(t) = \int\limits_{t_0}^{t_0+T_0} x(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau$	$T_0\,X[k]\,Y[k]$
$x(t)\,y(t)$	$X[k] * Y[k]$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$jk\omega_0\,X[k]$
$\int\limits_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{jk\omega_0}\,X[k]$
$x(t) \in \mathbb{R}$	$A[k] = X[k] + X^*[k] = 2\,\Re\{X[k]\}, \quad k \neq 0$ $B[k] = j\,(X[k] + X^*[k]) = -2\,\Im\{X[k]\}$ $X[-k] = X^*[k], \quad \varphi_k = -\varphi_{-k}$ $\Re\{X[k]\} = \Re\{X[-k]\}$ $\Im\{X[k]\} = \Im\{X[-k]\}$ $\lvert X[k]\rvert = \lvert X[-k]\rvert$ $\arg(X[k]) = -\arg(X[-k])$

4.1.2 Osnovni razvoji u Furijeov red

Original $x(t)$	**Slika** $X[k]$	**Uslov**
$e^{j\omega_0 t}$	$\delta[k-m]$	$T_F = m\,T_0$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{j}{2}\left(\delta[k+m]-\delta[k-m]\right)$	$T_F = m\,T_0$
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2}\left(\delta[k+m]+\delta[k-m]\right)$	$T_F = m\,T_0$
1	$\delta[k]$	
$\mathrm{comb}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-k)$ 	$\mathrm{comb}_m[k]$ 	$T_F = m\,T_0 = k$
Osnovna perioda $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{w}\right)$ 	$\frac{w}{T_0}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k\,w}{T_0}\right)$	$T_F = T_0$
Osnovna perioda $\mathrm{tri}\left(\frac{t}{w}\right)$ 	$\frac{w}{T_0}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k\,w}{T_0}\right)$	$T_F = T_0$
Osnovna perioda $\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{w}\right)$	$\frac{w}{T_0}\,\mathrm{rect}\left(\frac{k\,w}{T_0}\right)$	$T_F = T_0$
Osnovna perioda $\frac{t}{w}\left(\mathrm{u}(t)-\mathrm{u}(t-w)\right)$ 	$\frac{e^{-jkw\omega_0}}{wk^2\,T_0\,\omega_0^2}\left(1-e^{jlw\omega_0}+jkw\omega_0\right)$	$T_F = T_0$

4.1.3 Zadaci

Zadatak 3.1.*

a) Dokazati da se u slučaju razvoja parne funkcije periode T u Furijeov red, pri čemu je $T_F = T$, koeficijenti mogu izračunati na sledeći način:

$$X[k] = \frac{2}{T}\Re\left\{\int_0^{T/2} f(t)e^{-jk\omega t}dt\right\}.$$

b) Dokazati da se u slučaju razvoja neparne funkcije perioda T u Furijeov red, koeficijenti mogu izračunati na sledeći način

$$X[k] = \frac{2j}{T}\Im\left\{\int_0^{T/2} f(t)e^{-jk\omega t}dt\right\}.$$

Rešenje:

a) Pošto je $T_F = T$, gde je T_F perioda na kojoj se razvija početna funkcija, važi da je $X[k] = \frac{1}{T_F}\int\limits_{\tau}^{\tau+T_F} f(t)e^{-jk\omega_F t}dt = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jk\omega t}dt$. Dalje važi da je:

$$X[k] = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} f(t)e^{-jk\omega t}dt + \int_{-T/2}^{0} f(t)e^{-jk\omega t}dt\right) = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} f(t)e^{-jk\omega t}dt - \int_{-T/2}^{0} f(-t)e^{jk\omega(-t)}d(-t)\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} f(t)e^{-jk\omega t}dt - \int_{T/2}^{0} f(\tau)e^{jk\omega(\tau)}d(\tau)\right) = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} f(t)e^{-jk\omega t}dt + \int_0^{T/2} f(\tau)e^{jk\omega(\tau)}d(\tau)\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} f(t)e^{-jk\omega t}dt + \left(\int_0^{T/2} f(\tau)e^{-jk\omega(\tau)}d(\tau)\right)^*\right) = \frac{2}{T}\Re\left\{\int_0^{T/2} f(t)e^{-jk\omega t}dt\right\}.$$

b) Dokazuje se na isti način kao a).

Zadatak 3.2.*

a) Neka signal $x(t)$ zadovoljava Dirihleove uslove na odsečku $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Dokazati da važi:

$$\int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - S_n(t,\omega))^2\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt - T\cdot\left(\sum_{k=-n}^{n} X[k]\, X^*[k]\right)$$

gde je $S_n(t,\omega)$ n-ta parcijalna suma Furijeovog reda signala $x(t)$, a $\omega = 2\pi/T$.
b) Korišćenjem rezultata iz a) dokazati:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - S_n(t,\omega))^2 dt = 0.$$

c) Objasniti smisao rezultata dobijenog u tački b).

Rešenje:

a) Važi da je:

$$\int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - S_n(t,\omega))^2 \, dt = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\, dt - 2 \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, S_n(t,\omega)\, dt + \int_{-T/2}^{T/2} S_n^2(t,\omega)\, dt$$

Srednji integral u prethodnom izrazu ima vrednost:

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot S_n(t,\omega) dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sum_{k=-n}^{n} X[k] e^{jk\omega t} \cdot dt = T \sum_{k=-n}^{n} X[k] \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j(-k)\omega t} dt \right) =$$

$$= T \sum_{k=-n}^{n} X[k]\, X[-k] = T \sum_{k=-n}^{n} X[k]\, X^*[k].$$

Poslednji integral se može napisati u obliku

$$\int_{-T/2}^{T/2} S_n^2(t,\omega) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-n}^{n} X[k] e^{jk\omega t} \sum_{v=-n}^{v} X[v] e^{jv\omega t} \cdot \; dt = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{v=-n}^{v} \left(X[v] \cdot X[k] \int_{-T/2}^{T/2} e^{jk\omega t} e^{jv\omega t} dt \right).$$

Pošto se integracija vrši po jednoj periodi, a funkcija $e^{jm\omega t}$ je periodična, poslednji integral ima vrednost različitu od nule samo ako je $k = -v$ i njegova vrednost je tada T:

$$\int_{-T/2}^{T/2} {S_n}^2(t,\omega) dt = \sum_{k=-n}^{n} X[-k] \cdot X[k] \cdot T = T \sum_{k=-n}^{n} X[k] \cdot X^*[k].$$

Prema tome:

$$\int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - S_n(t,\omega))^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt - 2T \sum_{k=-n}^{n} X[k] X^*[k] + T \sum_{k=-n}^{n} X[k] X^*[k] =$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt - T \sum_{k=-n}^{n} X[k] X^*[k] = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt - T \sum_{k=-n}^{n} |X[k]|^2.$$

b) Na osnovu tačke a) važi:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - S_n(t,\omega))^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt - \sum_{k=-n}^{n} |X[k]|^2.$$

Pošto na osnovu Paservalove teoreme kada $n \to \infty$ desna strana jednakosti teži nuli, tvrđenje je dokazano.

c) Ako funkcija $x(t)$ ispunjava Dirihleove uslove na odsečku $[-T/2, T/2]$, funkcionalni niz čiji su članovi n-te parcijalne sume Furijeovog reda funkcije $x(t)$ konvergira ka funkciji $x(t)$ na odsečku $[-T/2, T/2]$, u srednje kvadratnom smislu.

Zadatak 3.3.*

Korišćenjem Paservalove teoreme, dokazati da se kvadrat efektivne vrednosti složenoperiodičnog signala $v(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{n} U_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k)$ može izračunati kao suma kvadrata efektivnih vrednosti njegovih komponenti.

Rešenje:

Složenoperiodičan (na primer naponski) signal je predstavljen na sledeći način:

$$v(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{n} U_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k).$$

Efektivna vrednost k-te komponente signala je jednaka

$$v_{keff} = \begin{cases} \frac{U_k}{\sqrt{2}}, & k > 0, \\ U_0, & k = 0. \end{cases}$$

Prema tome, treba dokazati da važi:

$$v_{eff}^2 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} v^2(t)dt = U_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{U_k}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Polazeći od Paservalove teoreme i uzimajući u obzir konačan harmonijski sadržaj signala dobija se

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} v^2(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |V[k]|^2 = \sum_{k=-n}^{n} |V[k]|^2,$$

pri čemu je

$$v(t) = \sum_{k=-n}^{n} V[k]e^{jk\omega_0 t}.$$

Kako je $V[-k] = V^*[k]$, tada je $|V[-k]| = |V[k]|$, pa se može napisati i da je

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} v^2(t)dt = V[0] + \sum_{k=1}^{n} 2|V[k]|^2.$$

Pošto se signal u(t) može napisati i preko kosinusnog reda

$$v(t) = V[0] + \sum_{k=1}^{n} 2\,|V[k]| \cos(k\omega_0 t + \arg\{V[k]\}),$$

znači da je $V[0] = U_0$ i $|V[k]| = \frac{U_k}{2}$ za $k > 0$. Zamenom u prethodnu jednačinu dobija se

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} v^2(t)dt = {U_0}^2 + \sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{U_k}{2}\right)^2 = {U_0}^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{U_k}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Zadatak 3.4.

Naći razvoj signala u eksponencijalni Furijeov red:
a) $x(t) = \cos\left(50\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$,
b) $x(t) = 5\,\cos(10\pi t)\,\cos(10000\pi t)$,

c) $x(t) = \frac{d}{dt}\mathrm{e}^{-j10\pi t}$, $T_F = \frac{1}{5}$,
d) $x(t) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{comb}\left(\frac{t}{4}\right)$, $T_F = 4$,
e) $x(t) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{comb}(t)$, $T_F = 1$,
f) $x(t) = \mathrm{tri}(t) * \mathrm{comb}(t)$, $T_F = 1$.

Rešenje:

a) Prvi način, primenom tabela i osobina:

Pošto se razvoj radi na osnovnoj periodi, na osnovu tabele 4.2 sledi da je:

$$\cos(50\pi t) \overset{F_s}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\left(\delta[k+1] + \delta[k-1]\right).$$

Polazni signal može da se napiše u obliku

$$x(t) = \cos\left(50\pi t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(50\pi\left(t - \frac{1}{200}\right)\right),$$

pa se primenom teoreme o pomeranju u vremenskom domenu $x(t-t_0) \overset{F_s}{\longleftrightarrow} X[k]e^{-jk\omega_0 t_0}$ dobija

$$x(t) = \cos\left(50\pi\left(t - \frac{1}{200}\right)\right) \overset{F_s}{\longleftrightarrow} X[k] = e^{-jk\omega_0 t_0}\frac{1}{2}\left(\delta[k+1] + \delta[k-1]\right)$$

$$X[k] = e^{-jk\,50\pi\,\frac{1}{200}}\frac{1}{2}\left(\delta[k+1] + \delta[k-1]\right) = e^{-\frac{jk\pi}{4}}\frac{1}{2}\left(\delta[k+1] + \delta[k-1]\right).$$

Na osnovu osobine odabiranja diskretnog jediničnog impulsa $x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]$, dobija se

$$X[k] = \frac{1}{2}\left(\delta[k+1]e^{\frac{j\pi}{4}} + \delta[k-1]e^{-\frac{j\pi}{4}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left((1+j)\delta[k+1] + (1-j)\delta[k-1]\right).$$

Drugi način, direktno

Kod jednostavnih signala moguće je do koeficijenata Furijeovog reda doći primenom formalnog razvoja:

$$x(t) = \cos\left(50\pi t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(50\pi t)\,\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(50\pi t)\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(50\pi t) + \sin(50\pi t)\right)$$

Trigonometrijski red ima samo dva koeficijenta $A[1] = B[1] = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Na osnovu toga je $X[1] = \frac{A[1]-jB[1]}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-j)$ i $X[-1] = X^*[1] = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+j)$, što se može zapisati kao

$$X[k] = \frac{\sqrt{2}}{4}\left((1+j)\delta[k+1] + (1-j)\delta[k-1]\right).$$

b) Osnovna učestanost signala $x(t)$ je jednaka $\omega_0 = 10\pi$, odnosno $f_0 = 5$. Pošto se razvoj radi na osnovnoj periodi dobija se da je

$$\cos(10\pi t) \overset{F_s}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\left(\delta[k+1] + \delta[k-1]\right),$$

$$\cos(10000\pi t) \overset{F_s}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\left(\delta[k+1000] + \delta[k-1000]\right).$$

Primenom teoreme o konvoluciji dobija se konačan rezultat

$$5\cos(10\pi t)\cdot\cos(10000\pi t) \overset{F_s}{\longleftrightarrow} 5\cdot\frac{1}{2}\left(\delta[k+1] + \delta[k-1]\right) * \frac{1}{2}\left(\delta[k+1000] + \delta[k-1000]\right),$$

$$X[k] = \frac{5}{4}\left(\delta[k+1001] + \delta[k-1001] + \delta[k+999] + \delta[k-999]\right).$$

c) $X[k] = -j10\pi\delta[k+1]$.
d) Pošto je

$$\mathrm{rect}(t) * \mathrm{comb}\left(\frac{t}{4}\right) = \mathrm{rect}(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{4} - k\right) = \mathrm{rect}(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t-4k}{4}\right) =$$

$$= 4\,\mathrm{rect}(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - 4k\right) = 4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(t - 4k\right),$$

znači da je signal suma pomerenih pravougaonih impulsa širine $w = 1$ periode $T_0 = 4$. Na osnovu tabele 4.2 je

$$X[k] = 4\frac{w}{T_0}\,\mathrm{sinc}\left(k\frac{w}{T_0}\right) = \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{4}\right).$$

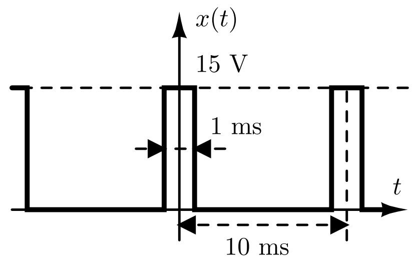
e) Pošto je u pitanju suma impulsa širine 1 pomerenih za 1, radi se o signalu koji je indentički jednak jedinici, pa je $X[k] = \delta[k]$.
f) Pošto je u pitanju suma trouglova širine 2 pomerenih za 1, radi se o signalu koji je indentički jednak jedinici, pa je $X[k] = \delta[k]$.

Zadatak 3.5.

Odrediti razvoj u eksponencijalni Furijeov red signala oblika povorke pravougaonih impulsa čija je amplituda 15 Vp-p, osnovna učestanost $f_0 = 100$ Hz, faktor ispunjenosti impulsa (*duty cycle*) $D = 10\%$, a srednja vrednost jednaka nuli.

Rešenje:

Amplituda signala od 15 Vp-p znači da je raspon od minimalne do maksimalne vrednosti signala (*peak-to-peak*) jednak 15 V. Faktor ispunjenosti impulsa predstavlja odnos između širine impulsa i jedne periode: $D = \frac{w}{T_0}$. Na osnovu toga se može formulisati analitički izraz osnovne periode signala sa slike 3.5.1.



Slika 3.5.1.

$$x_F(t) = 15\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{w}\right) = 15\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{DT_0}\right) = 15\,\mathrm{rect}\left(t\frac{f_0}{D}\right) = 15\,\mathrm{rect}\left(t\frac{100}{0.1}\right) = 15\,\mathrm{rect}\left(1000t\right)$$

Na osnovu tabele 4.2:

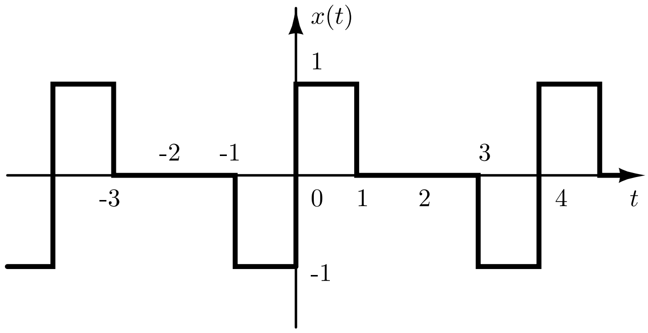
$$X_F[k] = 15\frac{w}{T_0}\,\mathrm{sinc}\left(k\frac{w}{T_0}\right) = 15D\,\mathrm{sinc}\left(kD\right) = \frac{15}{10}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{10}\right) = \frac{3}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{10}\right).$$

Pošto originalni signal ima srednju vrednost jednaku nuli, mora biti $X[0] = 0$, tako da je

$$X[k] = X_F[k] - \frac{3}{2}\delta[k] = \frac{3}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{10}\right) - \frac{3}{2}\delta[k].$$

Zadatak 3.6.

a) Naći razvoj signala sa slike 3.6.1 u trigonometrijski Furijeov red.
b) Naći razvoj istog signala u eksponencijalni Furijeov red.



Slika 3.6.1.

Rešenje:

a) Signal $x(t)$ je neparan, tako da je $\forall k \in \mathbb{Z}$, $A[k] = 0$. Osnovni period signala $T = 4$, tako da je $\omega = 2\pi/T = \frac{\pi}{2}$. Važi da je:

$$B[k] = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin(k\omega t) dt = \frac{4}{4} \int_0^1 \sin(k\omega t) dt = \frac{2}{k\pi} \left(1 - \cos(k\pi/2)\right).$$

Na osnovu toga je

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{2} t\right).$$

b) Osnovna perioda $x(t)$ može da se napiše kao

$$x_F(t) = \frac{d}{dt} \left(1 - \operatorname{tri}(t)\right) = -\frac{d}{dt} \operatorname{tri}(t).$$

Na osnovu toga je:

$$X[k] = -\frac{jk\omega}{4} \operatorname{sinc}^2\left(k\frac{1}{4}\right) = -\frac{jk\pi}{8} \frac{\sin^2\left(k\pi/4\right)}{\left(k\pi/4\right)^2} = -2j \frac{\sin^2\left(k\pi/4\right)}{k\pi} = -j \frac{1 - \cos\left(k\pi/2\right)}{k\pi}.$$

NAPOMENA: Do istog rezultata se moglo doći direktnom primenom formule $X[k] = \frac{A[k] - jB[k]}{2}$ za $k \neq 0$ i $X[0] = A[0]$ za $k = 0$. Dovoljno je odrediti koeficijente jednog oblika razvoja, trigonometrijskog ili eksponencijalnog, a drugi oblik razvoja se može dobiti direktnom transformacijom iz tabele 4.1.

Zadatak 3.7.

a) Koeficijenti razvoja na osnovnoj periodi signala $x(t)$ osnovne periode 10 s glase $X[k] = 4 \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{20}\right)$. Odrediti koeficijente razvoja signala $z(t) = x(4t)$ na istoj periodi.
b) Koeficijenti razvoja na osnovnoj periodi signala $x(t)$ osnovne periode 4 ms glase:
$X[k] = 15\left(\delta[k+1] + \delta[k-1]\right)$. Odrediti signal $x(t)$.
c) Koeficijenti razvoja na osnovnoj periodi signala $x(t)$ na osnovnoj periodi glase:
$X[k] = \delta[k+2] + \delta[k] + \delta[k-2]$. Odrediti signal $x(t)$.
d) Koeficijenti razvoja na osnovnoj periodi signala $x(t)$ na osnovnoj periodi glase: $X[k] = 10 \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{10}\right)$. Odrediti signal $x(t)$.

Rešenje:

a) Na osnovu tabele 4.2 direktno sleduje da je

$$Z[k] = \begin{cases} 4\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{80}\right), & \frac{k}{4} \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \frac{k}{4} \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

b) $x(t) = 30\cos(500\pi t)$
c) $x(t) = 2\cos(4\pi t) + 1$
d) $x(t) = 100\,\mathrm{rect}(10t) * \mathrm{comb}(t)$

Zadatak 3.8.

a) Odrediti amplitudski i fazni spektar periodičnog signala čija je osnovna perioda definisana sa $x(t) = \frac{U_0}{T}\,|\,t\,|$ u intervalu $(-T/2, T/2)$.
b) Odrediti spektar snage datog signala.
c) Odrediti red parcijalne sume Furijeovog reda iz a) tako da greška srednje kvadratne vrednosti funkcije opisane parcijalnom sumom i tačne funkcije bude manja od 0.1%.
d) Odrediti amplitudski i fazni spektar periodičnog signala $x(t) = \frac{U_0}{T}\,|\,t - T_0\,|$ koji ima periodu T.

Rešenje:

a) Prvi način, direktno:

Kada se računa amplitudski i fazni spektar, podrazumeva se da je $T_F = T$. Koeficijenti kompleksnog Furijeovog reda se mogu dobiti po definiciji:

$$X[k] = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega t}dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Na osnovu tabele primitivnih funkcija iz Dodatka A i činjenice da je $x(t)$ parna funkcija:

$$X[k] = \frac{U_0}{T^2}\left(\int\limits_{0}^{T/2} te^{-jk\omega t}dt - \int\limits_{-T/2}^{0} te^{-jk\omega t}dt\right) = \frac{U_0}{T^2}\left(F(T/2) + F(-T/2) - 2F(0)\right) =$$
$$= \frac{U_0}{T^2}\left(F(T/2) + F^*(T/2) - 2F(0)\right) = \frac{U_0}{T^2}\left(2\Re\left\{F(T/2)\right\} - 2F(0)\right).$$
$$F(t) = \frac{1}{a^2}e^{at}\left(at - 1\right), a = -jk\omega.$$

$$X[k] = \frac{U_0}{T^2}\left(2\Re\left\{\left(\frac{1}{-k^2\omega^2}e^{-jk\omega t}\left(-jk\omega t - 1\right)\Big|_{t=T/2}\right)\right\} - 2\frac{1}{-k^2\omega^2}(-1)\right) =$$
$$2\frac{\omega^2 U_0}{4\pi^2}\left(\Re\left\{\left(\frac{1}{k^2\omega^2}e^{-jk\omega t}\left(jk\omega t + 1\right)\Big|_{t=T/2}\right)\right\} - \frac{1}{k^2\omega^2}\right) =$$
$$2\frac{U_0}{4k^2\pi^2}\left(\Re\left\{\left(e^{-jk\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}}\left(jk\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2} + 1\right)\right)\right\} - 1\right) = \frac{U_0}{2k^2\pi^2}\left(\cos k\pi + k\pi\sin k\pi - 1\right)$$

Prema tome je

$$X[k] = \frac{U_0}{2k^2\pi^2}\left(\cos k\pi + k\pi\sin k\pi - 1\right),$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]\,\mathrm{e}^{jk\omega t}.$$

Pošto je

$$X[0]=\lim_{k\to 0}X[k]=\frac{U_0}{2}\lim_{k\to 0}\frac{1-\frac{k^2\pi^2}{2!}+\frac{k^4\pi^4}{4!}-\cdots+k\pi\sin k\pi-1}{k^2\pi^2}=\frac{U_0}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{U_0}{4},$$

i kako je ispunjeno da je $\forall k\in\mathbb{Z}$, $\sin k\pi=0$, a $\cos k\pi=(-1)^k$, može da se napiše

$$X[k]=\begin{cases}\frac{U_0}{2k^2\pi^2}(\cos k\pi-1)=\frac{U_0}{2k^2\pi^2}\left((-1)^k-1\right)=-\frac{U_0}{k^2\pi^2} & k=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots\\ \frac{U_0}{4} & k=0\end{cases}$$

Amplitudski spektar je dat sa

$$|X[k]|=\begin{cases}\frac{U_0}{k^2\pi^2} & k=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots\\ \frac{U_0}{4} & k=0\\ 0 & k=\pm2,\pm4,\pm6,\cdots\end{cases}$$

a fazni spektar je dat sa

$$\arg\{X[k]\}=\begin{cases}\pi & k\neq 0,\\ 0 & k=0.\end{cases}$$

Početni signal može biti predstavljen u obliku kosinusnog reda:

$$x(t)=\frac{U_0}{4}+\frac{U_0}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k^2}\cos k\omega t=\frac{U_0}{4}-\frac{2U_0}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\omega t.$$

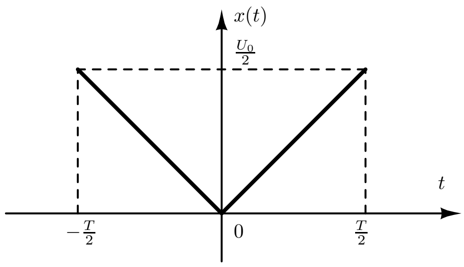
NAPOMENA: Često je lakše srednju vrednost signala izračunati pomoću integrala nego pomoću limesa:

$$X[0]=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{U_0}{T}\,|\,t\,|\,dt=\frac{2U_0}{T^2}\int_{0}^{T/2}t\,dt=\frac{U_0}{4}.$$

Generalno kada se fizički interpretira spektar preko kosinusnog reda do rezultata je moguće doći primenom smena: $C[k]=2\,|X[k]|$, $\theta[k]=\arg(X[k])$, $C[0]=X[0]$.

Drugi način, pomoću tabele osnovnih funkcija

Na slici 3.8.1 prikazana je osnovna perioda signala $x(t)$.



Slika 3.8.1.

Na osnovu slike 3.8.1 se vidi da je $x(t)=\frac{U_0}{2}\left(1-\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)\right)$. Na osnovu tabele 4.2 je

$$X[k]=\frac{U_0}{2}\left(\delta[k]-\frac{T/2}{T}\,\text{sinc}^2\left(k\frac{T/2}{T}\right)\right)=\frac{U_0}{2}\left(\delta[k]-\frac{1}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)\right),$$

$$X[0]=\frac{U_0}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{U_0}{4},$$

$$X[k]=-\frac{U_0}{4}\frac{\sin^2(k\pi/2)}{(k\pi/2)^2}=-U_0\frac{\sin^2(k\pi/2)}{k^2\pi^2}=-\frac{U_0}{k^2\pi^2}\left(\frac{1-\cos k\pi}{2}\right),\quad k\neq 0.$$

Vidi se da je primena tabele znatno jednostavnija nego direktan metod.
b) Spektar snage je $P[k] = |X[k]|^2$ i jednak je $P[0] = \frac{U_0^2}{16}$ i za neparno $n = 2k-1$ je $P[2k-1] = \frac{2U_0^2}{\pi^4}\frac{1}{(2k-1)^4}$.
c)

$$\overline{x^2(t)} = {x_{eff}}^2(t) = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt = \frac{2}{T}\int\limits_{0}^{T/2}\left(\frac{U_0}{T}\right)^2 t^2 dt = \frac{{U_0}^2}{12} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|X[k]|^2$$

Ako je $x(t) \approx \sum\limits_{k=-N}^{N} X[k]e^{jk\omega t}$, potrebno je naći minimalnu vrednost za N tako da relativna greška bude:

$$\frac{{x_{eff}}^2(t) - \sum\limits_{k=-N}^{N}|X[k]|^2}{{x_{eff}}^2(t)} \leq 0.001,$$

odnosno

$$\frac{\sum\limits_{k=-N}^{N}|X[k]|^2}{{U_0}^2/12} > 0.999.$$

Probanjem nekoliko vrednosti dobija se da je $N = 3$.
d) Koristeći teoremu o pomeranju argumenta dobija se

$$X[k] = \frac{U_0 e^{-jk\omega T_0}}{2k^2\pi^2}\left(\cos k\pi + k\pi \sin k\pi - 1\right),$$

odnosno, na osnovu tačke a)

$$X[k] = \begin{cases} \frac{U_0}{k^2\pi^2}\left(-\cos k\omega T_0 + j\sin k\omega T_0\right) & k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots \\ \frac{U_0}{4} & k = 0. \end{cases}$$

Amplitudski spektar ostaje isti jer se samo vrši translacija signala, a fazni spektar se menja

$$\arg\{X[k]\} = \begin{cases} \pi - k\omega T_0 & k \neq 0, \\ 0 & k = 0. \end{cases}$$

Zadatak 3.9.

a) Odrediti kompleksni spektar periodičnog signala čija je osnovna perioda definisana sa $x(t) = U_0 \cos\omega_0 t$ u intervalu $(-T/2, T/2)$, pri čemu je $\frac{2\pi}{T} \neq \omega_0$.
b) Prokomentarisati spektar za različite vrednosti kružne učestanosti ω_0.

Rešenje:

a) Pošto se podrazumeva da je $T_F = T$, Furijeovi koeficijenti se dobijaju iz

$$X[k] = \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-jk\omega t}\cos\omega_0 t \cdot dt = \frac{\omega}{2\pi}\left(F\left(\frac{\pi}{\omega}\right) - F\left(-\frac{\pi}{\omega}\right)\right)$$

Primenjujući izraz za primitivnu funkciju iz dodatka A, uzimajući u obzir parnost kosinusa, dobija se

$$X[k] = U_0\frac{\omega}{2\pi}\left(2\Re\left\{\frac{e^{-jk\pi}}{-k^2\omega^2+\omega_0^2}\left(-jk\omega\cos\frac{\omega_0\pi}{\omega} + \omega_0\sin\frac{\omega_0\pi}{\omega}\right)\right\}\right),$$

$$X[k] = U_0\frac{\omega}{\pi}\Re\left\{\frac{\cos k\pi - j\sin k\pi}{-k^2\omega^2+\omega_0^2}\left(-jk\omega\cos\frac{\omega_0\pi}{\omega}+\omega_0\sin\frac{\omega_0\pi}{\omega}\right)\right\} =$$
$$= U_0\frac{\omega}{\pi}\left(\frac{\omega_0\cdot\cos k\pi\sin\frac{\omega_0\pi}{\omega} - k\omega\cdot\sin k\pi\cos\frac{\omega_0\pi}{\omega}}{\omega_0^2-k^2\omega^2}\right) = U_0\frac{\omega}{\pi}\left(\frac{k\omega\cdot\sin k\pi\cos\frac{\omega_0\pi}{\omega} - \omega_0\cdot\cos k\pi\sin\frac{\omega_0\pi}{\omega}}{k^2\omega^2-\omega_0^2}\right).$$

Pošto je k celobrojno važi

$$X[k] = U_0\frac{\omega}{\pi}(-1)^{k+1}\frac{\omega_0\cdot\sin\frac{\omega_0\pi}{\omega}}{k^2\omega^2-\omega_0^2}.$$

b) Ako odnos $\frac{\omega_0}{\omega}$ nije ceo broj, pojavljuju se sve spektralne komponente za $k\in\{-\infty,+\infty\}$. Ukoliko je $\omega >> \omega_0$, tada $\cos\frac{\omega_0}{\omega}\pi\approx 1$, a $\sin\frac{\omega_0}{\omega}\pi\approx\frac{\omega_0}{\omega}\pi$, pa se dobija

$$X[k] = U_0(-1)^{k+1}\frac{{\omega_0}^2}{k^2\omega^2},\quad k\neq 0$$

Ukoliko je odnos $\frac{\omega_0}{\omega}=n$, $n\in\mathbb{N}$ tada je $X[k]=0$ za $|n|\neq|k|$, dok je za $|n|=|k|$

$$\begin{aligned}
X[k] &= \lim_{n\to k} U_0\frac{\omega}{\pi}(-1)^{k+1}\frac{n\omega\,\sin(n\pi)}{k^2\omega^2-n^2\omega^2}\\
&= U_0\frac{(-1)^{k+1}}{\pi}\lim_{n\to k}\frac{n\sin(n\pi)}{k^2-n^2} = U_0\frac{(-1)^{k+1}}{\pi}\lim_{n\to k}\frac{-n\sin((k-n-k)\pi)}{(k+n)(k-n)} =\\
&= U_0(-1)^{k+1}\lim_{n\to k}\frac{-n\,(\sin((k-n)\pi)\,\cos(k\pi)-\sin(k\pi)\,\cos((k-n)\pi))}{(k+n)(k-n)\pi} =\\
&= U_0(-1)^{k+1}\lim_{n\to k}\frac{-n\,\left(\sin((k-n)\pi)\,(-1)^k\right)}{(k+n)(k-n)\pi} = \frac{U_0}{2},\quad k=\pm n
\end{aligned}$$

U tom slučaju, može se pisati: $X[k]=\frac{U_0}{2}\left(\delta[k-n]+\delta[k+n]\right)$.

Zadatak 3.10.

Odrediti amplitudski i fazni spektar periodičnog signala čija je osnovna perioda u intervalu $(-T/2, T/2)$ definisana sa $x(t)=\frac{U_0}{T}t$.

Rešenje:

Signal je neparan, i na osnovu izraza za primitivnu funkciju iz dodatka A dobija se:

$$X[k] = \frac{U_0}{T^2}2j\Im\left\{\frac{1}{-k^2\omega^2}e^{-jk\omega t}\left.(-jk\omega t-1)\right|_{t=T/2}-\frac{1}{k^2\omega^2}\right\} =$$
$$\frac{jU_0}{2k^2\pi^2}\left(k\omega\frac{T}{2}\cos k\omega\frac{T}{2}-\sin k\omega\frac{T}{2}\right) = \frac{jU_0}{2k^2\pi^2}\left(k\pi\cos k\pi-\sin k\pi\right) = \frac{jU_0}{2k\pi}(-1)^k,\text{ za } k\neq 0,$$
$$X[k]=0,\ \text{za } k=0.$$

Važi da je

$$|X[k]| = \frac{U_0}{2k\pi},\quad \arg\{X[k]\} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & k \text{ neparno},\\ \frac{\pi}{2}, & k \text{ parno}.\end{cases}.$$

Zadatak 3.11.

Odrediti kompleksni spektar signala $y(t)$ čija je osnovna perioda data sa

$$y_F(t) = \begin{cases} U_0\cos\omega t, -\frac{T}{4}<t<\frac{T}{4}\\ 0,\ \left(-\frac{T}{2}<t<-\frac{T}{4}\right)\wedge\left(\frac{T}{4}<t<\frac{T}{2}\right)\end{cases},\quad \omega=\frac{2\pi}{T}.$$

Rešenje:

Pošto je $y_F(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T/2}\right) U_0 \cos\omega t$ unutar osnovne periode, koristeći se osobinom konvolucije u spektralnom domenu kao i osobinom konvolucije sa diskretnim jediničnim impulsom, može se napisati

$$Y[k] = X[k] * \left(\frac{U_0}{2}\left(\delta[k-1]+\delta[k+1]\right)\right) = \frac{U_0}{2}\left(X[k-1]+X[k+1]\right),$$

gde je $X[k] = \frac{T/2}{T}\,\mathrm{sinc}\left(k\frac{T/2}{T}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$. Na osnovu toga je:

$$\begin{aligned}
Y[k] &= \frac{U_0}{2\pi}\cdot\left(\frac{\sin\frac{k-1}{2}\pi}{k-1}+\frac{\sin\frac{k+1}{2}\pi}{k+1}\right) = \frac{U_0}{2\pi}\cdot\left(\frac{(k+1)\sin\frac{k-1}{2}\pi}{k^2-1}+\frac{(k-1)\sin\frac{k+1}{2}\pi}{k^2-1}\right) = \\
&= \frac{U_0}{2\pi}\cdot\left(\frac{k\left(\sin\frac{k-1}{2}\pi+\sin\frac{k+1}{2}\pi\right)}{k^2-1}+\frac{\sin\frac{k-1}{2}\pi-\sin\frac{k+1}{2}\pi}{k^2-1}\right) = \\
&= \frac{U_0}{2\pi}\cdot\left(\frac{2k\sin\frac{k}{2}\pi\cos\frac{1}{2}\pi-2\cos\frac{k}{2}\pi\sin\frac{1}{2}\pi}{k^2-1}\right) = -\frac{U_0}{\pi}\cdot\frac{\cos\frac{k}{2}\pi}{k^2-1}.
\end{aligned}$$

Dobija se:

$$\begin{aligned}
Y[0] &= \frac{U_0}{\pi},\\
Y[1] &= -\frac{U_0}{\pi}\lim_{k\to 1}\frac{\cos\frac{k}{2}\pi}{(k+1)(k-1)} = -\frac{U_0}{\pi}\lim_{k\to 1}\frac{-\sin\frac{k-1}{2}\pi}{(k+1)(k-1)} = \frac{U_0}{4},\\
Y[-1] &= -\frac{U_0}{\pi}\lim_{k\to -1}\frac{\cos\frac{k}{2}\pi}{(k+1)(k-1)} = -\frac{U_0}{\pi}\lim_{k\to 1-}\frac{\sin\frac{k+1}{2}\pi}{(k+1)(k-1)} = \frac{U_0}{4}.\\
Y[k] &= -\frac{U_0}{\pi}\frac{\cos\frac{k}{2}\pi}{k^2-1} = \begin{cases} -\frac{U_0}{\pi}\frac{(-1)^{k/2}}{k^2-1}, & k=\pm 2,\pm 4,\ldots \\ 0, & k=\pm 3,\pm 5,\ldots \end{cases}.
\end{aligned}$$

Zadatak 3.12.

Odrediti amplitudski i fazni spektar signala čija je osnovna perioda data sa:

a)

$$y(t) = \begin{cases} U_0\left|\cos(\omega t)\right|, & \left(-\frac{T}{2}<t<-\frac{T}{4}\right)\wedge\left(\frac{T}{4}<t<\frac{T}{2}\right) \\ 0, & -\frac{T}{4}<t<+\frac{T}{4} \end{cases}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

b)

$$y(t) = \begin{cases} U_0\sin(\omega t), & 0<t<\frac{T}{2} \\ 0, & -\frac{T}{2}<t<0 \end{cases}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

c) $y(t) = U_0\left|\cos(\omega t)\right|.$

Rešenje:

$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T/2}\right)$ unutar osnovne periode.
a) $y(t) = (1-x(t))\left(-U_0\cos(\omega t)\right)$
b) $y(t) = x(t-T/4)\,U_0\sin(\omega t)$
c) $y(t) = (1-x(t))\left(-U_0\cos(\omega t)\right) + x(t)\cdot U_0\cos(\omega t)$

Zadatak 3.13.

Signal čija je osnovna perioda od $-\pi$ do π definisana sa

$$x_F(t) = \begin{cases} \sin(t) & |t| < \pi/2, \\ 1 & \pi/2 \leq |t| < \pi. \end{cases}$$

a) Razviti u eksponencijalni Furijeov red.
b) Razviti u trigonometrijski Furijeov red.

Rešenje:

a) Osnovna perioda signala može da se napiše kao $x_F(t) = \sin(t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\pi}\right) + 1 - \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\pi}\right)$. Imajući to u vidu, koeficijenti eksponencijalnog razvoja su

$$X[k] = \frac{j}{2}\left(\delta[k+1] - \delta[k-1]\right) * \frac{\pi}{2\pi}\,\mathrm{sinc}\left(k\frac{\pi}{2\pi}\right) + \delta[k] - \frac{\pi}{2\pi}\,\mathrm{sinc}\left(k\frac{\pi}{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{j}{2}\left(\delta[k+1] - \delta[k-1]\right) * \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) + \delta[k] - \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) =$$

$$= -\frac{j}{2}\left(\mathrm{sinc}\left(\frac{k-1}{2}\right) - \mathrm{sinc}\left(\frac{k+1}{2}\right)\right) + \delta[k] - \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right).$$

Pošto je

$$\pi\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k-1}{2}\right) - \pi\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k+1}{2}\right) = \frac{\sin\frac{k-1}{2}\pi}{k-1} - \frac{\sin\frac{k+1}{2}\pi}{k+1} = \frac{(k+1)\sin\frac{k-1}{2}\pi}{k^2-1} - \frac{(k-1)\sin\frac{k+1}{2}\pi}{k^2-1} =$$

$$= \frac{k\left(\sin\frac{k-1}{2}\pi - \sin\frac{k+1}{2}\pi\right)}{k^2-1} + \frac{\sin\frac{k-1}{2}\pi + \sin\frac{k+1}{2}\pi}{k^2-1} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{k}{2}\pi\cos\frac{1}{2}\pi + 2k\cos\frac{k}{2}\pi\sin\frac{1}{2}\pi}{k^2-1} = \frac{2k\cos\frac{k}{2}\pi}{k^2-1},$$

dobija se da je

$$X[k] = -\frac{j}{\pi}\frac{k\cos\left(\frac{k}{2}\pi\right)}{k^2-1} + \delta[k] - \frac{1}{\pi}\frac{\sin\left(\frac{k}{2}\pi\right)}{k}.$$

Razvoj glasi: $x(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\omega_0 t} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jkt}$.

b) $A[0] = \lim\limits_{k\to 0} X[k] = \frac{j}{\pi}\frac{0\cos\left(\frac{0}{2}\pi\right)}{k^2-1} + \delta[0] - \lim\limits_{k\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\sin\left(\frac{k}{2}\pi\right)}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
$A[k] = 2\Re\{X[k]\} = -\frac{2}{\pi k}\sin(k\pi/2)$, $B[k] = -2\Im\{X[k]\} = -\frac{2}{\pi}\frac{k}{k^2-1}\cos(k\pi/2)$.
Razvoj glasi: $x(t) = A[0] + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(A[k]\cos(kt) + B[k]\sin(kt)\right)$.

Zadatak 3.14.

Dat je signal $x(t) = A(\pi^2 - t^2)^2$.
a) Dokazati da važi $x(\pi) = x(-\pi)$, $x'(\pi) = x'(-\pi)$, $x''(\pi) = x''(-\pi)$, $x'''(\pi) \neq x'''(-\pi)$.
b) Koristeći rezultat iz a) u intervalu $t \in (-\pi, \pi)$ razviti signal u Furijeov red oblika $x(t) = C[0] + \sum\limits_{k=1}^{\infty} C[k]\cos(kt + \phi_k)$.

Rešenje:

a)

$$x(\pi) = A(\pi^2 - \pi^2)^2 = 0 = x(-\pi) = A(\pi^2 - (-\pi)^2)^2 = 0$$
$$x'(t) = 2A(\pi^2 - t^2) \cdot (-2t) = -4At(\pi^2 - t^2) \Rightarrow x'(\pi) = x'(-\pi) = 0$$
$$x''(t) = -4\left(-2At^2 + A(\pi^2 - t^2)\right) = 8At^2 - 4A(\pi^2 - t^2) \Rightarrow x''(\pi) = x''(-\pi) = 4A\pi^2$$
$$x'''(t) = 16At + 8At = 24At \Rightarrow x'''(\pi) \neq x'''(-\pi)$$

b) Ako se pođe od tabličnog integrala, dodatak A:

$$I_m = \int e^{at} P_m(t)dt = C + \frac{1}{a} \cdot e^{at} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{a^n} \frac{d^n P_m(t)}{dt^n}$$

i ako se stavi da je $a = -jk\omega_0$, a $P_m(t) = x(t) = A(\pi^2 - t^2)^2$, $m =$, $T_0 = 1/2\pi \Rightarrow \omega_0 = 2\pi/T_0 = 1$, i ako se uzme u obzir da je signal paran, dobijaju se koeficijenti Furijeovog reda:

$$X[k] = \Re\left\{ \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{-jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t} \sum_{n=0}^{4} \frac{1}{(jk\omega_0)^n} \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right) \Bigg|_{-\pi}^{+\pi} \right\} = \Re\left\{ \frac{1}{2\pi} \left(\frac{j}{k} e^{-jkt} \sum_{n=0}^{4} \frac{1}{(jk)^n} \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right) \Bigg|_{-\pi}^{+\pi} \right\},$$

za $k \neq 0$. Pošto je $e^{-jk\pi} = e^{-jk(-\pi)}$, dobija se

$$X[k] = \frac{1}{2\pi} \Re\left\{ \frac{j}{k} e^{-jk\pi} \sum_{n=0}^{4} \frac{1}{(jk)^n} \left(\frac{d^n x(\pi)}{dt^n} - \frac{d^n x(-\pi)}{dt^n} \right) \right\}, \; k \neq 0.$$

Na osnovu tačke a) je $\frac{d^n x(\pi)}{dt^n} - \frac{d^n x(-\pi)}{dt^n} \neq 0$ samo za $n = 3$, tako da je

$$X[k] = \frac{1}{2\pi} \Re\left\{ -\frac{1}{k} e^{-jk\pi} \frac{x'''(\pi) - x'''(-\pi)}{k^3} \right\} = \frac{1}{2\pi} \left(-\cos(k\pi) \frac{2 \cdot 24A\pi}{k^4} \right) = -(-1)^k \frac{24A}{k^4}, \; k \neq 0.$$

$C[k] = 2X[k]$, a pošto je signal paran, faze su $\phi_k = 0, \forall k$ i $C[0] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x(t)dt = \frac{8}{15}\pi^4$.

Zadatak 3.15.

Dat je signal $x(t) = t(\pi^2 - t^2)$.
a) Naći koeficijente razvoja u eksponencijalni Furijeov red signala $x(t)$ na intervalu $t \in (-\pi, \pi)$.
b) Naći koeficijente razvoja u trigonometrijski Furijeov red signala $x(t)$ na intervalu $t \in (-\pi, \pi)$.

Rešenje:

a) Imajući u vidu prethodni zadatak

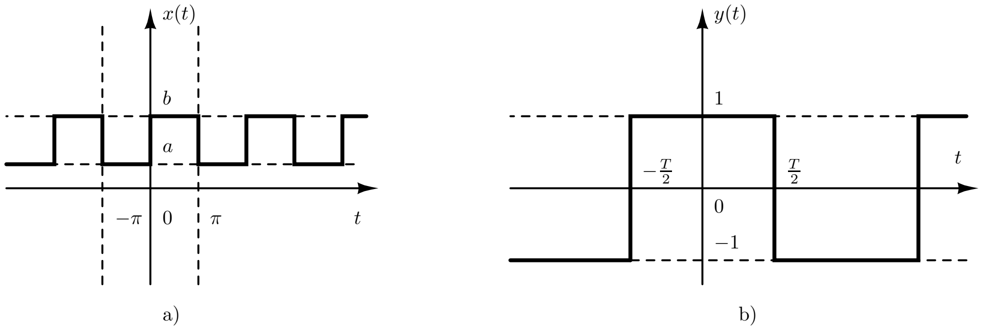
$$x(\pi) = \pi(\pi^2 - \pi^2) = 0 = x(-\pi) = -\pi(\pi^2 - (-\pi)^2).$$
$$x'(t) = (\pi^2 - t^2) - 2t^2 \Rightarrow x'(\pi) = x'(-\pi).$$
$$x''(t) = -6t.$$
$$x'''(t) = -6.$$

$$X[k] = \frac{j}{2\pi} \Im\left\{ \frac{1}{jk} e^{-jk\pi} \frac{x''(\pi) - x''(-\pi)}{k^2} \right\} = -\frac{j}{2\pi} \left(\cos(k\pi) \frac{2 \cdot 6\pi}{k^3} \right) = (-1)^{k+1} \frac{6j}{k^3}, \; k \neq 0,$$

$X[0] = 0.$
b) $A[k] = 0, \; B[k] = 2\Im\{X[k]\} = (-1)^{k+1} \frac{12}{k^3}, \; k \in \mathbf{N}.$

Zadatak 3.16.

Kompleksni spektar signala prikazanog na slici 3.16.1a dat je sa $X(k) = \frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)}{2j\pi}\frac{1-\cos k\pi}{k}$.
a) Koristeći se osobinama razvoja u Furijeov red, naći kompleksan razvoj signala $y(t)$ periode T, prikazanog na slici 3.16.1b.
b) Koristeći se osobinama razvoja u Furijeov red, naći kosinusni razvoj signala $z(t) = |\cos\omega t|$, $\omega = 2\pi/T$.



Slika 3.16.1.

Rešenje:

a) Transformacija signala $x(t)$ će bit obavljena postepeno: $x(t) \to y_1(t) \to y_2(t) \to y(t)$.
Skaliranje amplitude: Srednja vrednost novog signala treba da bude 0 tako da važi da je važi da je $a = -b$. Amplituda signala $y(t)$ je 1, pa je $b - a = 2$. Prema tome je $b = 1, a = -1$. Dobijeni signal je $Y_1[k] = \frac{1}{j\pi}\frac{1-\cos k\pi}{k}$.
Skaliranje vremenske ose: Kako se novi signal razvija na osnovnoj periodi, amplitude harmonika se ne menjaju

$$Y_2[k] = Y_1[k] = \frac{1}{j\pi}\frac{1-\cos k\pi}{k}.$$

Vremensko pomeranje signala: Signal se pomera za $T/4$

$$y(t) = y_2(t + T/4) = Y[k] = Y_1[k]e^{jk\omega T/4} = \frac{1}{j\pi}\frac{1-\cos k\pi}{k}e^{jk\pi/2}.$$

Konačno:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y[k]e^{jk\omega t}.$$

b)

$$z(t) = y(t)\cos\omega t \Rightarrow Z[k] = Y[k] * \left(\frac{\delta(k-1)}{2} + \frac{\delta(k+1)}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(Y[k+1] + Y[k-1]\right)$$

$$Z[k] = \frac{1}{2j\pi}\left(\frac{1-\cos(k+1)\pi}{k+1}e^{j(k+1)\pi/2} + \frac{1-\cos(k-1)\pi}{k-1}e^{j(k-1)\pi/2}\right) =$$
$$\frac{1}{2j\pi}\left(j(k-1)\frac{1-\cos(k+1)\pi}{(k+1)(k-1)}e^{jk\pi/2} - j(k+1)\frac{1-\cos(k-1)\pi}{(k+1)(k-1)}e^{jk\pi/2}\right) = -\frac{e^{jk\pi/2}}{\pi(k^2-1)}(1+\cos k\pi)$$

Pošto je $z(t)$ parna funkcija, koeficijenti realnog reda su

$$Z_e[0] = \frac{2}{\pi},$$
$$Z_e[k] = -2\left(\frac{\cos k\frac{\pi}{2}}{\pi(k^2-1)}(1+\cos k\pi)\right) = \begin{cases} 0, \text{ za neparno } k, \\ \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{k/2-1}}{k^2-1}, \text{ za parno } k\ , \end{cases}$$

pa je

$$z(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1}\cos 2k\omega t.$$

Zadatak 3.17.

Razviti date signale u trigonometrijski Furijeov red na intervalu $(-T/2, T/2)$, ako je $T = 2\pi/\omega$ i
a) $x(t) = t\sin\omega t$,
b) $x(t) = t\cos\omega t$.

Rešenje:

a) Za signal $y(t) = t$ važi da je $Y[k] = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} te^{-jk\omega t}dt = \frac{j}{k^2\pi\omega}(k\pi\cos k\pi - \sin k\pi)$ Na osnovu toga se dobija da je da je:

$$X[k] = Y[k] * \left(\frac{j}{2}\left(\delta[k+1] - \delta[k-1]\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi\omega}\left(\frac{(k+1)\pi\cos(k+1)\pi - \sin(k+1)\pi}{(k+1)^2} - \frac{(k-1)\pi\cos(k-1)\pi - \sin(k-1)\pi}{(k-1)^2}\right).$$

Za $k = 0$ dobija se

$$X[0] = -\frac{1}{2\pi\omega}\left(\frac{\pi\cos\pi - \sin\pi}{(+1)^2} - \frac{-1\cdot\pi\cos(-1\pi) - \sin(-1\pi)}{(-1)^2}\right) = \frac{1}{\omega}.$$

Za $k = 1$ dobija se

$$X[1] = -\frac{1}{2\pi\omega}\left(\frac{2\pi\cos 2\pi - \sin 2\pi}{(1+1)^2} - \lim_{k\to 1}\frac{(k-1)\pi\cos(k-1)\pi - \sin(k-1)\pi}{(k-1)^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi\omega}\left(\frac{2\pi}{4}\right) = -\frac{1}{4\omega}.$$

Identičnim postupkom se dobija za $k = -1$ da je $X[-1] = -1/4\omega$. Za $|k| > 1$ je

$$X[k] = -\frac{1}{2\pi\omega}\left(\frac{(k+1)\pi\overbrace{\cos(k+1)\pi}^{-(-1)^k} - \overbrace{\sin(k+1)\pi}^{0}}{(k+1)^2} - \frac{(k-1)\pi\overbrace{\cos(k-1)\pi}^{-(-1)^k} - \overbrace{\sin(k-1)\pi}^{0}}{(k-1)^2}\right) =$$

$$= -\frac{(-1)^k}{2\omega}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = -\frac{1}{\omega}(-1)^k\frac{1}{k^2-1}.$$

Pošto je $x(t)$ parna funkcija, postojaće samo koeficijenti $A[k]$,

$$A[k] = 2\Re\{X[k]\} = \begin{cases} 2\Re\{X[k]\} = -\frac{2}{\omega}(-1)^k\frac{1}{k^2-1}, & k > 1, \\ 2\Re\{X[k]\} = -\frac{1}{2\omega}, & k = 1, \\ X[k] = \frac{1}{\omega}, & k = 0. \end{cases}$$

Za $-T/2 < t < T/2$, važi da je

$$t\sin\omega t = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{2\omega}\cos\omega t - \frac{2}{\omega}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos k\omega t}{k^2-1}.$$

b) Za $-T/2 < t < T/2$ je

$$t\cos\omega t = -\frac{1}{2\omega}\sin\omega t + \frac{2}{\omega}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{k^2-1}\sin k\omega t.$$

Zadatak 3.18.

Primenom formalnog razvoja, razviti date signale u trigonometrijski Furijeov red na intervalu $(-T/2, T/2)$, ako je $T = 2\pi/\omega$.
a) $x(t) = \frac{a\sin\omega t}{1-2a\cos\omega t+a^2}$, $|a| < 1$,
b) $x(t) = \frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega t+a^2}$, $|a| < 1$,
c) $x(t) = \frac{1-a\cos\omega t}{1-2a\cos\omega t+a^2}$, $|a| < 1$.

Rešenje:

a) Koristeći smenu $z = e^{-j\omega t}$ na osnovu Ojlerovih formula važi da je

$$\cos(\omega t) = \frac{z^2+1}{2z}, \quad \sin(\omega t) = -\frac{z^2-1}{2jz}.$$

Na osnovu toga je

$$x(t) = \frac{a\sin\omega t}{1-2a\cos\omega t+a^2} = -\frac{a(z^2-1)}{2j(1-az)(z-a)} = -\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-az} - \frac{1}{1-a/z}\right).$$

Kako je $|az| = |a|\left|e^{j\omega t}\right| < 1$ i $|a/z| = |a/|\left|e^{-j\omega t}\right| < 1$, izrazi $\frac{1}{1-az}$ i $\frac{1}{1-a/z}$ se mogu razviti u potencijalne redove:

$$x(t) = -\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-az} - \frac{1}{1-az^{-1}}\right) = -\frac{1}{2j}\left(\sum_{k=0}^{\infty}a^n z^n - \sum_{k=0}^{\infty}a^n z^{-n}\right) =$$
$$= -\sum_{k=0}^{\infty}a^k\frac{z^k - z^{-k}}{2j} = \sum_{k=0}^{\infty}a^k\frac{e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}}{2j} = \sum_{k=0}^{\infty}a^k\sin(k\omega t).$$

b) $x(t) = 1 + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty}a^k\cos(k\omega t)$

c) $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}a^k\cos(k\omega t)$

Zadatak 3.19.

Primenom formalnog razvoja, razviti date signale u trigonometrijski Furijeov red na njihovoj osnovnoj periodi:
a) $x(t) = \ln\left|2\cos\frac{\omega t}{2}\right|$,
b) $x(t) = \ln\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|$,
c) $x(t) = \ln\left|\tan\frac{\omega t}{2}\right|$.
d) $x(t) = \sin(\omega t)\cdot\ln\left(2\cos\frac{\omega t}{2}\right)$,
e) $x(t) = \cos(\omega t)\cdot\ln\left(2\cos\frac{\omega t}{2}\right)$.

Rešenje:

a) Ispravljena kosinus funkcija ima duplo kraću periodu od originalne tako da je osnovna perioda signala $T = 2\pi/\omega$. Ako se signal razvija na intervalu $(-T/2, T/2)$, za osnovnu periodu signala važi da je: $x_f(t) = \ln\left|2\cos\frac{\omega t}{2}\right| = \ln\left(2\cos\frac{\omega t}{2}\right)$. Kako je

$$\ln\left(2\cos\frac{\omega t}{2}\right) = \ln\frac{1+e^{j\omega t}}{e^{j\omega t/2}} = \ln\left(1+e^{j\omega t}\right) - \ln e^{j\omega t/2} = \ln(1+z) - j\frac{\omega t}{2}.$$

Kako je $|z| < 1$, i $z^k = e^{jk\omega t} = \cos k\omega t + j \sin k\omega t$, dobija se da je

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{e^{jk\omega t}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos k\omega t}{k} + j \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin k\omega t}{k},$$

$$\ln\left(2\cos\frac{\omega t}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos k\omega t}{k} + j\left(-\frac{\omega t}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin k\omega t}{k}\right).$$

Pošto je signal $x(t)$ realan, sleduje da je: $-\frac{\omega t}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin k\omega t}{k} = 0$, i $\ln\left(2\cos\frac{\omega t}{2}\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos k\omega t}{k}$. Razvoj važi na intervalu $(-T/2, T/2)$, ali ne i na samoj granici intervala tako da je

$$\ln\left|2\cos\frac{\omega t}{2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos k\omega t}{k},$$

za svako t osim u trenucima $t = T/2 + kT$, $k \in \mathbf{Z}$.

Vidi se da je pod istim uslovima razvoj signala $y(t) = \frac{1}{2}\omega t$ jednak

$$y(t) = \frac{\omega t}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin k\omega t}{k}.$$

b) $x(t) = -\ln 2 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\omega t}{k}, \; t \neq kT, \; k \in \mathbf{Z}$

c) $x(t) = -2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\omega t}{2k+1}, \; t \neq kT/2, \; k \in \mathbf{Z}$

d) Pošto je

$$x(t) = \sin(\omega t) \cdot \ln\left(2\cos\frac{\omega t}{2}\right) = \sin\omega t \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos k\omega t}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin\omega t \cos k\omega t}{k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin(1+k)\omega t - \sin(k-1)\omega t}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-2} \frac{\sin\omega t}{k-1} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin k\omega t}{k+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \sin\omega t \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) - (-1)^0 \frac{\sin 0\omega t}{0+1} - (-1)^1 \frac{\sin\omega t}{1+1}\right).$$

Dobija se

$$x(t) = \frac{\sin\omega t}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2-1} \sin k\omega t.$$

e)

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{\cos\omega t}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2-1} \cos k\omega t.$$

Zadatak 3.20.

Razviti dati signal u trigonometrijski Furijeov red na intervalu $(-T/2, T/2)$, ako je $T = 2\pi/\omega$. $x(t) = \ln\left(1 - 2a\cos\omega t + a^2\right)$, $|a| < 1$.

Rešenje:

Pošto je

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2\omega \cdot \frac{a\sin\omega t}{1 - 2a\cos\omega t + a^2} = 2\omega \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a^k \sin k\omega t,$$

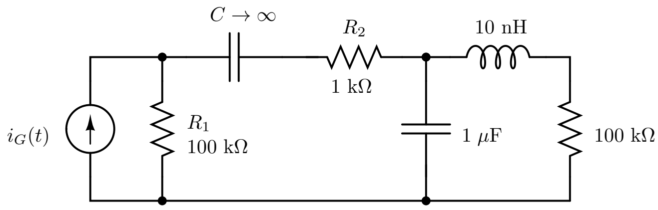
integracijom se dobija da je

$$x(t) = -2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{\sin k\omega t}{k} + C,$$

gde je $C \in \mathbb{R}$ neodređena konstanta integracije. Kako za $a = 0$ važi $x(t) = 0$, dobija se da je $C = 0$.

Zadatak 3.21.

U kolu sa slike 3.21.1, struja generatora je data izrazom $i_G(t) = I_m(1 + \cos(\omega t)\sin^2(\omega t))$.
a) Primenom formalnog razvoja, ili na neki drugu način, razviti signal $i_G(t)$ u kompleksan Furijeov red.
b) Odrediti snagu koja se razvija na otporniku R_1.
c) Odrediti snagu koja se razvija na otporniku R_2.
Poznato je: $I_m = 1$ mA, $\omega = 2\pi \cdot 100$ kHz.



Slika 3.21.1.

Rešenje:

a)

$$i_G(t) = I_m(1 + \cos(\omega t)\sin^2(\omega t)) = I_m \left(1 + \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \frac{\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)^2}{-4}\right) =$$

$$= I_m \left(1 - \frac{\left(e^{2\omega t} - e^{-2\omega t}\right)\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)}{8}\right) = I_m \left(1 - \frac{e^{-3\omega t} - e^{-\omega t} - e^{\omega t} + e^{3\omega t}}{8}\right)$$

$$I_G[k] = I_m \left(\delta[k] - \frac{1}{8}\left(\delta[k+3] - \delta[k-1] - \delta[k+1] + \delta[k-3]\right)\right)$$

b) Pošto je $R_1 \gg R_2 + Z$ na učestanosti od 100 kHz, gde je Z impedansa koju vidi otpornik R_2 sa desne strane, može se smatrati da se jednosmerna komponenta struje zatvara samo kroz R_1, a naizmenična samo kroz $Z + R_2$.

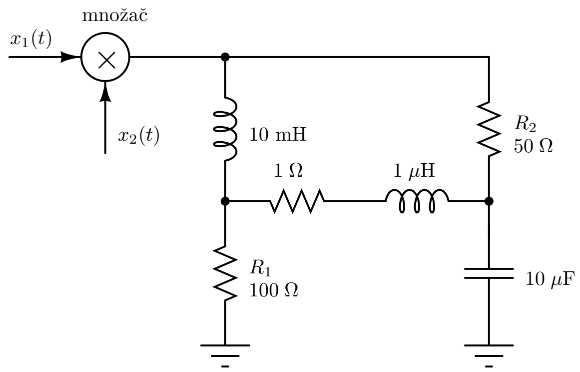
$$P_{R_1} = R_1 {I_m}^2 = 100 \text{ mW}$$

c) Na osnovu Paservalove teoreme

$$P_2 = 2R_2 \sum_{k=1}^{\infty} |I_G[k]|^2 = 4R_2 \frac{{I_m}^2}{8^2} = \frac{1}{16} \text{ mW}.$$

Zadatak 3.22.

U kolu sa slike 3.22.1, signali $x_1(t)$ i $x_2(t)$ su složenoperiodični sa istom osnovnom periodom $T_0 = 10\ \mu$s. Koeficijenti razvoja tih signala u kompleksni Furijeovred su $X_1[k] = 1\sqrt{\text{V}}\,(10-|k|)\,(\text{u}[k+10]-\text{u}[k-10])$ i $X_2[k] = 1\sqrt{\text{V}}\,(\text{u}[k+10] - \text{u}[k-10])$.
a) Izračunati konvoluciju $X_1[k] * X_2[k]$.
b) Odrediti snagu koja se razvija na otporniku R_1 sa relativnom greškom manjom od 5%.
c) Odrediti snagu koja se razvija na otporniku R_2 sa relativnom greškom manjom od 5%.



Slika 3.22.1.

Rešenje:

a) U kolu sa slike 3.22.1 su naponski signali $x_1(t)$ i $x_2(t)$ složenoperiodični sa istom osnovnom periodom. Razvoj $X_1[k]$ se može napisati kao

$$X_1[k] = 1\,\sqrt{\mathrm{V}}\,(10-|k|)\,(\mathrm{u}[k+10]-\mathrm{u}[k-10]) = 1\,\sqrt{\mathrm{V}}\,((10+k)\,(\mathrm{u}[k+10]-\mathrm{u}[k])+(10-k)\,(\mathrm{u}[k]-\mathrm{u}[k-10])) =$$

$$= (k+10)\,\mathrm{u}[k+10] - 2k\,\mathrm{u}[k] + (k-10)\,\mathrm{u}[k-10].$$

Konvolucija

$$Y_1[k] = k\,\mathrm{u}[k] * \mathrm{u}[k] = \frac{k\,(k+1)}{2}\,\mathrm{u}[k],$$

pa je

$$Y[k] = X_1[k] * X_2[k] = Y_1[k+20] - 2\,Y_1[k+10] + Y_1[k] - Y_1[k] + 2\,Y_1[k-10] - Y_1[k-20],$$

$$Y[k] = Y_1[k+20] - Y_1[k-20] - 2\,(Y_1[k+10] - Y_1[k-10]).$$

b) DC komponenta se razvija samo na otporniku R_1. Snaga na otporniku je jednaka:

$$P_{R_1} = \frac{Y^2[0]}{R_1} = 100\ \mathrm{W}.$$

c) AC komponenta se zatvara samo kroz otpornik R_2. Snaga se može odrediti računanjem efektivne vrednosti naizmenične komponente:

$$Y_{eff} = \sum_{n=-20}^{20} Y^2[n] - Y^2[0] \approx \int_{-20}^{20} Y^2[v]\,dv - Y^2[0].$$

Korišćenjem aproksimacije $Y_1[v] = \frac{v\,(v+1)}{2}\,\mathrm{u}[v] \approx \frac{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2}{2}\,\mathrm{u}[v]$, računa se

$$Y_{eff} \approx \underbrace{\int_{-20}^{-10} Y_1^2[v+20]\,dv}_{I_1} + \underbrace{\int_{-10}^{10} (Y_1[v+20] - 2\,Y_1[k+10])^2\,dv}_{I_2}$$

$$+ \underbrace{\int_{10}^{20} (Y_1[k+20] - 2\,Y_1[k+10] + 2\,Y_1[k-10])^2\,dv}_{=I_1} - Y^2[0],$$

$$Y_{eff}^2 \approx 2\,I_1 + I_2 - Y^2[0],$$

$$I_1 = \int_{-20}^{-10} \frac{(v+20.5)^4}{4}\, dv = 6381,$$

$$I_2 = \int_{-10}^{10} \frac{((v+20.5)^2 - 2\,(v+10.5)^2)^2}{4}\, dv = 143084,$$

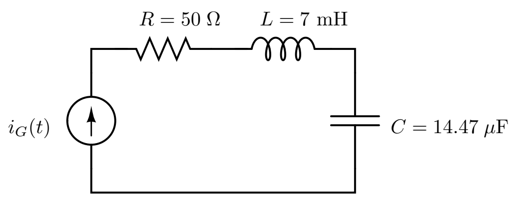
$$Y_{eff}^2 \approx 145800,$$

pa je $P_{R_2} = \frac{Y_{eff}^2}{R_2} = 2.9$ kW.

Tačan kvadrat efektivne vrednosti AC komponente je $Y_{eff}^2 = 143668$.

Zadatak 3.23.

Za kolo prikazano na slici 3.23.1 važi $i_G(t) = I_m \frac{4\,\sin(\omega t)}{5-4\,\cos(\omega t)}$, pri čemu je $I_m = 2$ A, a $\omega = 2\pi\, 500$ Hz.
a) Odrediti napon strujnog generatora na frekvenciji $f = 500$ Hz.
b) Odrediti napon strujnog generatora na frekvenciji $f_1 = 2f = 1000$ Hz.
c) Odrediti efektivnu vrednost struje $i_G(t)$.



Slika 3.23.1.

Rešenje:

Struja generatora se može predstaviti preko Furijeovog reda: $i_G(t) = 2I_m \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k}\, \sin(k\omega t)$.

a) Na ovoj frekvenciji je kolo u rezonanciji, a $k = 1$, pa je

$$v_G(t) = RI_m\, \sin(\omega t) = 100 \text{ V} \sin(\omega t).$$

b) U ovom slučaju je $k = 2$, pa je ekvivalentna impedansa koju „vidi” strujni izvor

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = (50 + j\,33)\,\Omega = 59.9 \cdot \mathrm{e}^{j30.96^\circ}\ \Omega,$$

pa je

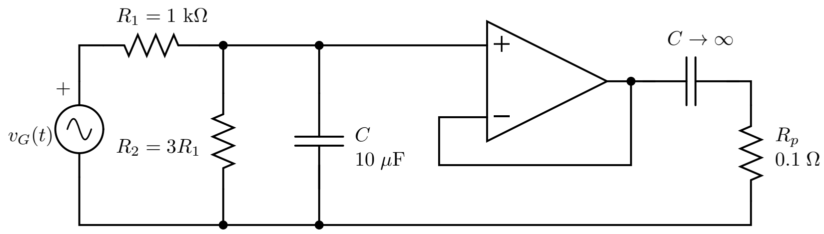
$$\underline{V}_G = \underline{Z}\, \frac{I_m}{2}\, \mathrm{e}^{j90^\circ} = 59.9 \cdot \mathrm{e}^{j120.96^\circ} \text{ V}.$$

c) Efektivna vrednost se određuje na osnovu Parsevalove teoreme.

$$I_{G,eff} = 2I_m \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2^{-k}}{\sqrt{2}}\right)^2} = I_m \sqrt{\frac{8}{3}} = 3.266 \text{ A}.$$

Zadatak 3.24.

U kolu sa slike 3.24.1 upotrebljeni pojačavač se može smatrati linearnim, a pobudni naponski signal je oblika $v_G = U_0\, \frac{1-0.25\,\cos(\omega t)}{1.0625-0.5\,\cos(\omega t)}$, $U_0 = 2$ V, $\omega = 10\ \frac{\text{krad}}{\text{s}}$.
a) Odrediti koeficijente razvoja napona $v_g(t)$ u trigonometrijski Furijeov red na njegovoj osnovnoj



Slika 3.24.1.

periodi.
b) Odrediti snagu koja se razvija na otpornicima R_1, R_2 i R_p.

Rešenje:

a) $v_G(t) = U_0 \sum_{k=0}^{+\infty} 4^{-k} \cos(k\omega t)$
b) Moduo impedanse kondenzatora na učestanosti prvog harmonika je zanemarljiv u odnosu na R_1 i R_2 tako da se na neinvertujućem priključku operacionog pojačavača može zanemariti naizmeična komponenta napona:

$$P_{R_1} = R_1 I_{R_1}^2 + \frac{U_0^2}{2R_1} \sum_{k=1}^{+\infty} |4^{-k}|^2 = R_1 \left(\frac{U_0}{R_1 + R_2}\right)^2 + \frac{U_0^2}{2R_1} \sum_{k=1}^{+\infty} 16^{-k} = \frac{U_0^2}{16\,R_1} + \frac{U_0^2}{2\,R_1} \frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{16}} =$$

$$= \frac{U_0^2}{16\,R_1} + \frac{U_0^2}{30\,R_1} = 0.38 \text{ mW}.$$

Na R_2 se disipira tri puta veća DC snaga nego na otporniku R_1: $P_{R_2} = 0.75$ mW.

U slučaju otpornika R_p je naizmenična komponenta na neinvertujućem priključku nezanemarljiva jer se ona jedina disipira:

$$P_{R_p} \approx \frac{U_0^2}{2R_p} \left(\frac{|Z_C|}{R_1}\right)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} |4^{-k}|^2 = 10^{-3}\, \frac{U_0^2}{30} = 0.13 \text{ mW}.$$

4.2 Furijeova transformacija kontinualnih signala

4.2.1 Osobine Furijeove transformacije

Original $x(t)$	**Slika** $X(j\omega) = X(s),\ s = j\omega$
$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
$x(t - t_0)$	$X(j\omega)\,\mathrm{e}^{-j\omega t_0}$
$x(t)\,\mathrm{e}^{j\alpha t}$	$X(j(\omega - \alpha))$
$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
$x(-t)$	$X(-j\omega)$
$x(at)$	$\dfrac{1}{\lvert a\rvert}\, X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$x(t) * y(t)$	$X(j\omega)\, Y(j\omega)$
$x(t)\, y(t)$	$\frac{1}{2\pi}\, X(j\omega) * Y(j\omega)$
$\dfrac{d}{dt}x(t)$	$j\omega\, X(j\omega)$
$\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$	$\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)\right)\, X(j\omega)$
$t\, x(t)$	$j\,\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$
$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(j\omega) = X^*(-j\omega)$ $\Re\{X(j\omega)\} = \Re\{X(-j\omega)\}$ $\Im\{X(j\omega)\} = -\Im\{X(-j\omega)\}$ $\lvert X(j\omega)\rvert = \lvert X(-j\omega)\rvert$ $\arg(X(j\omega)) = -\arg(X(-j\omega))$
$x_e(t)$ $x_o(t)$	$\Re\{X(j\omega)\}$ $-\Im\{X(j\omega)\}$
$x(t)$ $x(jt)$ $x(-jt)$	$X(j\omega)$ $2\pi\, X(-\omega)$ $2\pi\, X(\omega)$

4.2.2 Tablice Furijeove transformacije

$x(t)$	$X(j\omega)$
1	$2\pi\,\delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)$
$\mathrm{e}^{j\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$
$\mathrm{rect}(t)$	$\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$\mathrm{sinc}(t)$	$\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$\mathrm{comb}(t)$	$\mathrm{comb}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\left(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right)$
$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi\left(\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right)$
$\mathrm{sinc}^2(t)$	$\mathrm{tri}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$\mathrm{tri}(t)$	$\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t), \quad \Re\{a\}>0$	$\dfrac{1}{a+j\omega}$
$\mathrm{e}^{-\pi t^2}$	$\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t), \quad \Re\{a\}>0$	$\dfrac{1}{(a+j\omega)^n}$
$\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega_0 t)\,\mathrm{u}(t), \quad \Re\{a\}>0$	$\dfrac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$
$\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega_0 t)\,\mathrm{u}(t), \quad \Re\{a\}>0$	$\dfrac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$

4.2.3 Zadaci

Zadatak 3.25.

Neka je $x(t)$ realan neparan signal. Dokazati da je $X(j\omega)$ čisto imaginarno i neparno.

Rešenje:

Pošto je ispunjeno da je $x(t) = -x(-t)$, primenjujući Furijeovu transformaciju na levu i desnu stranu jednakosti dobija se $X(j\omega) = -X(-j\omega)$ pa je $X(j\omega)$ neparno. Kako je $x(t)$ realno, $x^*(t) = x(t)$, pa je $X^*(-j\omega) = X(j\omega)$. Iz toga sleduje da je $X^*(-j\omega) = -X(-j\omega)$, odnosno $X^*(j\omega) = -X(j\omega)$, što znači da je $X(j\omega)$ čisto imaginarno.

Zadatak 3.26.

a) Koje osobine ima signal $X(j\omega)$ ako je $x(-t) = x^*(t)$?
b) Neka je dat signal $y(t) = \Re\{x(t)\}$. Naći $Y(j\omega)$ u funkciji od $X(j\omega)$.
c) Dokazati formulu $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)Y^*(j\omega)d\omega$.

Rešenje:

a) Kako je $x(-t) = x^*(t)$, važi da je $X(-j\omega) = X^*(-j\omega)$, što je moguće jedino ako je $X(-j\omega)$ čisto realno. Tako je i $X(j\omega)$ realno.
b) Može se napisati da je $y(t) = \frac{x(t)+x^*(t)}{2}$, pa je tako $Y(j\omega) = \frac{X(j\omega)+X^*(-j\omega)}{2}$.
c)

Zadatak 3.27.

Koristeći osobine Furijeove transformacije odrediti sliku sledećih signala:
a) $x(t) = 25\mathrm{rect}((t-4)/10)$,
b) $x(t) = \delta(t+\frac{1}{2}) - \delta(t-\frac{1}{2})$,
c) $x(t) = \mathrm{tri}(t)$,
d) $x(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$
e) $x(t) = 25\,\mathrm{sinc}(10t-2)$,
f) $x(t) = \mathrm{comb}(t/2) - \mathrm{comb}((t-1)/2)$,
g) $x(t) = e^{-at}\cos(\omega_0 t)\cdot \mathrm{u}(t)$, $a > 0$,
h) $x(t) = 4\,\mathrm{sinc}(4t) - 2\,\mathrm{sinc}(4(t-1/4)) - 2\,\mathrm{sinc}(4(t+1/4))$,
i) $x(t) = e^{-3|t|}\sin(2t)$,
j) $x(t) = te^{-2|t|}\sin(4t)\cdot \mathrm{u}(t)$.

Rešenje:

a) Na osnovu osobine linearnosti:

$$\mathcal{FT}\{\mathrm{rect}(t)\} = \mathrm{sinc}(\omega/2\pi) \Rightarrow \{25\mathrm{rect}(t)\} = 25\mathrm{sinc}(\omega/2\pi).$$

Na osnovu osobine skaliranja u vremanskom domenu:

$$\mathcal{FT}\{25\mathrm{rect}(t/10)\} = 10\cdot 25\mathrm{sinc}(10\cdot\omega/2\pi) = 250\mathrm{sinc}(5\omega/\pi).$$

Na osnovu osobine pomeranja u vremenskom domenu:

$$\mathcal{FT}\{25\mathrm{rect}((t-4)/10)\} = 10\cdot 25\mathrm{sinc}(10\cdot\omega/2\pi)e^{-j\omega 4} = 250\mathrm{sinc}(5\omega/\pi)e^{-j4\omega}.$$

b) $X(j\omega) = e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2} = 2j\frac{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}}{2j} = 2j\sin(\omega/2)$
c)

$$\frac{d}{dt}x(t) = \mathrm{rect}\left(t+\frac{1}{2}\right) - \mathrm{rect}\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \delta(t+1) - \delta(t) - (\delta(t) - \delta(t-1)) = \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1)$$

$$\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = e^{j\omega} - 2 + e^{-j\omega} = e^{2j\frac{\omega}{2}} - 2e^{-j\frac{\omega}{2}}e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-2j\frac{\omega}{2}} = (e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}})^2 = (2j)^2\sin(\omega/2)$$

Pošto je

$$\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = (j\omega)^2 X(j\omega),$$

dobija se da je

$$(j\omega)^2 X(j\omega) = (2j)^2 \sin^2(\omega/2) \Rightarrow X(j\omega) = \frac{\sin^2(\omega/2)}{(\omega/2)^2} = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right).$$

d) $\mathcal{FT}\left\{e^{-a|t|}\right\} = \left\{e^{-at}\,\mathrm{u}(t) + e^{-a(-t)}\,\mathrm{u}(-t)\right\} = \frac{1}{a+j\omega} + \frac{1}{a-j\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$
e) $x(t) = 25\mathrm{sinc}(10t-2) = 25\mathrm{sinc}(10(t-1/5)) \Rightarrow X(j\omega) = \frac{5}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{20\pi}\right)e^{-j\omega/5}$
f) $\mathcal{FT}\{\mathrm{comb}(t/2)\} = 2\,\mathrm{comb}(2\omega/2\pi)$, $\mathcal{FT}\{\mathrm{comb}((t-1)/2)\} = 2\,\mathrm{comb}(2\omega/2\pi)\mathrm{e}^{-j\omega}$

$$X(j\omega) = 2(1-\mathrm{e}^{-j\omega})\,\mathrm{comb}(\omega/\pi) = j4\mathrm{e}^{-j(\omega/2)}\mathrm{comb}(\omega/\pi)\,\sin(\omega/2)$$

g) $X(j\omega) = \dfrac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$
h) $X(j\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{8\pi}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{j\omega}{4}} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{\frac{j\omega}{4}}\right)$
i) Kako je $x(t) = \mathrm{e}^{-3t}\,\sin(2t)\,\mathrm{u}(t) + \mathrm{e}^{3t}\,\sin(2t)\,\mathrm{u}(-t) = \mathrm{e}^{-3t}\,\sin(2t)\,\mathrm{u}(t) - \mathrm{e}^{-3(-t)}\,\sin(2(-t))\,\mathrm{u}(-t)$, računa se $X(j\omega) = \dfrac{2}{(3+j\omega)^2+4} - \dfrac{2}{(3-j\omega)^2+4}$.
j) Za $t \geq 0$ je $x(t) = t\,\mathrm{e}^{-2t}\,\sin(4t)\,\mathrm{u}(t) = t\,y(t)$, pa je

$$X(j\omega) = j\,\frac{d}{d\omega}Y(j\omega) = j\,\frac{d}{d\omega}\left(\frac{4}{(2+j\omega)^2+16}\right) = \frac{8\,(2+j\omega)}{((2+j\omega)^2+16)^2}.$$

Zadatak 3.28.

Odrediti Furijeovu transformaciju sledećih signala:
a) $x(t) = \mathrm{sinc}(t)\cdot\mathrm{sinc}(t-1)$,
b) $x(t) = \mathrm{sinc}(at)\cdot\mathrm{sinc}(2at),\ a>0$,
c) $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{5^k}\cdot\delta(t-kT)$,
d) $x(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}e^{-|t-2k|}$,
e) $x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t<0,\ t>1, \end{cases}$ i $y(t) = \begin{cases} x(t), & t \geq 0, \\ x(-t), & t<0. \end{cases}$

Rešenje:

a) $X(j\omega) = \frac{1}{2\pi}(\sin(\omega) + j(\cos(\omega)-1))$.
b) $X(j\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{a}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2a\pi}\right) * \dfrac{1}{a}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{4a\pi}\right) = \dfrac{1}{2a^2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{a}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\Omega}{2a\pi}\right)\dfrac{1}{a}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega-\Omega}{2a\pi}\right)d\Omega =$

$$= \int\limits_{\max\{-a\pi,\omega-2a\pi\}}^{\min\{a\pi,\omega+2a\pi\}} d\Omega = \min\{a\pi, \omega+2a\pi\} - \max\{-a\pi, \omega-2a\pi\}$$

$$X(j\omega) = \begin{cases} \dfrac{\omega + 3a\pi}{2a^2\pi} & \omega < -a\pi \\ \dfrac{1}{a} & -a\pi \le \omega \le a\pi \\ \dfrac{-\omega + 3a\pi}{2a^2\pi} & \omega > a\pi \end{cases}$$

c) $x(t) = 5^{-t}\,\mathrm{comb}\left(\frac{t}{T}\right) = e^{-\ln(5)t}\,\mathrm{comb}\left(\frac{t}{T}\right)$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\,2\pi\,\delta(\omega + \ln(5)) * T\,\mathrm{comb}\left(\frac{T\,\omega}{2\pi}\right) = T\,\mathrm{comb}\left(\frac{(\omega + \ln(5))\,T}{2\pi}\right)$$

d) $x(t) = e^{-|t|}\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t - 2k) = e^{-|t|}\,\mathrm{comb}\left(\frac{t}{2}\right)$

$$X(j\omega) = 2\,\mathrm{comb}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

e) Kako je $x(t) = e^{-t}\,(\mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-1))$, računa se:

$$X(j\omega) = \frac{1 - e^{1+j\omega}}{1 + j\omega}.$$

Kako je $y(t) = x(t) + x(-t)$, onda je:

$$Y(j\omega) = X(j\omega) + X(-j\omega) = \frac{1 - e^{1+j\omega}}{1 + j\omega} + \frac{1 - e^{-1+j\omega}}{1 - j\omega} = \frac{2}{1 + \omega^2}\,(1 - e^{-1}\,\cos(\omega) - e^{-1}\,\omega\,\sin(\omega)).$$

Zadatak 3.29.

Koristeći Furijeovu transformaciju izračunati konvoluciju sledećih signala
a) $x(t) = te^{-2t}\,\mathrm{u}(t)$, $h(t) = e^{-4t}\,\mathrm{u}(t)$,
b) $x(t) = te^{-2t}\,\mathrm{u}(t)$, $h(t) = te^{-4t}\,\mathrm{u}(t)$,
c) $x(t) = e^{-t}\,\mathrm{u}(t)$, $h(t) = e^{t}\,\mathrm{u}(-t)$.

Rešenje:

a) Neka je $s = j\omega$. Računa se $X(s) = \dfrac{1}{(s+2)^2}$ i $H(s) = \dfrac{1}{s+4}$.

$$Y(s) = X(s)\,H(s) = \frac{1}{(s+2)^2\,(s+4)} = \frac{\frac{1}{4}}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{(s+2)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{s+4}$$

$$y(t) = \frac{1}{4}\,e^{-2t}\,\mathrm{u}(t) + \frac{1}{2}\,te^{-2t}\,\mathrm{u}(t) - \frac{1}{4}\,e^{-4t}\,\mathrm{u}(t)$$

b) $Y(s) = \dfrac{1}{(s+2)^2\,(s+4)^2} = \dfrac{-1/4}{s+2} + \dfrac{1/4}{(s+2)^2} + \dfrac{1/4}{s+4} + \dfrac{1/4}{(s+4)^2}$

$$y(t) = -\frac{1}{4}\,e^{-2t}\,\mathrm{u}(t) + \frac{1}{4}\,te^{-2t}\,\mathrm{u}(t) + \frac{1}{4}\,e^{-4t}\,\mathrm{u}(t) + \frac{1}{4}\,te^{-4t}\,\mathrm{u}(t)$$

c) $Y(s) = \dfrac{1}{(s+1)\,(-s+1)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{s+1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{-s+1}$

$$y(t) = \frac{1}{2}\,(\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{u}(t) + \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{u}(-t)) = \frac{\mathrm{e}^{|t|}}{2}$$

Zadatak 3.30.

Odrediti kauzalnost sistema čije su prenosne funkcije:
a) $H(j\omega) = \cos(\omega T)$,
b) $H(j\omega) = e^{-j\omega T}\mathrm{sinc}(\omega/2\pi)$,
c) $H(j\omega) = e^{-j\omega T}\mathrm{rect}(\omega/2\pi)$,
d) $H(j\omega) = \mathrm{rect}(\omega/2\pi)$,
e) $H(j\omega) = A$,
f) $H(j\omega) = Ae^{j\omega T}$.

Rešenje:

a) Impulsni odziv sistema u vremenskom domenu je

$$\mathcal{FT}^{-1}\{H(j\omega)\} = \mathcal{FT}^{-1}\left\{\frac{e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}}{2}\right\} = \frac{\delta(t+T) + \delta(t-T)}{2},$$

prema tome sistem nije kauzalan.
b) Kako je $h(t) = \mathrm{rect}(t - T)$, sistem je kauzalan ako je $T > \frac{1}{2}$.
c) Kako je $h(t) = \mathrm{sinc}(t - T)$, sistem nije kauzalan.
d) Na osnovu impulsnog odziva $h(t) = \mathrm{sinc}(t)$ se vidi da sistem nije kauzalan.
e) Sistem je kauzalan zato što je $h(t) = A\,\delta(t)$.
f) Kako je $h(t) = A\,\delta(t + T)$, vidi se da sistem nije kauzalan.

Zadatak 3.31.

Koristeći Paservalovu teoremu odrediti energiju signala:
a) $x(t) = 4\,\mathrm{sinc}\,(t/5)$,
b) $x(t) = 2\ \mathrm{sinc}^2\,(3t)$.

Rešenje:

a)

$$X(j\omega) = 4 \cdot 5\mathrm{rect}\left(5\frac{\omega}{2\pi}\right) = 20\mathrm{rect}\left(\frac{5\omega}{2\pi}\right)$$

$$E = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{200}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{5}\mathrm{rect}\left(\frac{5\omega}{2\pi}\right) d\left(\frac{5\omega}{2\pi}\right) = 80$$

b)

$$X(j\omega) = 2 \cdot \frac{1}{3}\mathrm{tri}\left(\frac{1}{3}\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$E = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{2}{9\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} 6\pi \cdot \mathrm{tri}^2\left(\frac{\omega}{6\pi}\right) d\left(\frac{\omega}{6\pi}\right) = \frac{12}{9}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{tri}^2\,(\tau)\,d\,(\tau) = 2 \cdot \frac{12}{9}\int\limits_{0}^{1} \tau^2 d\,(\tau) = \frac{8}{9}$$

Zadatak 3.32.

Odrediti impulsni odziv dva kaskadno spregnuta sistema čije su impulsni odzivi $h_1(t)$ i $h_2(t)$:
a) $h_1(t) = \mathrm{rect}(t)$, $h_2(t) = \cos(\pi \cdot t)$,
b) $h_1(t) = \mathrm{rect}(t)$, $h_2(t) = \cos(2\pi \cdot t)$,
c) $h_1(t) = \mathrm{sinc}(t)$, $h_2(t) = \mathrm{sinc}(t/2)$,
d) $h_1(t) = \mathrm{sinc}(t)$, $h_2(t) = \mathrm{sinc}^2(t/2)$,
e) $h_1(t) = \sin(2\pi t)$, $h_2(t) = e^{-t}\,\mathrm{u}(t)$.

Rešenje:

a)

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) = \mathcal{FT}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{FT}^{-1}\{H_1(s)\, H_2(s)\}$$

$$H_1(s) = \text{sinc}\,(\omega/2\pi) = \text{sinc}\,(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}$$

$$H_2(s) = \pi(\delta(\omega+\pi) + \delta(\omega-\pi))$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \cdot \pi(\delta(\omega+\pi) + \delta(\omega-\pi))$$

$$h(t) = \mathcal{FT}^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2}e^{j\pi t} + \frac{\sin(-\pi/2)}{-\pi/2}e^{-j\pi t}\right) = \frac{2}{\pi}\cos(\pi t)$$

b), **c)** i **e)** se računaju kao a).
d) Kako je $H_1(s) \cdot H_2(s) = \text{rect}(\omega/2\pi) \cdot 2\text{tri}(\omega/\pi) = 2\text{tri}(\omega/\pi)$, dobija se:

$$h(t) = \mathcal{FT}^{-1}\{H_1(s)H_2(s)\} = \mathcal{FT}^{-1}\{2\text{tri}(\omega/\pi)\} = \text{sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right).$$

Zadatak 3.33.

Neka je $X(j\omega) = F\{x(t)\} = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Ako je signal $y(t) = \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2}$.
a) Odrediti energiju signala $y(t)$.
b) Naći inverznu Furijeovu transformaciju signala $Y(j\omega/4)$.

Rešenje:

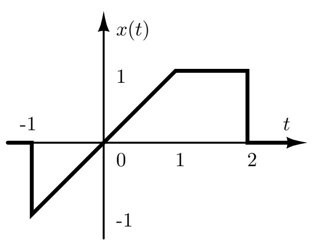
a) $Y(j\omega) = (j\omega)^2\, X(j\omega) = -\omega^2\,\text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$

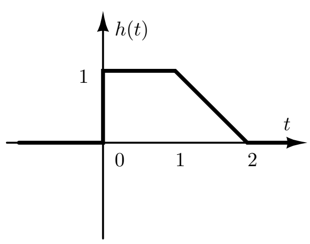
$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^4\,\text{rect}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \omega^4\, d\omega = \frac{1}{5\pi}$$

b) Pogledati prethodne zadatke.

Zadatak 3.34.

Za sisteme bez početnih uslova, koristeći se Furijeovom transformacijom, odrediti odziv $y(t)$ na pobudu $x(t)$ ako je poznat impulsni odziv $h(t)$:
a) $x(t) = e^{-\alpha t}\,\text{u}(t)$, $h(t) = e^{-\beta t}\,\text{u}(t)$,
b) $x(t) = e^{-3t}\,\text{u}(t)$, $h(t) = \text{u}(t-1)$,
c) $x(t) = \text{u}(t) - 2\,\text{u}(t-2) + \text{u}(t-5)$, $h(t) = e^{2t}\,\text{u}(1-t)$,
d) $x(t) = e^{-2t}\,\text{u}(t+2) + e^{3t}\,\text{u}(2-t)$, $h(t) = e^{-t}\,\text{u}(t-1)$,
e)





Rešenje:

a) $X(s) = \frac{1}{s+\alpha}$, $H(s) = \frac{1}{s+\beta}$, pa je $Y(s) = X(s)H(s) = \frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$, gde je $s = j\omega$.

$$Y(s) = \frac{A}{s+\alpha} + \frac{B}{s+\beta}$$

$$A = \lim_{s\to-\alpha} (s+\alpha)Y(s) = \frac{1}{\beta-\alpha}$$

$$B = \lim_{s\to-\beta} (s+\beta)Y(s) = \frac{1}{\alpha-\beta}$$

$$y(t) = \frac{1}{\beta-\alpha}e^{-\alpha t}\mathrm{u}(t) + \frac{1}{\alpha-\beta}e^{-\beta t}\mathrm{u}(t)$$

b) Ako nema početnih uslova:

$$X(s) = \frac{1}{s+3}, H(s) = \frac{e^{-s}}{s},$$

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{e^{-s}}{(s+3)s},$$

$$Y(s) = e^{-s}\frac{1/3}{s} - e^{-s}\frac{1/3}{s+3},$$

$$y(t) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3(t-1)}\right)\mathrm{u}(t-1).$$

c) Neka je $x_1(t) = \mathrm{u}(t)$. Kako je $h(t) = e^2 e^{-2(1-t)}\,\mathrm{u}(1-t)$, onda je za $h_1(t) = e^{-2(-t)}\mathrm{u}(-t)$:

$$X_1(s) = \frac{1}{s}, H_1(s) = \frac{1}{-s+2} \Rightarrow Y_1(s) = X_1(s)H_1(s) = \frac{1}{(-s+2)s} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{-s+2}\right),$$

$$y_1(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{u}(t) - e^{-2(-t)}\mathrm{u}(-t)\right),$$

$$y(t) = e^2\left(y_1(t-1) - 2y_1(t-3) + y_1(t-6)\right).$$

d)

$$x(t) = e^4 e^{-2(t+2)}\,\mathrm{u}(t+2) + e^6 e^{-3(2-t)}\,\mathrm{u}(2-t) \Rightarrow X(j\omega) = e^4\frac{1}{2+j\omega}e^{2j\omega} + e^6\frac{1}{3-j\omega}e^{-2j\omega}$$

$$h(t) = e^{-1}\cdot e^{-(t-1)}\,\mathrm{u}(t-1) \Rightarrow H(j\omega) = e^{-1}\frac{1}{1+j\omega}e^{-j\omega}$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = e^3\frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}e^{j\omega} + e^5\frac{1}{(1+j\omega)(3-j\omega)}e^{-3j\omega} =$$

$$= e^3\left(\frac{1}{(1+j\omega)} - \frac{1}{(2+j\omega)}\right)e^{j\omega} + \frac{e^5}{4}\left(\frac{1}{(1+j\omega)} + \frac{1}{(3-j\omega)}\right)e^{-3j\omega}$$

$$y(t) = e^3\left(e^{-(t+1)} - e^{-2(t+1)}\right)\mathrm{u}(t+1) + \frac{e^5}{4}e^{-(t-3)}\,\mathrm{u}(t-3) + \frac{e^5}{4}e^{-3(3-t)}\,\mathrm{u}(3-t).$$

e) Uputstvo: $x(t) = t(\mathrm{u}(t+1) - \mathrm{u}(t-1)) + \mathrm{u}(t-1) - \mathrm{u}(t-2)$, $h(t) = \mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-1) + (-t+2)\,(\mathrm{u}(t-1) - \mathrm{u}(t-2))$.

Zadatak 3.35.

Sistem je pobuđen signalom $x(t) = 4\cdot\mathrm{rect}(t/2)$ i dobijen je odziv
$y(t) = 10\left(\left(1 - e^{-(t+1)}\right)\mathrm{u}(t+1) - \left(1 - e^{-(t-1)}\right)\mathrm{u}(t-1)\right)$.
a) Odrediti impulsni odziv sistema.
b) Odrediti odziv sistema bez početnih uslova na pobudu $x(t) = 2\,\mathrm{u}(t-\tau)$.

Rešenje:

a) Prvi način, direktno:

Pošto je prenosna funkcija sistema $H(s) = Y(s)/X(s)$, $s = j\omega$, impulsni odziv se dobija kao: $h(t) = \mathcal{FT}^{-1}\{Y(s)/X(s)\}$. Neka je $y_1(t) = \left(1 - e^{-t}\right)\mathrm{u}(t)$, tada je $y(t) = 10\left(y_1(t+1) - y_1(t-1)\right)$.

Pošto je $Y_1(s) = \frac{1}{s} + \pi\delta(\omega) - \frac{1}{s+1}$, dobija se da je

$$Y(s) = 10\left(\frac{1}{s} + \pi\delta(\omega) - \frac{1}{s+1}\right)\left(e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right) = 10 \cdot 2j\left(\frac{1}{s} + \pi\delta(\omega) - \frac{1}{s+1}\right)\sin\omega,$$

$$X(s) = 4 \cdot 2\,\mathrm{sinc}\,(2f) = 8\frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f} = 8\frac{\sin\omega}{\omega},$$

$$h(t) = \mathcal{FT}^{-1}\{Y(s)/X(s)\} = \mathcal{FT}^{-1}\left\{\frac{5}{2}\left(1 + \pi j\omega\delta(\omega) - \frac{s}{s+1}\right)\right\} = \mathcal{FT}^{-1}\left\{\frac{5}{2}\left(\underbrace{\pi j\omega\delta(\omega)}_{0} + \frac{1}{s+1}\right)\right\} = \frac{5}{2}e^{-t}\,\mathrm{u}(t)$$

Drugi način, posmatranjem odziva i pobude:

Kako je

$$x(t) = 4 \cdot \mathrm{rect}(t/2) = 4\left(\mathrm{u}(t+1) - \mathrm{u}(t-1)\right)$$

i pošto je

$$y(t) = 10\left(\left(1 - e^{-(t+1)}\right)\mathrm{u}(t+1) - \left(1 - e^{-(t-1)}\right)\mathrm{u}(t-1)\right),$$

očigledno je da je odziv na pobudu $x_1(t) = \mathrm{u}(t)$ jednak $y_1(t) = \frac{10}{4}\left(1 - e^{-t}\right)\mathrm{u}(t)$. Prema tome važi da je $h(t) = \frac{dy_1(t)}{dt} = \frac{5}{2}e^{-t}\,\mathrm{u}(t)$.

b) $y_1(t) = 5(1 - e^{-(t-\tau)})\,\mathrm{u}(t-\tau)$.

Zadatak 3.36.

Primenom Furijeove transformacije odrediti impulsni odziv sistema opisanih diferencijalnim jednačinama:

a) $\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$,

b) $\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = \frac{dx(t)}{dt}$,

c) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = x(t)$,

d) $4\frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$.

Rešenje:

a) Primeni se Furijeova transformacija na levu i desnu stranu jednakosti.

$$\mathcal{FT}\left\{\frac{dy(t)}{dt} + ay(t)\right\} = F\{x(t)\},\ x(t) = \delta(t)$$

$$sY(s) + aY(s) = X(s), \quad s = j\omega$$

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s+a} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s+a} \Rightarrow h(t) = \mathcal{FT}^{-1}(H(s)) = F^{-1}\left(\frac{1}{s+a}\right) = e^{-at}\,\mathrm{u}(t)$$

b)

$$sY(s) + aY(s) = sX(s), \quad s = j\omega, \quad x(t) = \delta(t)$$

$$Y(s) = \frac{sX(s)}{s+a} \Rightarrow H(s) = \frac{s}{s+a} = 1 - \frac{a}{s+a} \Rightarrow h(t) = \mathcal{FT}^{-1}\left\{1 - \frac{a}{s+a}\right\} = \delta(t) - ae^{-at}\,\mathrm{u}(t)$$

c)

$$s^2Y(s) + 6sY(s) + 5Y(s) = X(s), \quad x(t) = \delta(t)$$

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s^2 + 6s + 5} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 5} = \frac{1}{(s+1)(s+5)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+5)}\right)$$

$$h(t) = \mathcal{FT}^{-1}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+5)}\right)\right\} = \frac{1}{4}F^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} - \frac{1}{4}\mathcal{FT}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+5)}\right\} = \frac{1}{4}\left(e^{-t} - e^{-5t}\right)\mathrm{u}(t)$$

d) $h(t) = -\frac{1}{16}e^{-\frac{9}{4}t}\,\mathrm{u}(t) + \frac{1}{4}\delta(t)$

Zadatak 3.37.

Za sisteme sa nultim početnim uslovima, primenom Furijeove transformacije odrediti impulsni odziv, odziv na Hevisajdovu jediničnu funkciju i nacrtati strukturnu blok šemu koristeći standardne blokove:
a) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$,
b) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$,
c) $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3\frac{dx(t)}{dt} + x(t)$,
d) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{d^3x(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$.

Rešenje:

a) Primenom Furijeove transformacije na levu i desnu stranu jednačine, dobija se: $(s^2+3s+2)Y(s) = X(s)$. Kako je $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$, primenom inverzne Furijeove transformacije je $h(t) = \mathcal{FT}^{-1}\{H(s)\} = e^{-t}\,\mathrm{u}(t) - e^{-2t}\,\mathrm{u}(t)$.

Vidi se da je ovaj način rešavanja diferencijalne jednačine sa singularnim partikularnim rešenjima daleko jednostavniji nego bilo koji metod u vremenskom domenu.

b) $(s^2+2s+2)Y(s) = X(s)$

Kako je $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$, dobija se $h(t) = \mathcal{FT}^{-1}\{H(s)\} = e^{-t}\,\mathrm{u}(t) - e^{-2t}\,\mathrm{u}(t)$.

c) $H(s) = \frac{3s+1}{s+2} = 3 - \frac{5}{s+2}$

$$h(t) = 3\delta(t) - 5e^{-2t}\mathrm{u}(t)$$

d) Primenom Furijeove transformacije na levu i desnu stranu jednačine, dobija se:

$$(s^2+5s+6)Y(s) = (s^3+2s^2+4s+3)X(s).$$

Kako je $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^3+2s^2+4s+3}{s^2+5s+6} = s - 3 - \frac{5}{s+2} + \frac{18}{s+3}$,

$$h(t) = \mathcal{FT}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{FT}^{-1}\left\{s - 3 - \frac{5}{s+2} + \frac{18}{s+3}\right\} = \delta'(t) - 3\delta(t) - 5e^{-2t}\,\mathrm{u}(t) + 18e^{-3t}\,\mathrm{u}(t).$$

Zadatak 3.38.

Koristeći se definicionim integralom naći Furijeovu transformaciju signala:
a) $x(t) = e^{-a^2t^2}$,
b) $x(t) = t \cdot e^{-\omega_0 t^2}$.

Rešenje:

a)

$$X(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{(-a^2t^2 - j\omega t)}dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(a^2t^2 + 2a\frac{j\omega}{2a}t + \left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2 - \left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2\right)}dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(at+\frac{j\omega}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{2a}\right)^2}dt$$

$$= e^{-\frac{\omega}{4a^2}^2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(at+\frac{j\omega}{2a}\right)^2}dt \Rightarrow at + \frac{j\omega}{2a} = \tau,\ dt = \frac{1}{a}d\tau \Rightarrow X(j\omega) = e^{-\frac{\omega}{4a^2}^2} \cdot \frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2}d\tau$$

Sada se reši pomoćni integral prelaskom na polarne koordinate.

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2}d\tau \Rightarrow I^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}dv = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)}dudv = \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-r^2} r \cdot dr \cdot d\theta =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^\infty = \pi \Rightarrow I = \sqrt{\pi}$$

$$X(j\omega) = e^{-\frac{\omega}{4a^2}^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

b) Ako je $y(t) = e^{-\omega_0 t^2}$, na osnovu a) važi da je:

$$Y(j\omega) = \mathcal{FT}\left\{e^{-\omega_0 t^2}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_0}} \cdot e^{-\frac{\omega}{4\omega_0}^2}.$$

Kako je

$$\frac{d}{dt}y(t) = -2\omega_0 t \cdot e^{-\omega_0 t^2} \Rightarrow -\frac{1}{2\omega_0} \cdot \frac{d}{dt}y(t) = t \cdot e^{-j\omega_0 t^2},$$

primenom Furijeove transformacije na levu i desnu stranu prethodne jednakosti dobija se

$$\mathcal{FT}\left\{-\frac{1}{2\omega_0} \cdot \frac{d}{dt}y(t)\right\} = \mathcal{FT}\left\{t \cdot e^{-\omega_0 t^2}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{2\omega_0}j\omega Y(j\omega) = X(j\omega) = -j\frac{\omega}{2\omega_0}\sqrt{\frac{\pi}{\omega_0}} \cdot e^{-\frac{\omega}{4\omega_0}^2}.$$

Zadatak 3.39.

Izračunati integral $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ ako je:

a) $f(t) = 10\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t+4}{7}\right)$,
b) $f(t) = 100\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-8}{30}\right)$.

Rešenje:

a)

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\Bigg|_{\omega\to 0} = F(j\omega)|_{\omega\to 0}$$

$$I = 70\,\mathrm{rect}\left(\frac{7\omega}{2\pi}\right)e^{j\omega 4}\Bigg|_{\omega\to 0} = 70$$

b)

$$I = 100 \cdot 30 \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{30\omega}{2\pi}\right)e^{-j\omega 8}\Bigg|_{\omega\to 0} = 100 \cdot 30 = 3000.$$

Zadatak 3.40.

Izračunati integral $I = \int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx$ ako je:

a) $f(x) = \frac{\cos(ax)}{1+x^2}$, $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$,
b) $f(x) = \frac{x\sin(ax)}{k^2+x^2}$, $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$.

Rešenje:

a) Pošto je $f(x)$ parna funkcija, može da se napiše da je

$$2I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\omega)d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(a\omega)}{1+\omega^2}d\omega = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ja\omega}+e^{-ja\omega}}{1+\omega^2}d\omega.$$

Ako se uvede smena $a = t$, dobija se da je

$$2I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{1+\omega^2}d\omega = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^{j\omega t}}{1+\omega^2}d\omega = 2\pi\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{1+\omega^2}d\omega =$$

$$2\pi\mathcal{FT}^{-1}\left\{\frac{1}{1+\omega^2}\right\} = 2\pi\mathcal{FT}^{-1}\left\{\frac{1}{(1+j\omega)(1-j\omega)}\right\} = \pi e^{-|t|}.$$

Pošto je $a > 0$, važi da je $I = \frac{\pi}{2}e^{-a}$.
b) $I = \frac{\pi}{2}e^{-ka}$.

4.3 Bodeovi dijagrami

Neka je $H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ racionalna funkcija sa realnim koeficijentima, kompleksnog argumenta s. Korenovi polinoma $A(s)$ nazivaju se polovi funkcije $H(s)$, a korenovi polinoma $B(s)$ su nule racionalne funkcije. Nule i polovi su kompleksne veličine koje mogu imati:

- i realni i imaginarni deo različit od nule,
- samo realni deo različit od nule,
- samo imaginarni deo različit od nule.

Ukoliko je realni deo korena pozitivan onda se koren nalazi u desnoj poluravni koordinatnog sistema $(\Re\{s\}, \Im\{s\})$ i kaže se da je u desnoj poluravni kompleksne promenljive s. Ukoliko je negativan, nalazi se u levoj poluravni, a ukoliko je nula, nalazi se na imaginarnoj osi.

Racionalna funkcija se može napisati u obliku proizvoda članova prvog reda:

$$H(s) = K\,\frac{\prod\limits_k (s+s_{nk})^{\alpha_{nk}}}{\prod\limits_k (s+s_{pk})^{\alpha_{pk}}},$$

pri čemu je α_{nk} red k-te nule a α_{pk} red k-tog pola. Međusobnim množenjem monoma koji sadrže konjugovano kompleksne korene, dobijaju se članovi drugog reda bez kompleksnih koeficijenata.

Generalizovana impedansa kondenzatora i kalema

Kompleksna predstava signala napona i struja u električnom kolu, može se dobiti kao Furijeova transformacija signala struja i napona u vremenskom domenu

$$\mathcal{FT}\{i_C(t)\} = I_C(j\omega),$$
$$\mathcal{FT}\{v_C(t)\} = V_C(j\omega).$$

Ukoliko su induktivnosti i kapacitivnosti nezavisne od učestanosti:

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} \Rightarrow \mathcal{FT}\{i_C\} = C\,\mathcal{FT}\left\{\frac{dv_C}{dt}\right\} = C\,j\omega\,\mathcal{FT}\{v_C\} \Rightarrow \frac{V_C(j\omega)}{I_C(j\omega)} = \frac{1}{j\omega C} = Z_C,$$
$$v_L = L\frac{di_L}{dt} \Rightarrow \mathcal{FT}\{v_L\} = L\,\mathcal{FT}\left\{\frac{di_L}{dt}\right\} = L\,j\omega\,\mathcal{FT}\{i_L\} \Rightarrow \frac{V_L(j\omega)}{I_L(j\omega)} = j\omega L = Z_L.$$

Radi jednostavnosti, može se skraćeno pisati $s = j\omega$. Na osnovu toga:

$$Z_C(j\omega) = Z_C(s) = \frac{1}{sC}$$

i

$$Z_L(j\omega) = Z_L(s) = sL.$$

Funkcija prenosna električnog kola, primer: $H(j\omega) = \frac{V_i(j\omega)}{V_u(j\omega)}$ ili $H(s) = \frac{V_i(s)}{V_u(s)}$, gde je $s = j\omega$, istovremeno je Furijeova transformacija impulsnog odziva kola – odziva na Dirakov impuls.

Ako je prenosna funkcija racionalna funkcija po argumentu s, ona je oblika $H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$, gde su $A(s)$ i $B(s)$ polinomi. Nule polinoma $A(s)$ se nazivaju polovi funkcije prenosa, a nule polinoma $B(s)$ se nazivaju nule funkcije prenosa. Pri tome nule i polovi koji imaju realni deo različit od nule nisu koreni odgovarajućih kompleksnih polinoma $A(\omega)$ i $B(\omega)$ za realne vrednosti učestanosti ω jer je $s = j\omega$, a član $(s+\omega_n) = (j\omega + \Re\{\omega_n\} + j\Im\{\omega_n\}) \neq 0$ za svaku realnu vrednost ω.

Polinomi u imeniocu i brojiocu prenosne funkcije se mogu rastaviti na članove prvog i drugog reda:

$$H(s) = K\,\frac{(s+\omega_{n1k})^{\alpha_{n1k}}\left(s^2 + s\frac{\omega_{n2k}}{Q_{n2k}} + \omega_{n2k}^2\right)^{\alpha_{n2k}}\cdots}{(s+\omega_{p1k})^{\alpha_{p1k}}\left(s^2 + s\frac{\omega_{p2k}}{Q_{p2k}} + \omega_{p2k}^2\right)^{\alpha_{p2k}}\cdots} = A_0\,\frac{\left(1+\frac{s}{\omega_{n1k}}\right)^{\alpha_{n1k}}\left(\frac{s^2}{\omega_{n2k}^2} + \frac{s}{\omega_{n2k}\,Q_{n2k}} + 1\right)^{\alpha_{n2k}}\cdots}{\left(1+\frac{s}{\omega_{p1k}}\right)^{\alpha_{p1k}}\left(\frac{s^2}{\omega_{p2k}^2} + \frac{s}{\omega_{p2k}\,Q_{p2k}} + 1\right)^{\alpha_{p2k}}\cdots}.$$

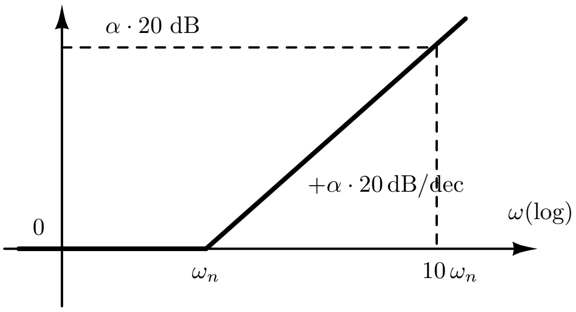
Uticaji pojedinih izraza u prenosnoj funkciji na karakteristiku Bodeovih dijagrama

- Uticaj realne konstante $A_0 = H(0)$: Uticaj na amplitudsku karakteristiku: dodaje $\Delta\,|H(s)| = |A_0|_{\mathrm{dB}} = 20\,\log_{10}(A_0)$

  Uticaj na faznu karakteristiku: dodaje $\Delta\phi(s) = \begin{cases} 0, & A_0 > 0 \\ -\pi & A_0 < 0 \end{cases}$

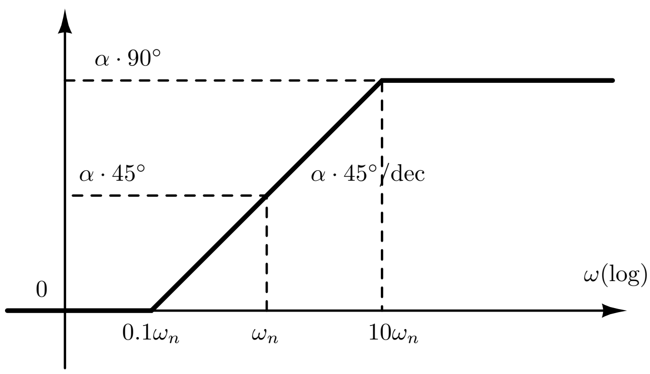
- Uticaj člana prvog reda sa realnom nulom (nula je reda α) $\left(1+\frac{s}{\omega_n}\right)^{\alpha}$

  Uticaj na amplitudsku karakteristiku:

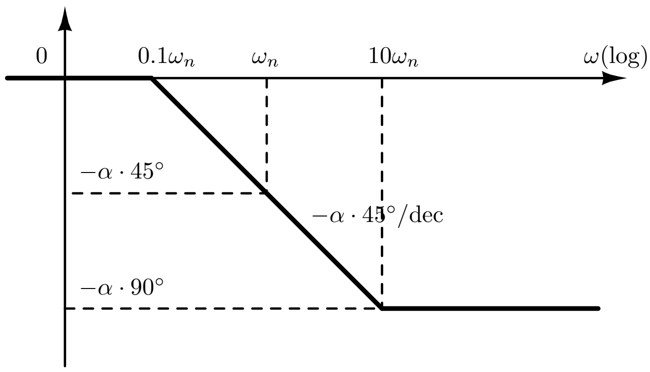


  Uticaj na faznu karakteristiku:

  1. nula se nalazi u levoj poluravni kompleksne promenljive s, $\omega_n > 0$

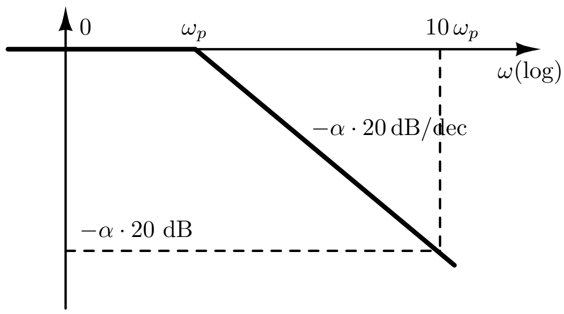


  2. nula se nalazi u desnoj poluravni kompleksne promenljive s, $\omega_n < 0$



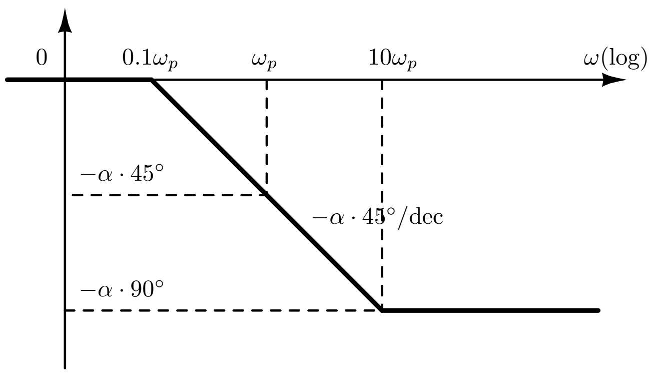
- Uticaj člana prvog reda sa realnim polom (pol je reda α) $\left(1+\frac{s}{\omega_p}\right)^{\alpha}$

  Uticaj na amplitudsku karakteristiku:

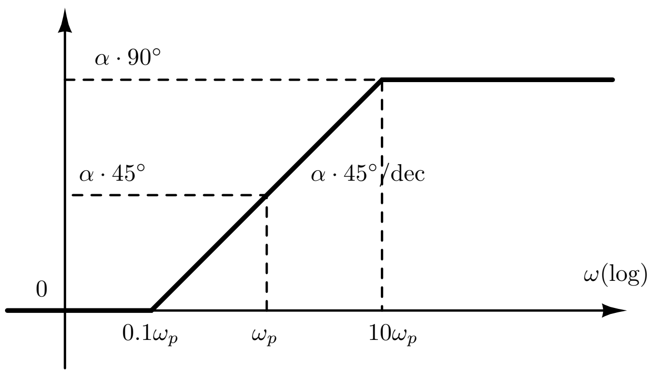


  Uticaj na faznu karakteristiku:

  1. nula se nalazi u levoj poluravni kompleksne promenljive s, $\omega_p > 0$

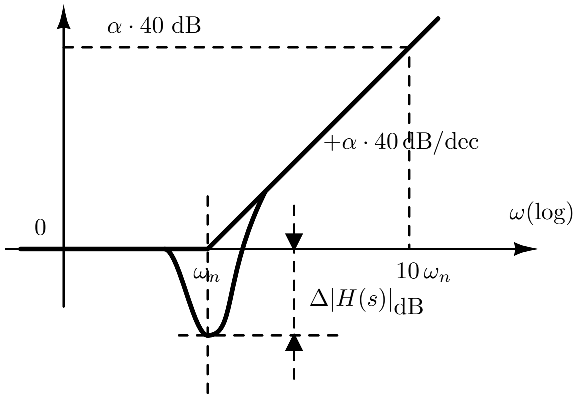


  2. nula se nalazi u desnoj poluravni kompleksne promenljive s, $\omega_p < 0$



- Uticaj člana drugog reda sa parom konjugovano kompleksnih nula $\left(\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{s}{\omega_n Q}+1\right)^\alpha$

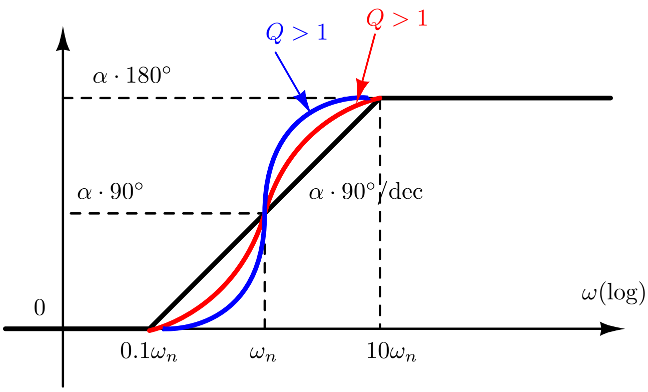
  Uticaj na amplitudsku karakteristiku:



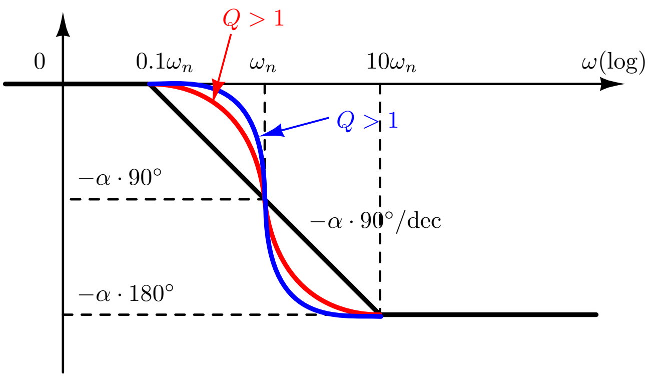
  Odstupanje karakteristike od idealnog slučaja da dvostrukom nulom $\left(\frac{s}{\omega_n}+1\right)^\alpha$ za $\omega=\omega_n$ jednaka je $\Delta|H(\omega_n)| = \alpha \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{Q}\right) = -\alpha \cdot 20\,\log_{10}(Q)$. Predznak minus znači da za vrednosti Q faktora veće od 1 dolazi do „propadanja” karakteristike ispod 0 dB.

  Uticaj na faznu karakteristiku:

  1. nula se nalazi u levoj poluravni kompleksne promenljive s, $\omega_n > 0$

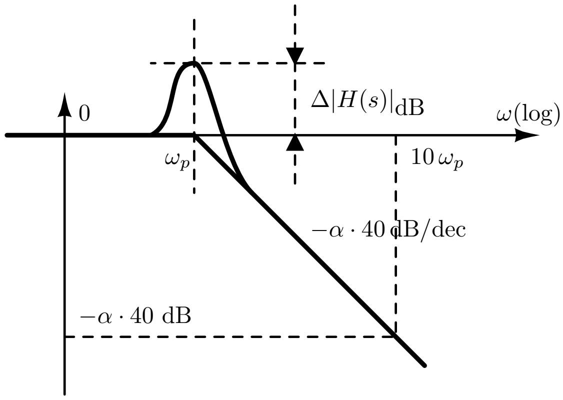


  2. nula se nalazi u desnoj poluravni kompleksne promenljive s, $\omega_n < 0$



- Uticaj člana drugog reda sa parom konjugovano kompleksnih nula $\left(\frac{s^2}{\omega_p^2}+\frac{s}{\omega_p Q}+1\right)^\alpha$

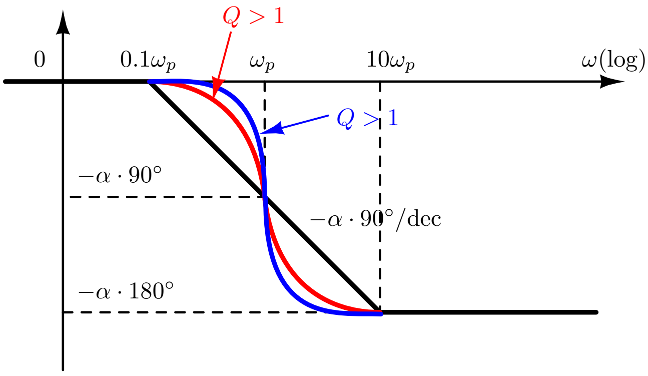
  Uticaj na amplitudsku karakteristiku:



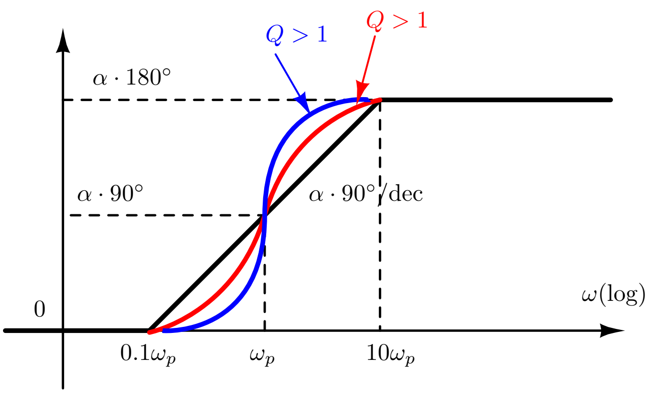
Odstupanje karakteristike od idealnog slučaja da dvostrukim polom $\left(\frac{s}{\omega_p}+1\right)^\alpha$ za $\omega=\omega_p$ jednaka je $\Delta|H(\omega_p)|=\alpha\cdot\log_{10}(Q)$. Za vrednosti Q faktora veće od 1 dolazi do „izbijanja" karakteristike iznad 0 dB.

Uticaj na faznu karakteristiku:

1. nula se nalazi u levoj poluravni kompleksne promenljive s, $\omega_p>0$

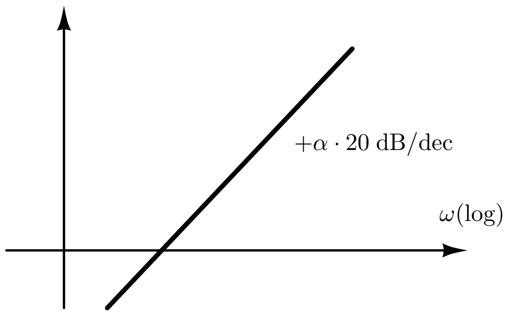


2. nula se nalazi u desnoj poluravni kompleksne promenljive s, $\omega_p<0$



- Uticaj „nule u nuli”, $\lim_{\omega_n \to 0} (s+\omega_n)^\alpha = s^\alpha$

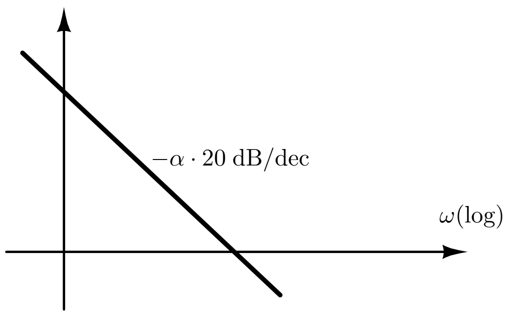
  Amplitudska karakteristika počinje sa pozitivnim nagibom od $\alpha \cdot 20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$.



  Na početku fazne karakteristike se dodaje $\alpha \cdot 90°$.

- Uticaj „pola u nuli”, $\lim_{\omega_p \to 0} \dfrac{1}{(s+\omega_p)^\alpha} = s^{-\alpha}$

  Amplitudska karakteristika počinje sa pozitivnim nagibom od $-\alpha \cdot 20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$.



  Na početku fazne karakteristike se oduzima $\alpha \cdot 90°$.

- Asimptotsko ponašanje funkcije prenosa kada $s \to \infty$

  Kada su redovi polinoma u imeniocu i brojiocu prenosne funkcije različiti mogu nastupiti dva slučaja:

  1. $H(s) \approx s^\alpha$ kada $s \to \infty$
     Amplitudska karakteristika se završava asimptotom prema $+\infty$ pod nagibom od $+\alpha \cdot 20$dB/dec, a fazna karakteristika sa vrednošću faze od $+\alpha \cdot 90°$.
  2. $H(s) \approx s^{-\alpha}$ kada $s \to \infty$
     Tada se amplitudska karakteristika završava asimptotom prema $-\infty$ pod nagibom od $-\alpha \cdot$ 20dB/dec, a fazna karakteristika sa vrednošću faze od $-\alpha \cdot 90°$.

NAPOMENA:

Polovi funkcije prenosa u desnoj poluravni, zavisno od interpretacije, mogu da znače da je sistem nestabilan, ili da je nekauzalan, tako da amplitudska i fazna karakteristika takvog sistema, osim u svega nekoliko specifičnih slučajeva, nemaju praktičnog značaja. Ukoliko se analizom nekog sistema dobiju polovi u desnoj poluravni, tada se najčešće radi o grešci u projektovanju ili u samoj analizi.

4.3.1 Zadaci

Zadatak 3.41.

Ako je $A = 1000$, $Q = 100$, $\omega_{p1} = 1$ rad/s, $\omega_{n1} = 200$ rad/s, $\omega_{n2} = 40$ krad/s, $\omega_{p2} = 16$ Mrad/s, a $s = j\omega$, odrediti amplitudsku i faznu karakteristiku sistema koji imaju prenosne funkcije:
a) $H(s) = A\,\frac{(s+\omega_{n1})(s+\omega_{n2})}{s^2(s+\omega_{p2})}$,
b) $H(s) = -A\,\frac{s(s+\omega_{n2})^2}{(s+\omega_{p1})(s+\omega_{p2})}$,
c) $H(s) = A\,\frac{(s+\omega_{n1})^2(s-\omega_{n2})}{\left(s^2+\frac{\omega_{p1}}{Q}s+\omega_{p1}{}^2\right)(s-\omega_{p2})}$.

Rešenje:

a) Pošto je $A > 0$ i postoji dvostruki pol u nuli, prenosna funkcija se na niskim učestanostima (kada $s \to 0$) ponaša kao $H(s) \sim A\frac{\omega_{n1}\omega_{n2}}{s^2\omega_{p2}} \sim \frac{1}{s^2}$. Zbog toga fazna karakteristika na niskim učestanostima iznosi $-2 \cdot 90° = -180°$, a amplitudska karakteristika kreće od $+\infty$ i opada pod uglom od $-2 \cdot 20\text{dB/dec} = -40\text{dB/dec}$.

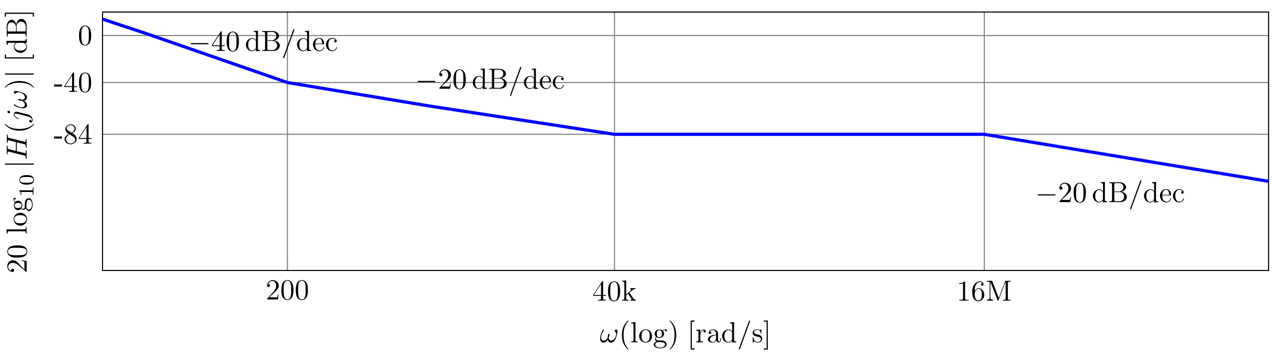
Amplitudska karakteristika na učestanosti $0.1\omega_{n1}$ ima vrednost

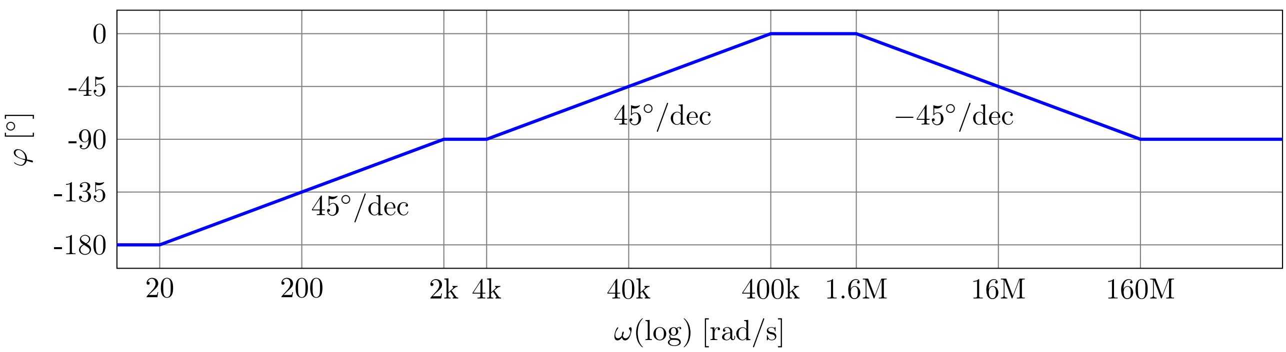
$$|H(0.1\omega_{n1})|_{\text{dB}} = 20\log_{10}\left|A\frac{(0.1\omega_{n1}+\omega_{n1})(0.1\omega_{n1}+\omega_{n2})}{(0.1\omega_{n1})^2(0.1\omega_{n1}+\omega_{p2})}\right| \approx 20\log_{10}\left|A\frac{(\omega_{n1})(\omega_{n2})}{(0.1\omega_{n1})^2(\omega_{p2})}\right| = 1.94\text{ dB}.$$

Na učestanostima $\omega \in [\omega_{n2}, \omega_{p2}]$ amplitudska karakteristika ima vrednost:

$$|H(j10\,\omega_{n2})|_{\text{dB}} = 20\ \log_{10}\left|A\frac{10^2\,\omega_{n2}^2}{10^2\,\omega_{n2}^2\,\omega_{p2}}\right| = 20\ \log_{10}\left|\frac{A}{\omega_{p2}}\right| = -84\text{ dB}.$$

Na visokim učestanostima kada $s \to \infty$, važi $H(s) \sim A/s$. Amplitudska karakteristika se završava asimptotom prema $-\infty$ pod nagibom od -20 dB/dec i fazom od $-90°$.



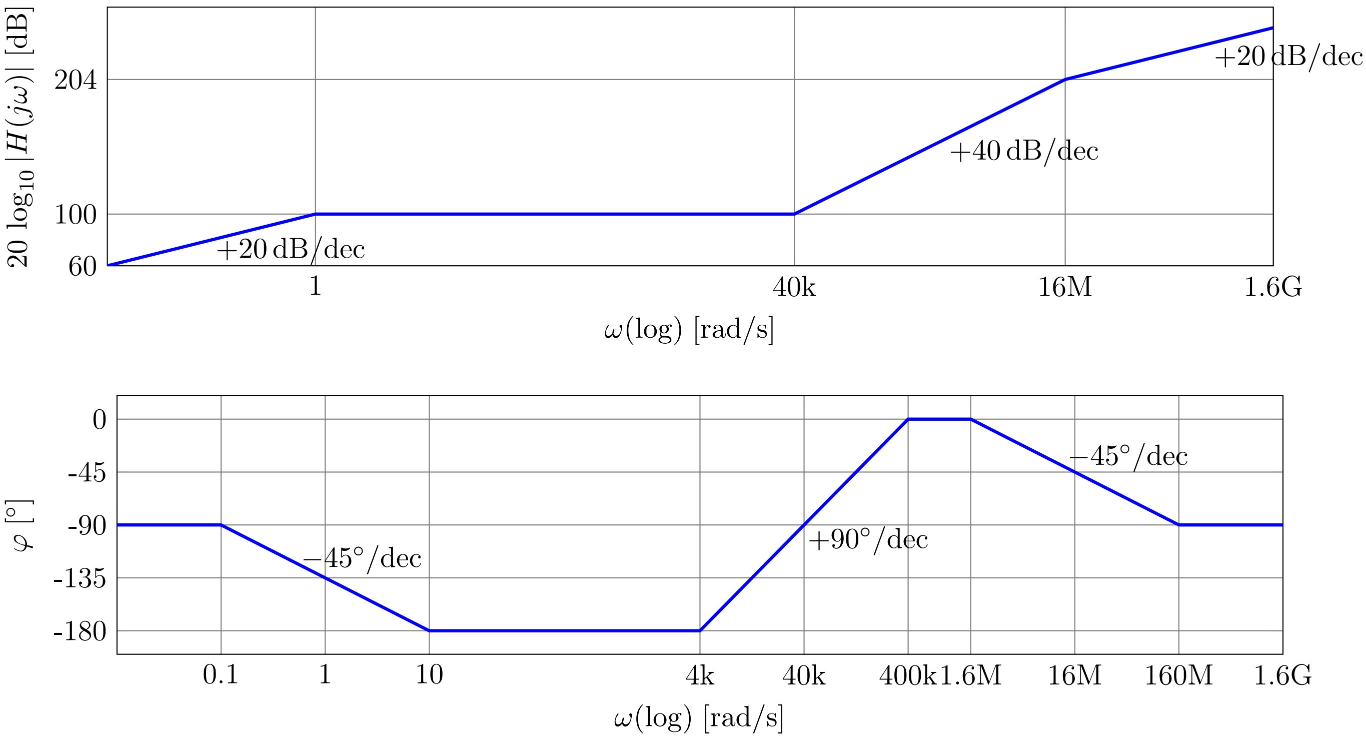


Slika 3.41.1.

b) Pošto je $A < 0$ i postoji nula u nuli, fazna karakteristika kreće od $-180° + 90° = -90°$. Amplitudska karakteristika kreće od $-\infty$ i raste pod uglom od 20 dB/dec. Amplitudska karakteristika na učestanosti od $0.1\omega_{n1}$ ima vrednost

$$|H(0.1\,\omega_{n1}|_{\mathrm{dB}} = 20\,\log_{10}\left|-A\,\frac{0.1\,\omega_{n1}\,(0.1\omega_{n1}+\omega_{n2})^2}{(0.1\omega_{n1}+\omega_{p1})\,(0.1\omega_{n1}+\omega_{p2})}\right| \approx 20\,\log_{10}\left|A\,\frac{0.1\omega_{n1}\,\omega_{n2}^2}{0.1\omega_{n1}\,\omega_{p2}}\right| = 100\text{ dB}.$$

Kada $s\to\infty$, onda je $H(s)\approx -As$. Amplitudska karakteristika se završava asimptotom prema $+\infty$ pod nagibom od 20 dB/dec i fazom od $\phi(-A)+\lim_{s\to\infty}\phi(s) = -180^\circ + 90^\circ = -90^\circ$.



Slika 3.41.2.

c) Fazna karakteristika kreće od 0°, a amplitudska karakteritika u nuli ima vrednost

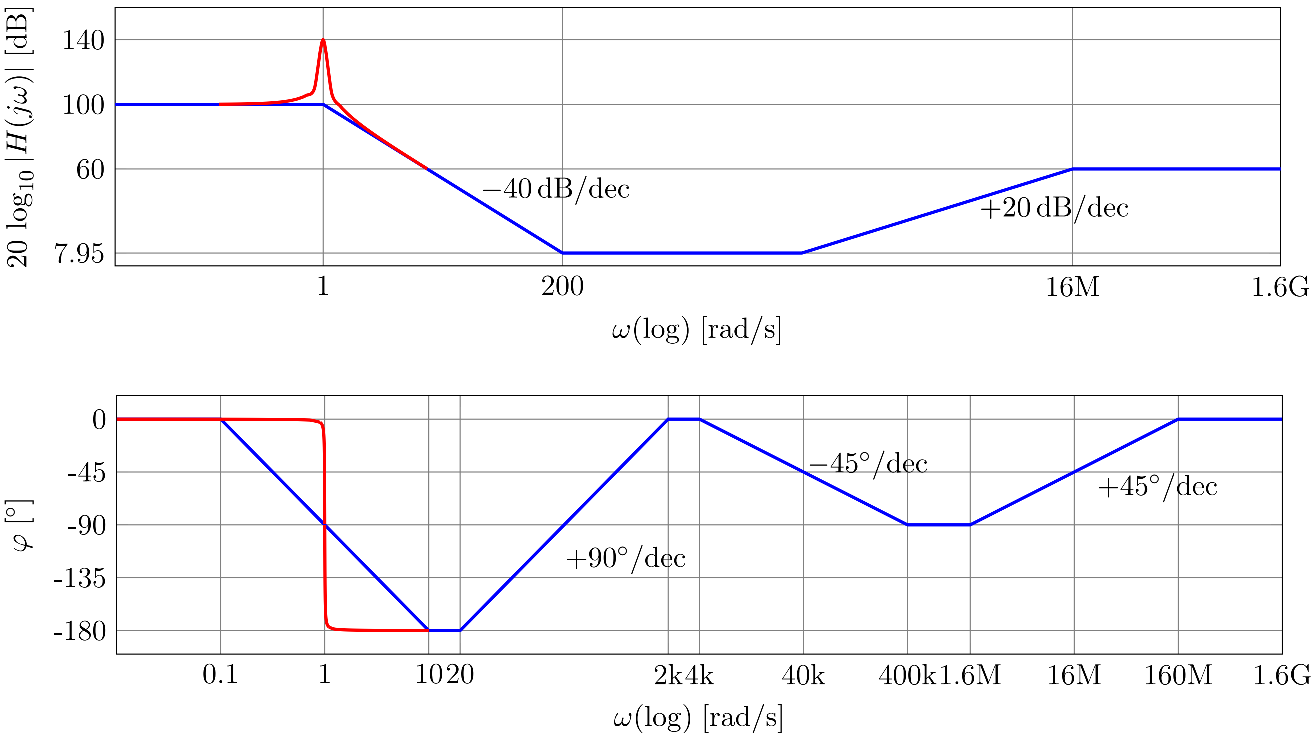
$$|H(0)|_{\mathrm{dB}} = 20\,\log_{10}\left|A\,\frac{\omega_{n1}^2\,\omega_{n2}}{\omega_{p1}^2\,\omega_{p2}}\right| = 100\text{ dB}.$$

Na učestanosti ω_{p1} se nalaze dva konjugovano kompleksan pola, pa amplitudska karakteristika ima „preskok” od $\Delta|H(\omega_{p1})|_{\mathrm{dB}} = 20\,\log_{10}(Q) = 40$ dB.

Amplitudska karakteristika na učestanosti od $10\omega_{n1}$ ima vrednost

$$|H(10\,\omega_{n1}|_{\mathrm{dB}} = 20\,\log_{10}\left|A\,\frac{(10\omega_{n1})^2\,\omega_{n2}}{(10\omega_{n1})^2\,\omega_{p2}}\right| = 7.95\text{ dB}.$$

Kada $s\to\infty$, onda je $H(s)\approx A = 60$ dB.



Slika 3.41.3.

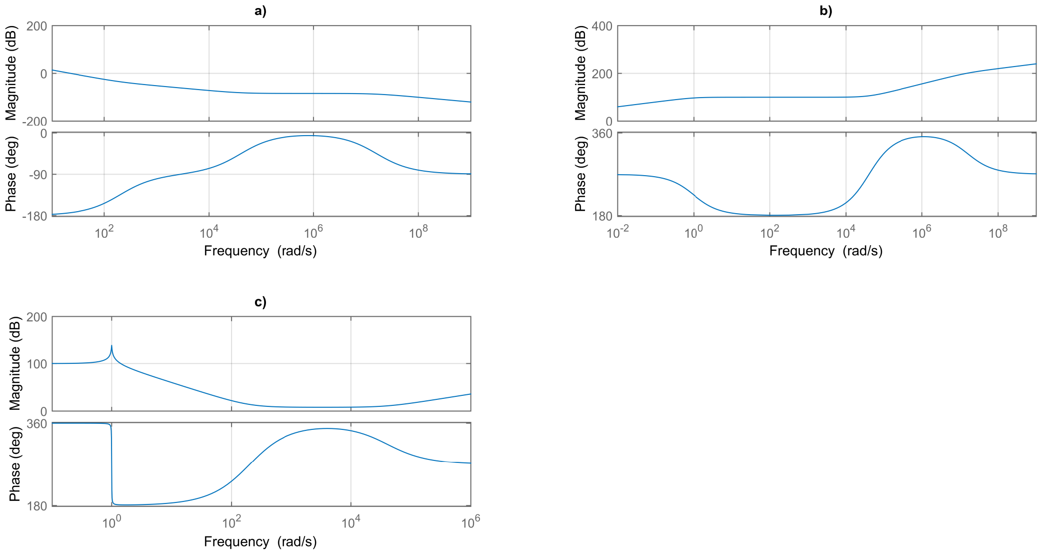
. . . .

Crtanje frekventnih karakteristika efikasno se izvodi korišćenjem softverskog alata Matlab. Sledeći program crta sve tri prethodne karakteristike.

```
% program za crtanje frekventnih karakteristika
sys1=A*(s+Wn1)*(s+Wn2)/(s^2*(s+Wp2))
%formiranje transfer funkcije,
sys2=-A*s*(s+Wn2)^2/((s+Wp1)*(s+Wp2))
sys3=A*(s+Wn1)^2*(s-Wn2)/((s^2+s*Wp1/Q+Wp1^2)*(-Wp2))

figure(1);
bode(sys1);
grid;

figure(2);
bode(sys2);
grid;

figure(3);
bode(sys3);
grid;
```

Na slici 3.41.4 su prikazani Bodeovi dijagrami za sva tri slučaja.

. . . .



Slika 3.41.4.

Zadatak 3.42.

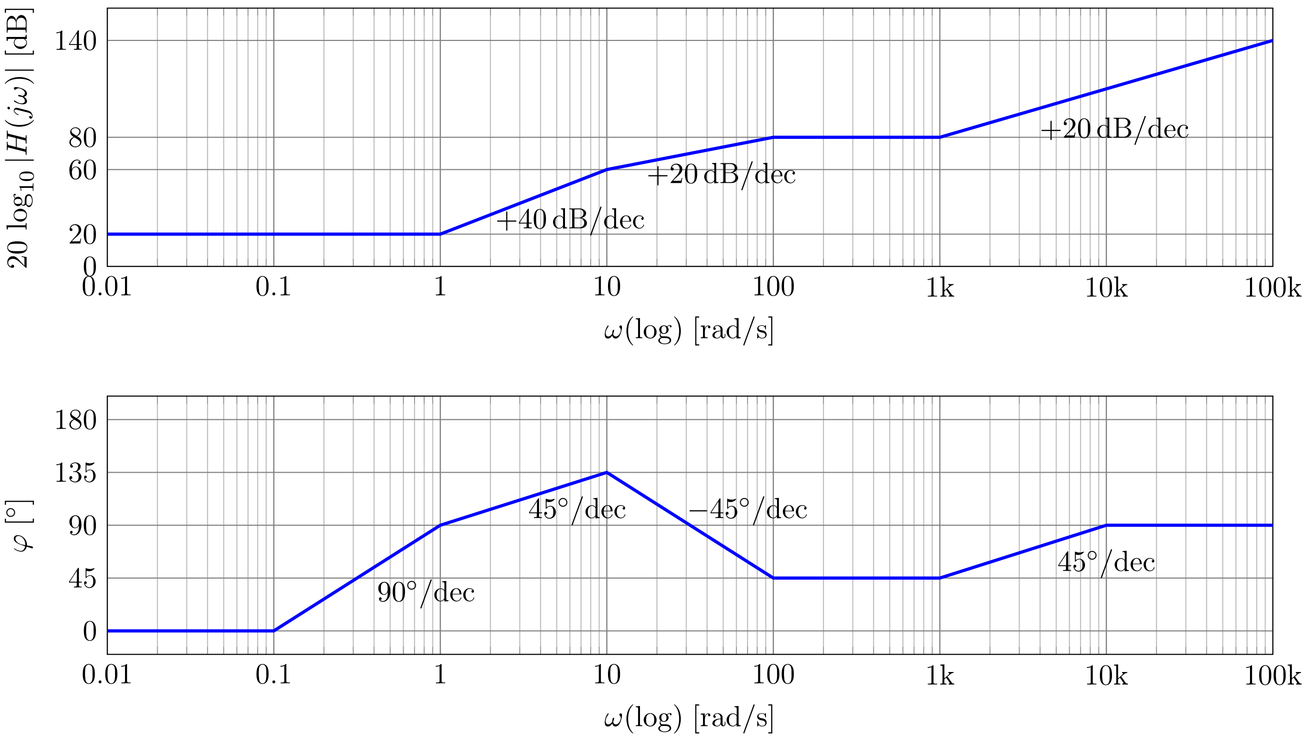
Nacrtati frekvencijske karakteristike sledećih prenosnih funkcija.
a) $H(s) = 10\frac{(s+1)^2(s+1000)}{(s+10)(s+100)}$,
b) $H(s) = -100\frac{(s+0.1)(s+2000)}{s^2+s+100}$,
c) $H(s) = -10\frac{(s+0.1)(s+10000)}{s^2}$,
d) $H(s) = \frac{s^2}{(s-0.1)(s+100)}$.

Rešenje:

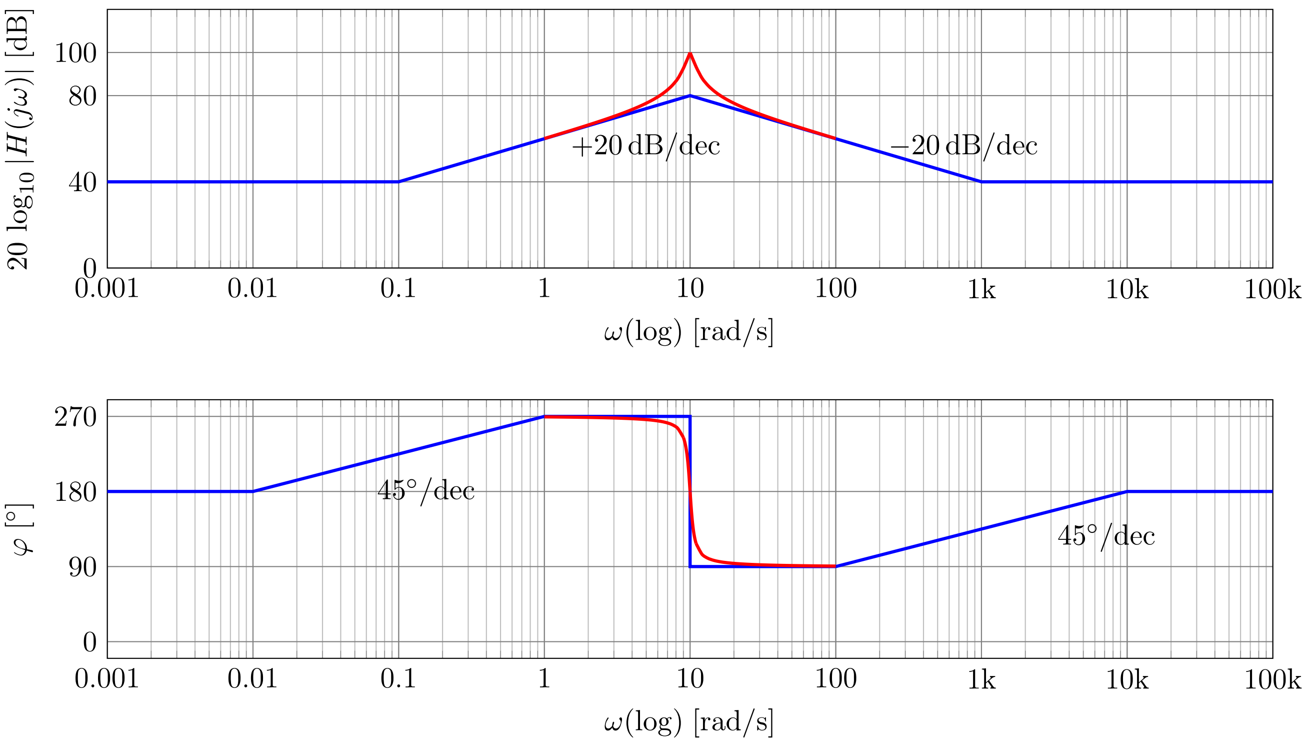
a) Pošto je $A = 10 > 0$ na niskim učestanostima je $H(s) = 20\,\log_{10}\left|10\,\frac{1\cdot 1000}{10\cdot 100}\right| = 20$ dB. Fazna karakteristika tako kreće od nula, a amplitudska od 20 dB.

Amplitudska karakteristika na učestanosti 10 ima vrednost $|H(j10)|_{\mathrm{dB}} = 60$ dB, a u opsegu učestanosti $\omega \in [100, 1000]$ amplitudska karakteristika ima vrednost $|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = 80$ dB.

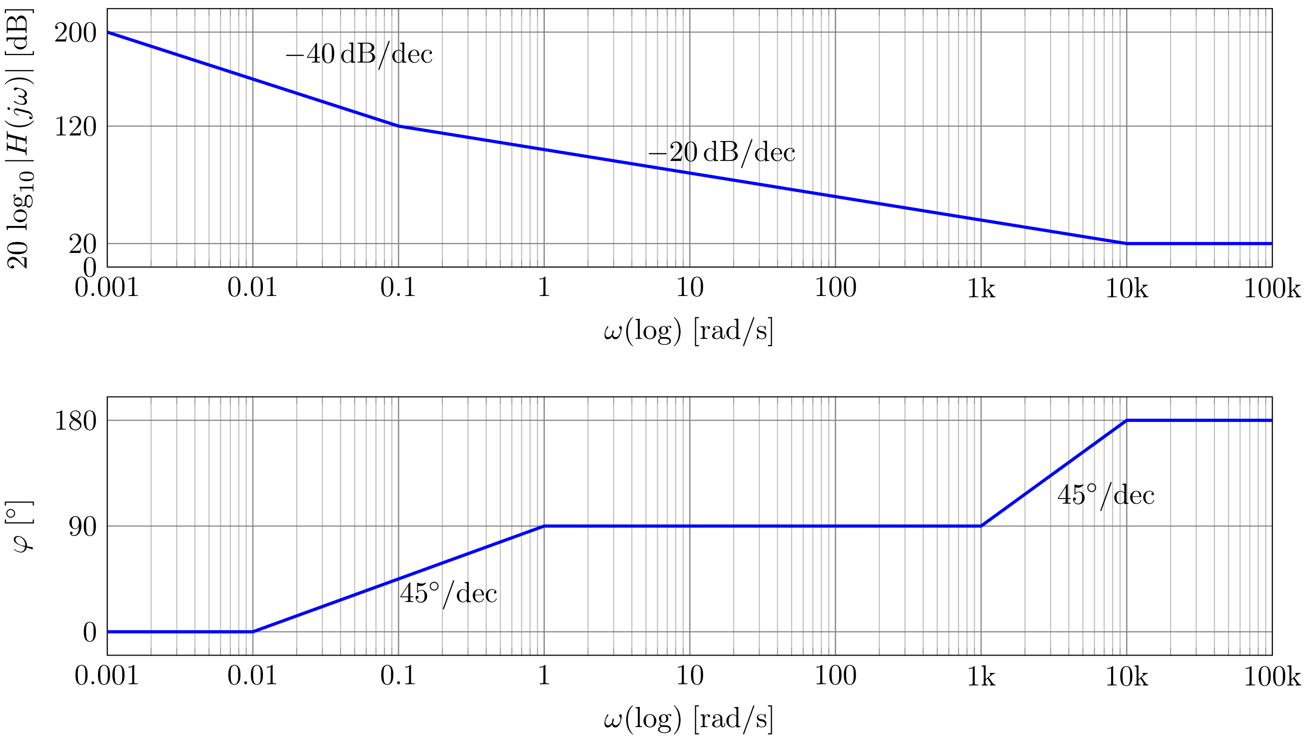
Amplitudska i fazna karakteristika su prikazane na slici 3.42.1.
b) Amplitudske i fazna karakteristika su prikazane na slici 3.42.2.
c) Amplitudska i fazna karakteristika su prikazane na slici 3.42.3.
d) Amplitudska i fazna karakteristika su prikazane na slici 3.42.4.



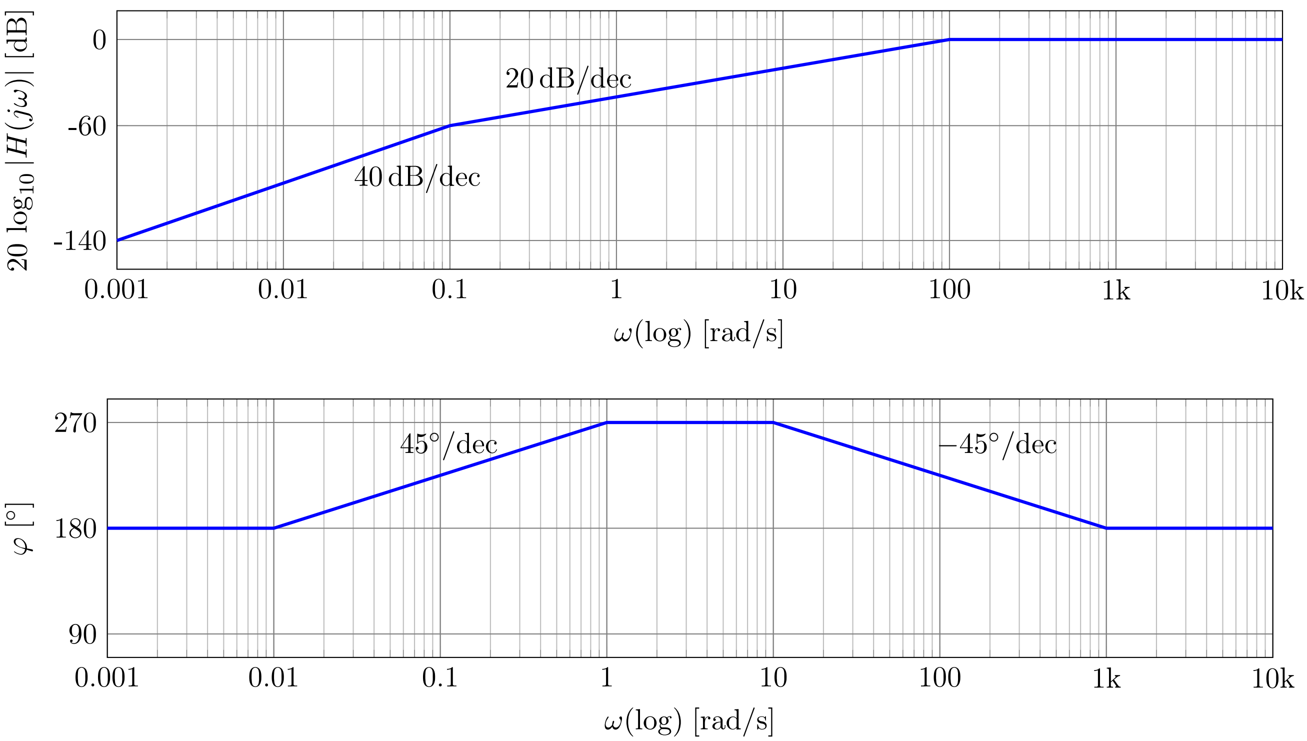
Slika 3.42.1.



Slika 3.42.2.



Slika 3.42.3.



Slika 3.42.4.

Zadatak 3.43.

Furijeova transformacija impulsnog odziva linearnog sistema je data izrazom:

$$H(s) = \frac{10}{s+\omega_{p0}} \frac{s+\omega_n}{s+\omega_{p1}},$$

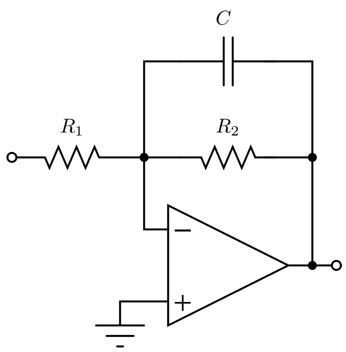
gde je $\omega_n = 1\,\frac{\text{krad}}{\text{s}}$, $\omega_{p0} = 10\,\omega_n$, $\omega_{p1} = 100\,\omega_n$.
a) Realizovati sistem koristeći idealne operacione pojačavače, kondenzatore od $C = 10$ nF i otpornike po izboru.
b) Odrediti odziv sistema na pobudu $v(t) = \mathrm{e}^{-\omega_{p1}t}\,\mathrm{u}(t-0.1\text{ s})$.

Rešenje:

a)

$$H(s) = \frac{10}{s+\omega_{p0}} \frac{s+\omega_n}{s+\omega_{p1}} = \frac{10\,(-\omega_{p1}+\omega_n)}{(-\omega_{p1}+\omega_{p0})\,(s+\omega_{p1})} + \frac{10\,(-\omega_{p0}+\omega_n)}{(-\omega_{p0}+\omega_{p1})\,(s+\omega_{p0})} \approx \frac{\frac{10}{\omega_{p1}}}{1+\frac{s}{\omega_{p1}}} - \frac{\frac{1}{\omega_{p0}}}{1+\frac{s}{\omega_{p0}}}$$

Prenosna funkcija može da se realizuje pomoću bloka sa slike 3.43.1 čija je prenosna funkcija $A(s) = \dfrac{-\frac{R_2}{R_1}}{1+\frac{s}{\omega_p}}$, $\omega_p = \dfrac{1}{R_2C}$.



Slika 3.43.1.

Na slici 3.43.2 je prikazana tražena realizacija.
Na osnovu slike 3.43.2 važi da je:

$$V_I(s) = \left(\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+\frac{s}{\omega_{p1}}} - \frac{R_4}{R_3}\frac{1}{1+\frac{s}{\omega_{p0}}}\right) V_U(s),$$

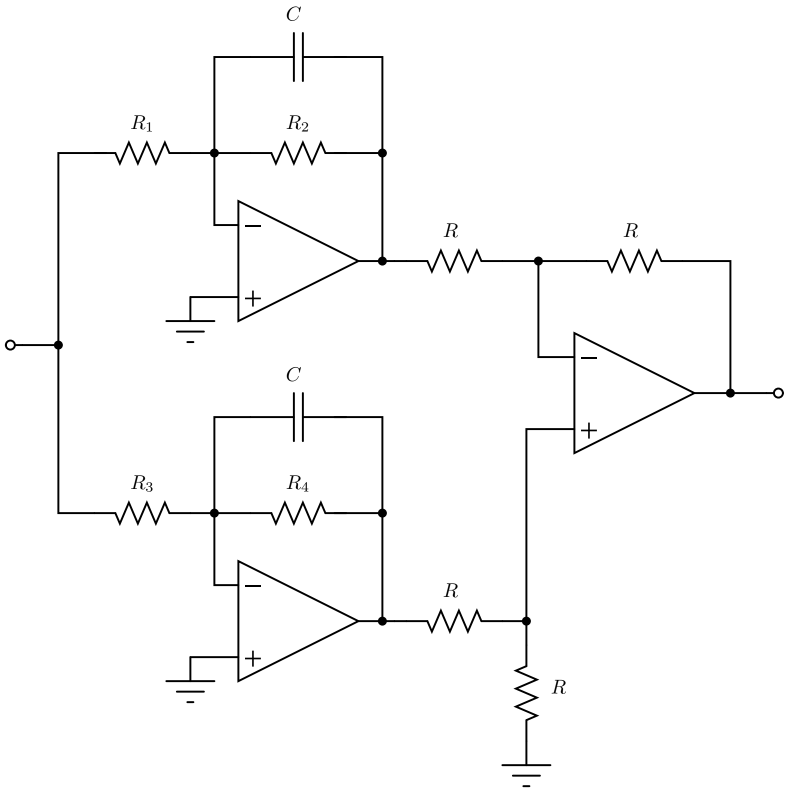
odakle se vidi da je $R_2 = 10\,R_1 = \frac{1}{\omega_{p1}\,C} = 1$ kΩ, a $R_3 = R_4 = \frac{1}{\omega_{p0}\,C} = 10$ kΩ.
b) $v(t) = \mathrm{e}^{-0.1\text{ s}\cdot\omega_{p1}}\,\mathrm{e}^{-\omega_{p1}(t-0.1\text{ s})}\,\mathrm{u}(t-0.1\text{ s})$

$$v_1(t) = \mathrm{e}^{-\omega_{p1}t}\,\mathrm{u}(t) \quad\Rightarrow\quad V_1(s) = \frac{1}{s+\omega_{p1}}$$

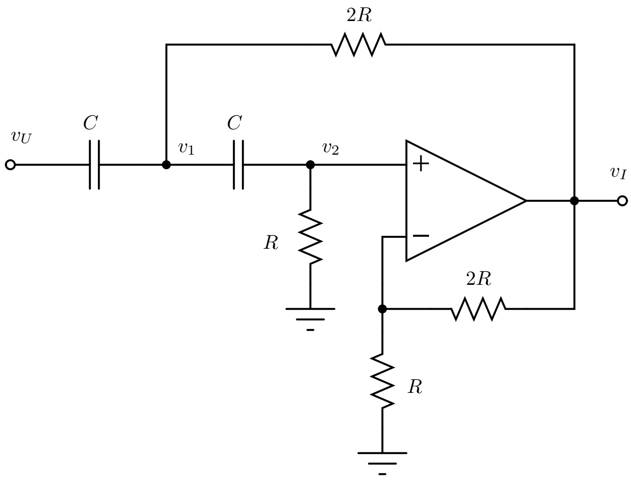
$$Y_1(s) = \frac{10\,(s+\omega_n)}{(s+\omega_{p0})\,(s+\omega_{p1})^2}$$

Zadatak 3.44.

Ako je operacioni pojačavač idealan, za kolo sa slike 3.44.1:
a) Odrediti prenosnu funkciju.
b) Nacrtati amplitudsku i faznu karakteristiku.
c) Odrediti propusni opseg i objasniti funkciju kola.



Slika 3.43.2.



Slika 3.44.1.

Rešenje:

a) Pošto je pojačanje od neinvertujućeg ulaza do izlaza jednako 3, dovoljno je postaviti samo dve jednačine za potencijale čvorova.

$$V_1\left(sC + sC + \frac{1}{2R}\right) - V_2 \cdot sC - 3V_2 \cdot \frac{1}{2R} = V_\mathrm{u} \cdot sC$$
$$-V_1 \cdot sC + V_2\left(sC + \frac{1}{R}\right) = 0$$

Sređeno:

$$(4sCR + 1)\,V_1 - (2sCR + 3)\,V_2 = 2sCR \cdot V_\mathrm{u}$$
$$-sCR \cdot V_1 + (sCR + 1)\,V_2 = 0$$

Kako je potrebno naći samo napon V_2:

$$V_2(s) = \frac{2sCR \cdot sCR}{(4sCR+1)(sCR+1) - sCR(2sCR+3)} V_{\mathrm{u}}(s) = \frac{2s^2R^2C^2}{2s^2R^2C^2 + 2sRC + 1} V_{\mathrm{u}}(s).$$

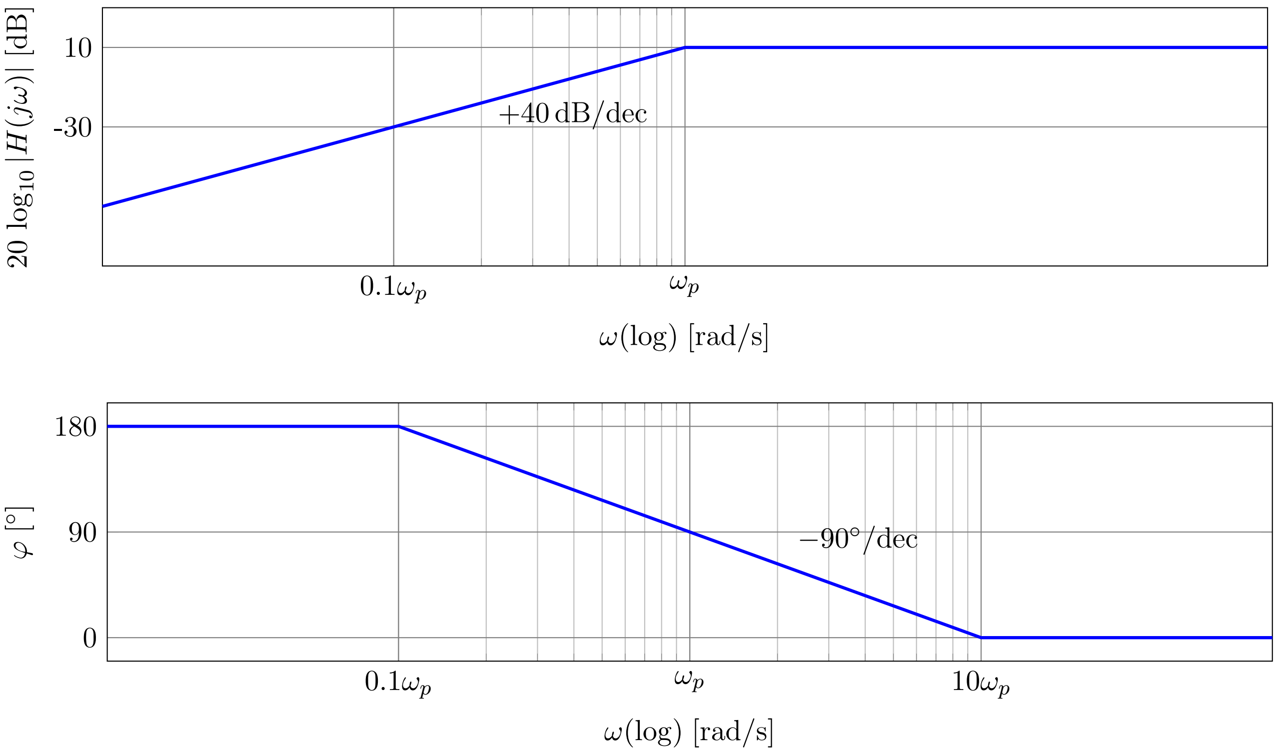
Na osnovu toga je

$$V_i(s) = 3V_2(s) = \frac{3s^2}{s^2 + \frac{s}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}RC)} + \frac{1}{2R^2C^2}} V_{\mathrm{u}}(s).$$

Pošto je $Q > \frac{1}{2}$, prenosna funkcija nema realnih polova pa se piše u obliku

$$H(s) = \frac{V_i(s)}{V_{\mathrm{u}}(s)} = V_\infty \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q}s + {\omega_p}^2}.$$

b)



Slika 3.44.2.

c) Kolo ima funkciju filtera propusnika visokih učestanosti, i za njega se definiše nepropusni opseg. Granice nepropusnog opsega se definiše kao učestanost na kojoj je pojačanje za ˘3 dB manje u odnosu na vrednost u propusnom opsegu ($\sqrt{2}$ puta manje). Sa slike 3.44.2 je očigledno da je granica ω_P tako da nepropusni opseg iznosi $BR = \omega_P = \frac{1}{RC\sqrt{2}}$.

NAPOMENA:

Amplitudske i fazne karakteristike električnih kola se efikasno analiziraju upotrebom softverskih alata za simulaciju električnih kola, kao što je Pspice – standardni softverski alat prihvaćen u industriji. Novije verzije Matlaba imaju Simulink biblioteke za simulaciju električnih kola, kao i interfejs prema programu Pspice.

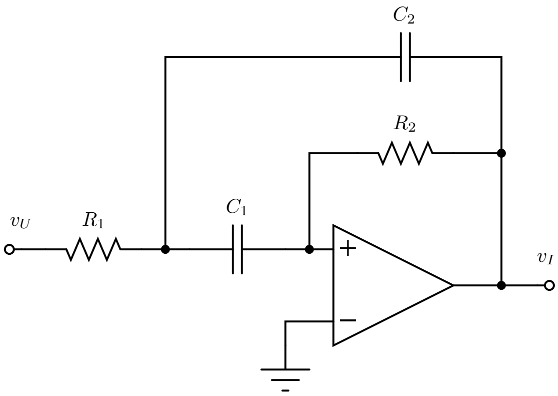
Zadatak 3.45.

Ako je operacioni pojačavač idealan, za kolo sa slike 3.45.1:

a) Odrediti prenosnu funkciju.

b) Nacrtati amplitudsku i faznu karakteristiku za $R_1 = R_2$ i $C_1 = C_2$.

c) Odrediti propusni opseg i objasniti funkciju kola u zavisnosti od promene Q faktora.



Slika 3.45.1.

Rešenje:

a) Kao i u prethodnom zadatku, dovoljne su samo dve jednačine:

$$V_1(sC_1 + sC_2 + \frac{1}{R_1}) - V_i \cdot sC_2 = V_\mathrm{u} \cdot \frac{1}{R_1},$$
$$- V_1 \cdot sC_1 - V_i \cdot \frac{1}{R_2} = 0.$$

Sređeno:

$$V_1(sR_1C_1 + sR_1C_2 + 1) - V_i \cdot sR_1C_2 = V_\mathrm{u},$$
$$V_1 \cdot sR_2C_1 + V_i = 0.$$

$$V_i = \frac{-sR_2C_1}{(sR_1C_1 + sR_1C_2 + 1) + sR_1C_2 \cdot sR_2C_1} V_\mathrm{u} = \frac{-\frac{s}{R_1C_2}}{s^2 + s\left(\frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_2C_1}\right) + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}} V_\mathrm{u}$$

$$H(s) = \frac{V_i(s)}{V_\mathrm{u}(s)} = K\frac{s}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q}s + {\omega_p}^2}$$

$$K = -\frac{1}{R_1C_2}, \quad \omega_p = \sqrt{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}, \quad Q = \frac{\sqrt{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}}{\frac{1}{R_2C_1} + \frac{1}{R_2C_2}} = \frac{\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}}{\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} + \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}} = \frac{1}{2}$$

Prema tome

$$H(s) = \frac{V_i(s)}{V_\mathrm{u}(s)} = K\frac{s}{(s + \omega_p)^2}.$$

b) Na slici 3.45.1 prikazane su amplitudska i fazna karakteristika kola sa slike 3.45.1.
c) Granice propusnog opsega se definišu kao učestanosti na kojima pojačanje opadne za ˘3 dB u odnosu na maksimalnu vrednost ($\sqrt{2}$puta manje u odnosu na maksimalnu vrednost). Maksimalna vrednost pojačanja se dobija na učestanosti $\omega = \omega_P$ i iznosi: $A\max = 20\log|H(\omega_P)| = 20\log(K \cdot Q/\omega_P)$.

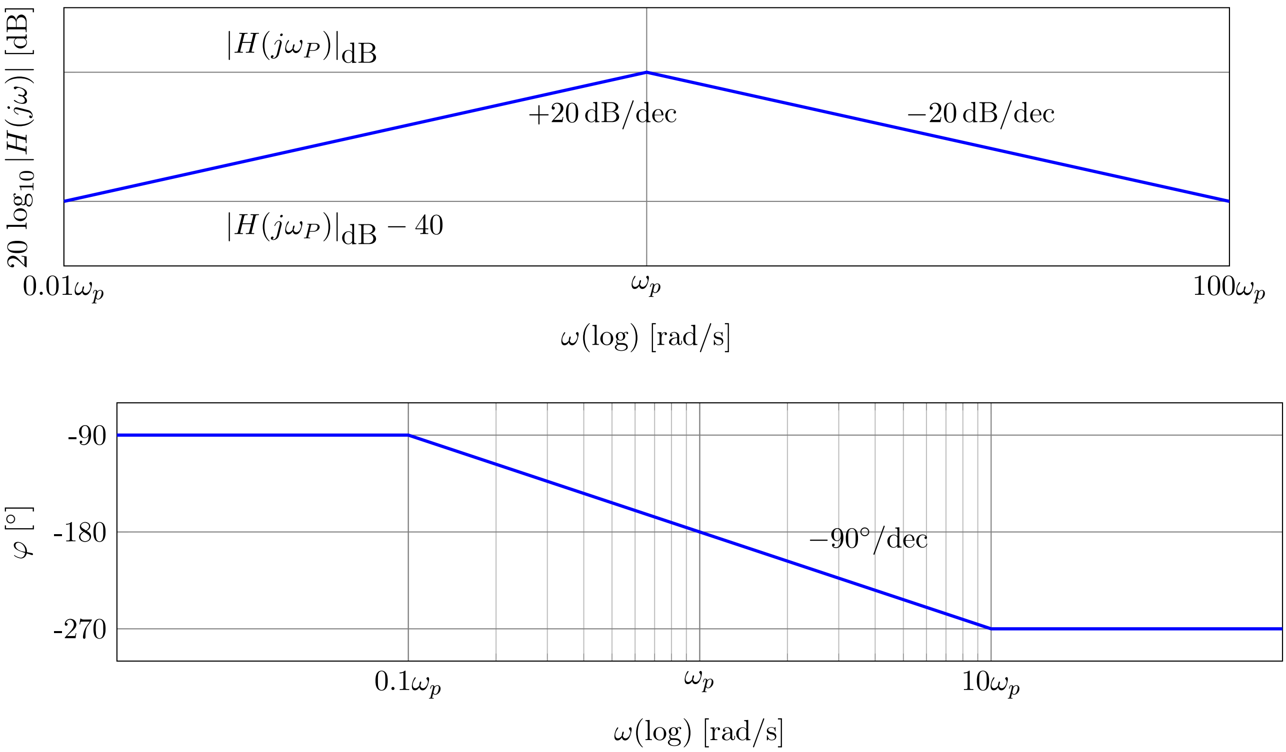
Na granici propusnog opsega važi da je

$$20\log|H(\omega_{gr})| = A\max - 3\mathrm{dB} = 20\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}|H(\omega_p)|\right),$$

$$|H(\omega_{gr})| = K\frac{\omega_{gr}}{\left(\sqrt{\omega_{gr}^2 + \omega_p^2}\right)^2} = K\frac{\omega_{gr}}{\omega_{gr}^2 + \omega_p^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}K\frac{Q}{\omega_P} = \frac{\sqrt{2}}{4}K\frac{1}{\omega_P}.$$

Na osnovu toga se dobijaju gornja i donja granična učestanost:

$$\omega_{gr}^2 - 2\sqrt{2}\omega_P\omega_{gr} + \omega_p^2 = 0 \Rightarrow \omega_{gr1/2} = \left(\pm 1 + \sqrt{2}\right)\omega_P.$$



Slika 3.45.2.

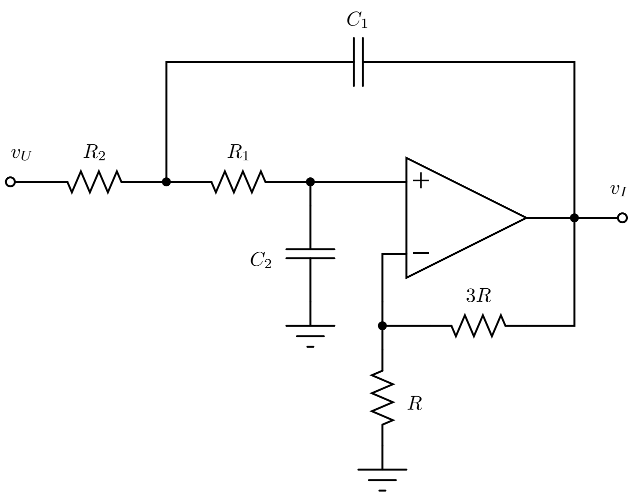
Propusni opseg je jednak razlici gornje i donje granične učestanosti i iznosi:

$$BW = \omega_{gr1} - \omega_{gr2} = \left(1+\sqrt{2}\right)\omega_P - \left(-1+\sqrt{2}\right)\omega_P = 2\omega_P.$$

Povećavanjem Q faktora povećava se i pojačanje u propusnom opsegu, ali se zato propusni opseg sužava.

Zadatak 3.46.

Ako je operacioni pojačavač idealan, za kolo sa slike 3.46.1:
a) Odrediti prenosnu funkciju.
b) Nacrtati amplitudsku i faznu karakteristiku za a) $R_1 = 10\text{k}\Omega,\ R_2 = 330\Omega,\ C_1 = 10\text{nF}, C_2 = 100\text{nF}$.
c) Objasniti funkciju kola.



Slika 3.46.1.

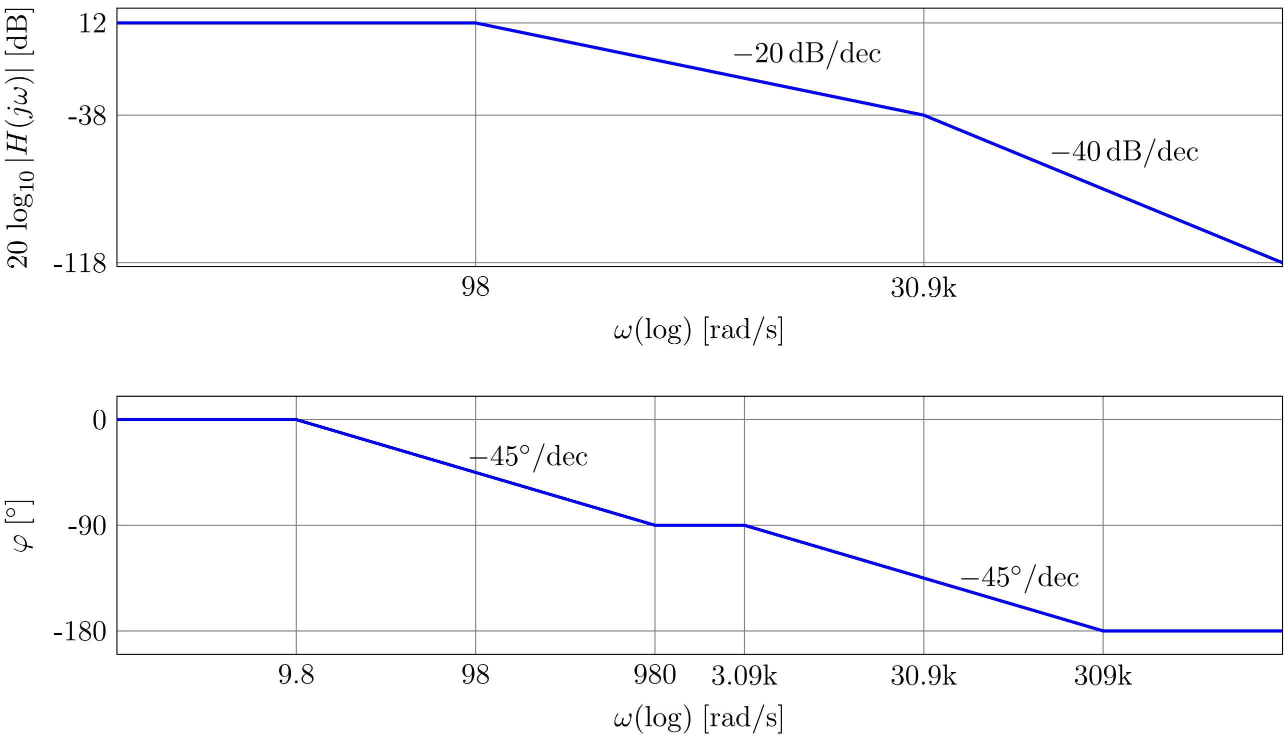
Rešenje:

a)

$$H(s) = \frac{V_i(s)}{V_u(s)} = \frac{K}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q}s + {\omega_p}^2}$$

$$K = \frac{4}{R_1C_1R_2C_2}, \quad \omega_p = \sqrt{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}, \quad Q = \frac{\sqrt{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}}{\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1} - \frac{3}{R_1C_2}}$$

b) Računaju se vrednosti $K = 1.21 \cdot 10^9$, $\omega_p = 17.408\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $Q = 0.0561$. Kako je $Q < 1$, postoje dva realna pola $\omega_{p1} = 98.123\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ i $\omega_{p2} = 30.908\frac{\text{krad}}{\text{s}}$ u levoj poluravni. Bodeove karakteristike su prikazane na slici 3.46.2.



Slika 3.46.2.

c) Kolo ima funkciju filtera propusnika niskih učestanosti. Za njega se definiše propusni opseg i on iznosi $BW = \frac{1}{RC\sqrt{2}}$.

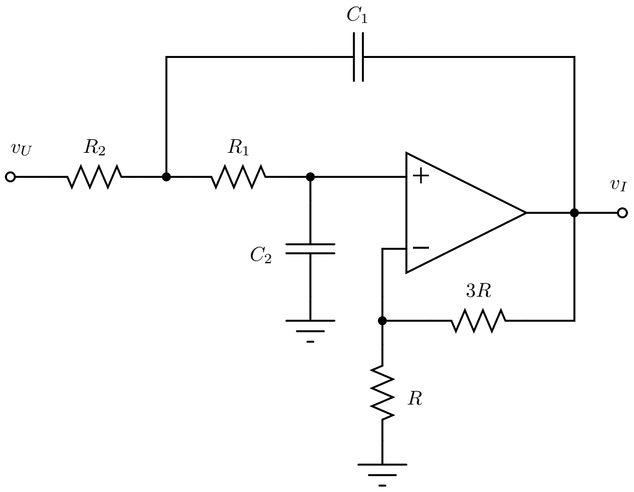
Zadatak 3.47.

Za kolo sa slike 3.47.1 je poznato $R_1 = R_2 = 10\ \text{k}\Omega$, $C_1 = 100\ \mu\text{F}$ i $C_2 = 20\ \mu\text{F}$.
a) Odrediti prenosnu funkciju.
b) Nacrtati amplitudsku i faznu karakteristiku.
c) Odrediti ustaljeni odziv ako je $v_U(t) = 1\ \text{V}\,(10 + \sin(t) - \cos(10^6\,t))$.
d) Odrediti potpuni odziv ako je $v_U(t) = 10\ \text{mV}\,\text{u}(t)$.

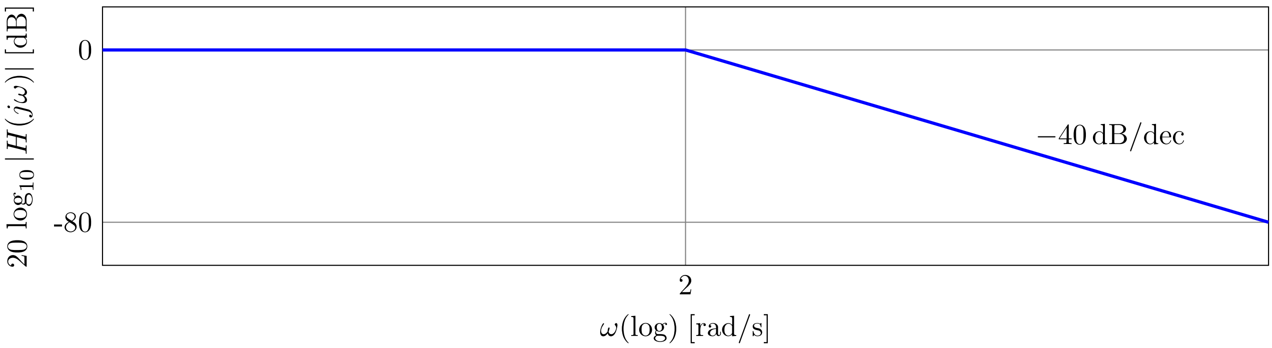
Rešenje:

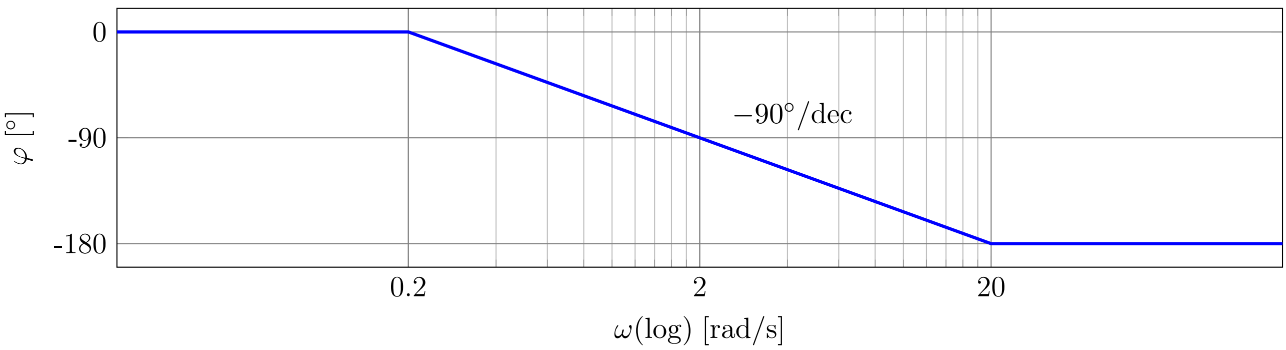
a) $H(s) = \frac{5}{s^2+2s+5}$
b) Pošto je faktor dobrote kola $Q = 1$, može se smatrati da kolo ima dvostruki realni pol na kružnoj učestanosti $\omega_P = \sqrt{5} \approx 2\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.
c) Na osnovu b) jednosmerni signal se propušta nepromenjen, dok se signal na $\omega = 10^6\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ praktično uopšte ne propušta. Zato je otrebno odrediti odziv samo za signal na kružnoj učestanosti $\omega = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

$$Y(j\omega) = X(j\omega)\,H(j\omega) = \frac{5j\pi}{5 - \omega^2 + 2j\omega}\left(\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)\right) = 5j\pi\left(\frac{\delta(\omega+1)}{5-1-2j} - \frac{\delta(\omega-1)}{5-1+2j}\right) =$$



Slika 3.47.1.





Slika 3.47.2.

$$= \frac{j\pi}{2}\left((2+j)\,\delta(\omega+1)+(2-j)\,\delta(\omega-1)\right)=\frac{\pi}{2}\left(-(\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1))+2j\left(\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)\right)\right)$$

$$y(t)=\sin(t)-\frac{1}{2}\cos(t)$$

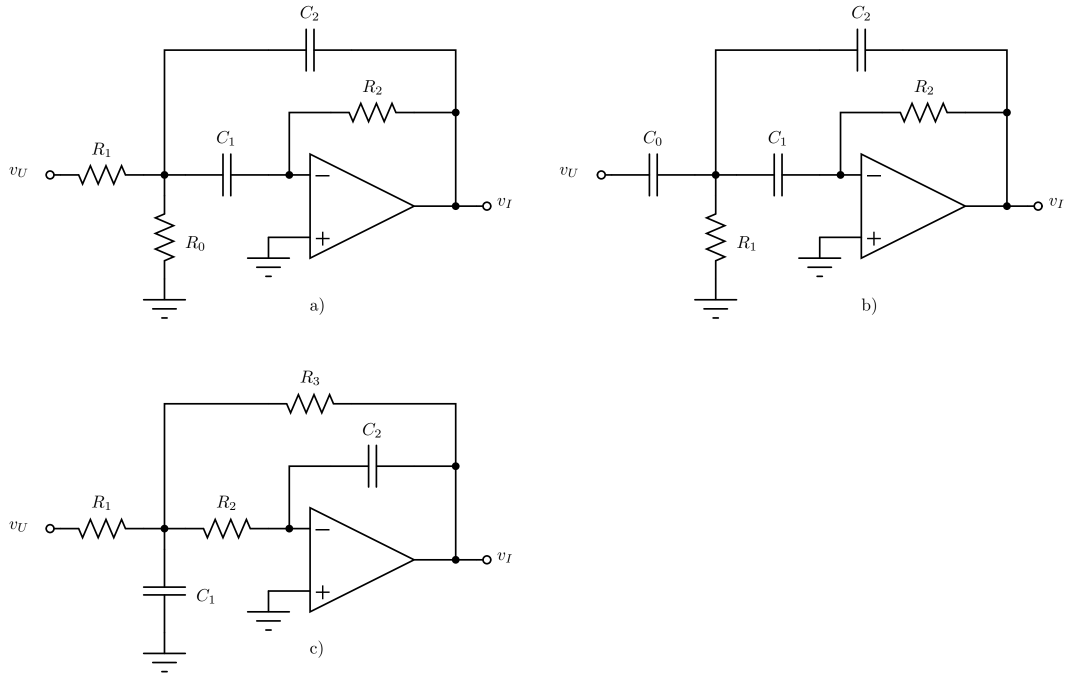
Prema tome je: $v_I(t) = 1\text{ V}\left(10+\sin(t)-\frac{1}{2}\cos(t)\right)$.

d) $v_I(t) = 10\text{ mV}\cdot\mathcal{FT}^{-1}\left\{\dfrac{5}{s\,(s^2+2s+5)}\right\} = 10\text{ mV}\cdot\mathcal{FT}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}-\dfrac{s+2}{(s+1)^2+2^2)}\right\}$

$= 10\text{ mV}\left(1-\dfrac{2\cos(2t)+\sin(2t)}{2}\,\mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{u}(t)$

Zadatak 3.48.

Za kolo sa slike 3.48.1 u opštim brojevima odrediti prenosnu funkciju svih kola sa slike. Objasniti njihovu funkciju.
Nacrtati amplitudsku i faznu karakteristiku ako je $R_0 = R_1 = R_2 = R_3 = R = 1\text{ k}\Omega$ i $C_1 = C_2 = C = 100\text{ nF}$.



Slika 3.48.1.

Rešenje:

a) Prenosna funkcija za kolo sa slike 3.48.1a je:

$$H(s) = -\frac{sC_1\,R_0R_2}{s^2\,C_1C_2\,R_0R_1R_2 + s\,(C_1+C_2)\,R_0R_1 + R_0 + R_1},$$

a za date brojne vrednosti je $H(s) = -\frac{\frac{s}{CR}}{s^2 + \frac{2s}{CR} + \frac{2}{(CR)^2}}$, pa je $\omega_P = \frac{\sqrt{2}}{CR} = 10\sqrt{2}\,\frac{\mathrm{krad}}{\mathrm{s}}$ i $Q = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Kolo predstavlja filtar propusnik opsega učestanosti.

Na slici 3.48.2 su prikazani Bodeovi dijagrami.

b) Prenosna funkcija za kolo sa slike 3.48.1b je:

$$H(s) = -\frac{s^2\,C_0C_1\,R_1R_2}{s^2\,C_1C_2\,R_1R_2 + s\,(C_1+C_2+C_3)\,R_1 + 1},$$

a za date brojne vrednosti je $H(s) = -\frac{\frac{s^2}{CR}}{s^2 + \frac{3s}{CR} + \frac{1}{(CR)^2}}$, pa je $\omega_P = \frac{1}{CR} = 10\,\frac{\mathrm{krad}}{\mathrm{s}}$ i $Q = \frac{1}{3}$. Kolo predstavlja filtar propusnik visokih učestanosti.

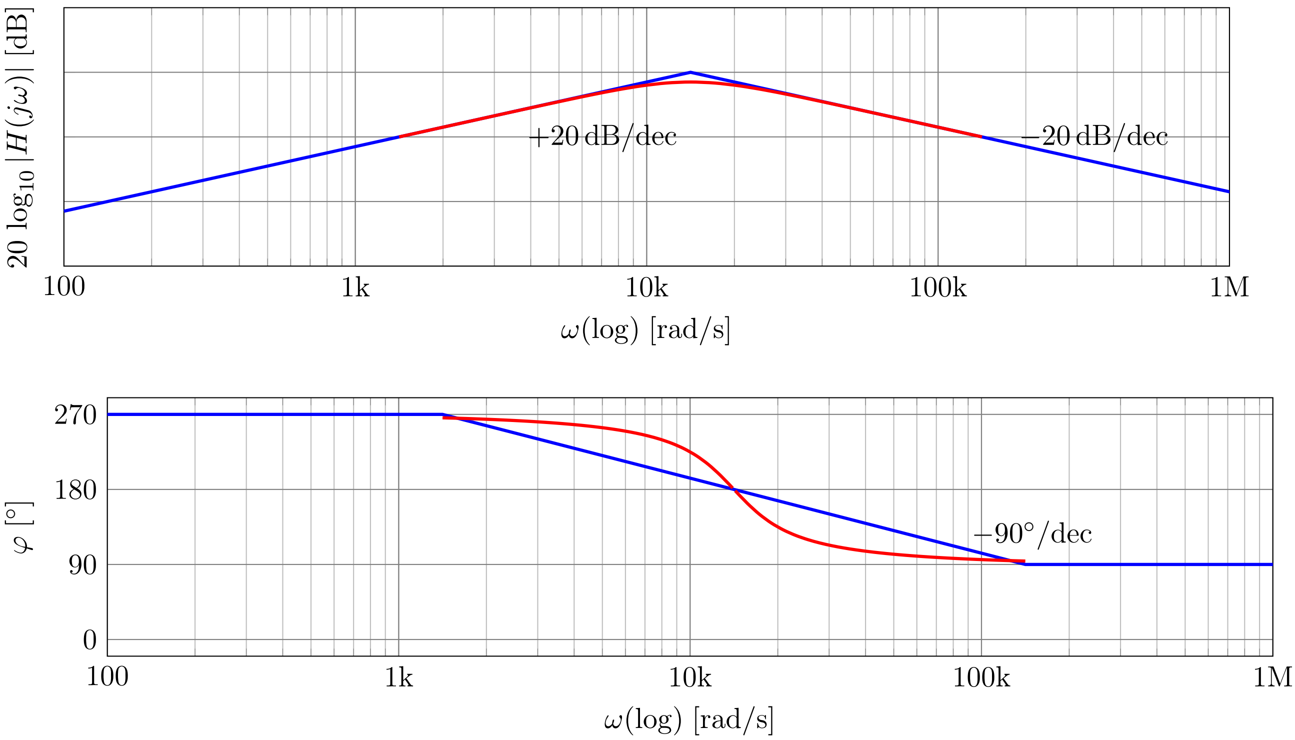
Bodeovi dijagrami se crtaju kao u prethodnim zadacima.

b) Prenosna funkcija za kolo sa slike 3.48.1b je:

$$H(s) = -\frac{R_3}{s^2\,C_1C_2\,R_1R_2R_3 + s\,C_1\,(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3) + R_1},$$

a za date brojne vrednosti je $H(s) = -\frac{\frac{1}{CR}}{s^2 + \frac{3s}{CR} + \frac{1}{(CR)^2}}$, pa je $\omega_P = \frac{1}{CR} = 10\,\frac{\mathrm{krad}}{\mathrm{s}}$ i $Q = \frac{1}{3}$. Kolo predstavlja filtar propusnik niskih učestanosti.

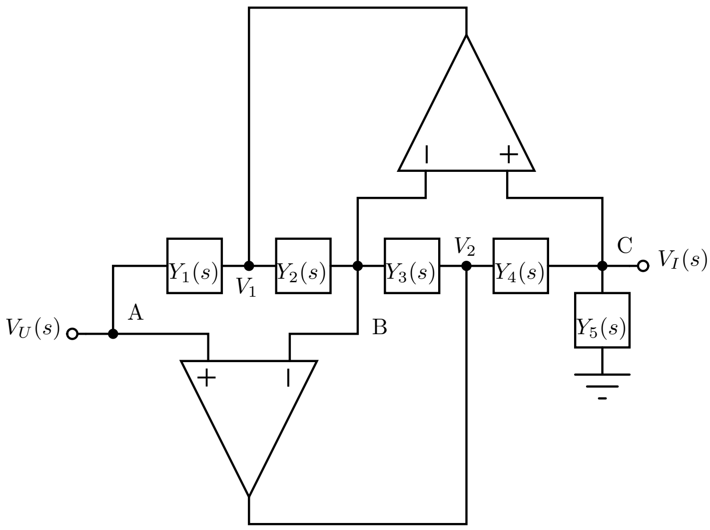
Bodeovi dijagrami se crtaju kao u prethodnim zadacima.



Slika 3.48.2.

Zadatak 3.49.

Za kolo sa slike 3.49.1:
a) Odrediti ulaznu impedansu.
b) Nacrtati amplitudsku i faznu karakteristiku ulazne admitanse ako je $Y_1(s) = 0.5$, $Y_2(s) = s - 10$, $Y_3(s) = s$, $Y_4(s) = s + 500$, $Y_5(s) = s - 100000$.



Slika 3.49.1.

Rešenje:

a) Pošto su operacioni pojačavači idealni i postoji negativna povratna sprega, čvorovi A, B i C su na istom potencijalu koji je jednak $V_U(s)$, $s = j\omega$. Da bi se izračunala ulazna impedansa, potrebno je naći ulaznu struju, a za to je potrebno odrediti potencijal V_1:

$$I_U = \frac{V_U - V_1}{Z_1} = (V_U - V_1)Y_1.$$

Pošto nije poznata izlazna struja pojačavača, nije moguće postaviti jednačine po metodu potencijala čvorova za potencijale V_1 i V_2, ali je moguće za čvorove B i C jer je ulazna struja operacionih pojačavača jednaka nuli, s tim što je njihov potencijal poznat i iznosi V_U.

$$V_C(s)(Y_4+Y_5) - V_2(s)Y_4 = V_U(Y_4+Y_5) - V_2Y_4 = 0$$
$$V_B(s)(Y_3+Y_2) - V_2(s)Y_3 - V_1(s)Y = V_U(Y_3+Y_2) - V_2Y_3 - V_1Y_2 = 0$$

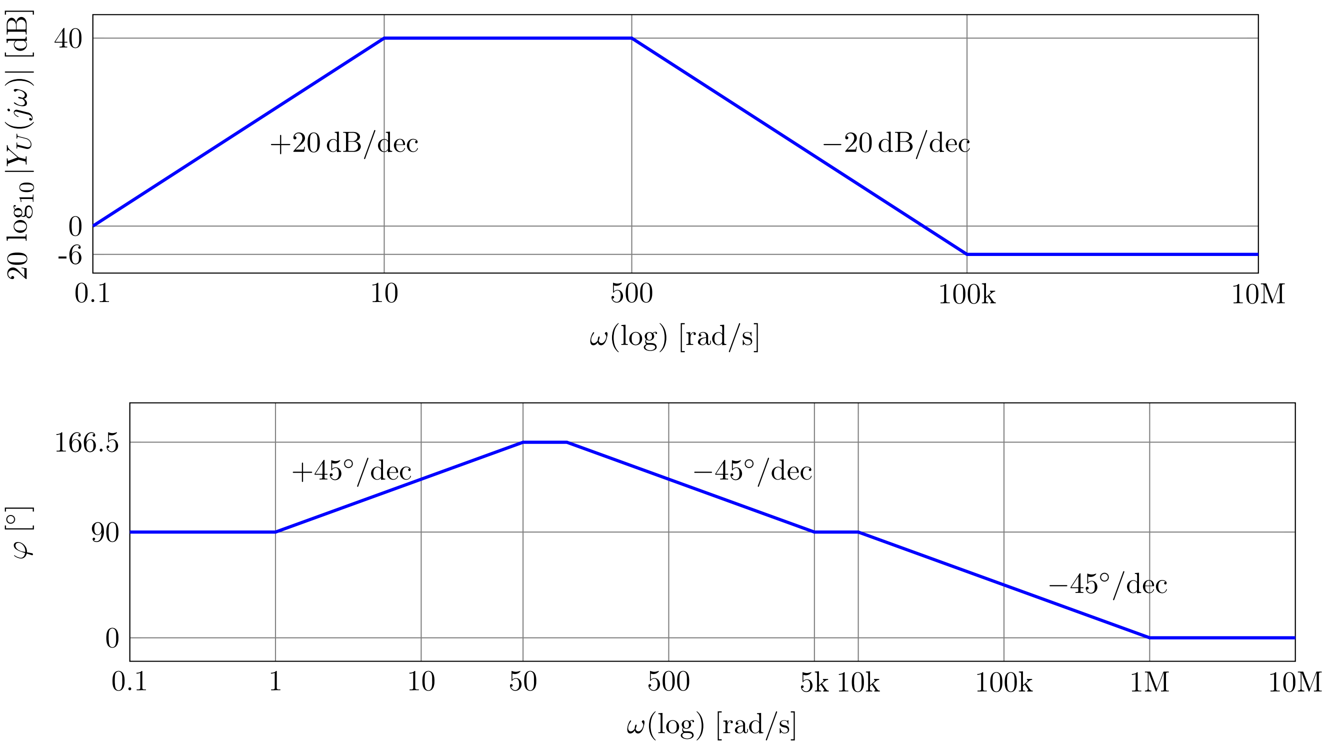
Rešavanjem ovog sistema dobija se

$$V_1 = V_U\left(1-\frac{Y_3Y_5}{Y_2Y_4}\right) \Rightarrow I_U = \frac{V_U-V_1}{Z_1} = (V_U-V_1)Y_1 = V_U\frac{Y_1Y_3Y_5}{Y_2Y_4} = V_U\frac{Z_2Z_4}{Z_1Z_3Z_3},$$

$Z_U = \frac{V_U}{I_U} = \frac{Y_2Y_4}{Y_1Y_3Y_5} = \frac{Z_1Z_3Z_5}{Z_2Z_4}$.

b)

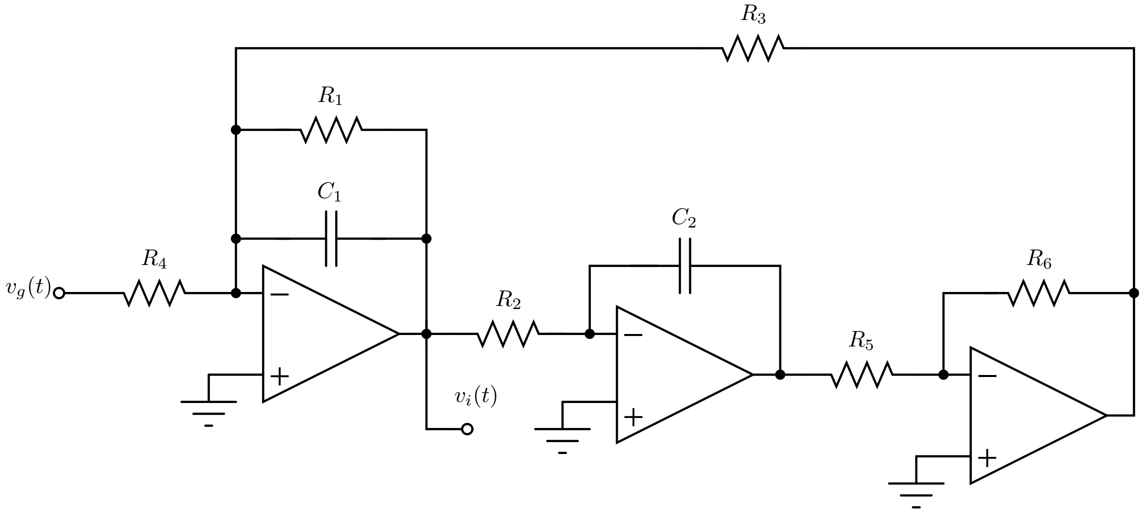
$$Y_U(s) = \frac{Y_1(s)Y_3(s)Y_5(s)}{Y_2(s)Y_4(s)} = 0.5\,\frac{s(s-100000)}{(s-10)(s+500)},$$
$$|Y_U(j\,1\text{ rad/s})|_{\text{dB}} \approx 20\,\log_{10}\left|0.5\frac{1\cdot 100000}{10\cdot 500}\right| = 20\text{ dB}.$$



Slika 3.49.2.

Zadatak 3.50.

Dato je električno kolo na slici 3.50.1 čija je funkcija prenosa definisana izrazom $V_o(s)/V_g(s) = H(s) = \frac{-as}{s^2+bs+c}$.
a) Ako su vrednosti kondenzatora u kolu $1\,\mu$F, $R_5 = 10$ kΩ, odrediti vrednosti ostalih otpornika u kolu tako da vrednosti konstanti u prenosnoj funkciji budu $a = 10^4$, $b = 10^2$, $c = 10^6$.
b) Nacrtati Bodeove asimptotske karakteristike kola.
c) Odrediti prinudni prelazni i ustaljeni odziv kola ako je $v_g(t) = 3\text{V} \cdot \text{u}(t - 3\text{ s}) + t^2 e^{5t}\delta(t)$.



Slika 3.50.1.

Rešenje:

a) $H(s) = -\dfrac{\frac{s}{C_1R_4}}{s^2 + \frac{s}{C_1R_1} + \frac{R_6}{C_1C_2R_2R_3R_5}}$

$$a = \frac{1}{CR_4} \Rightarrow R_4 = 100\Omega$$
$$b = \frac{1}{CR_1} \Rightarrow R_1 = 10\text{ k}\Omega$$
$$c = R_6/C^2 \cdot R_2R_3R_5 \Rightarrow R_6 = R_5, \quad R_3 = R_2 = 1\text{k}\Omega$$

b) Na slici 3.50.2 su prikazani Bodeovi dijagrami.
c) $v_o(t) = -200\sqrt{\frac{3}{133}}\text{ V}\, e^{-50(t-3)}\sin(50\sqrt{399}\cdot(t-3))\text{u}(t-3)$

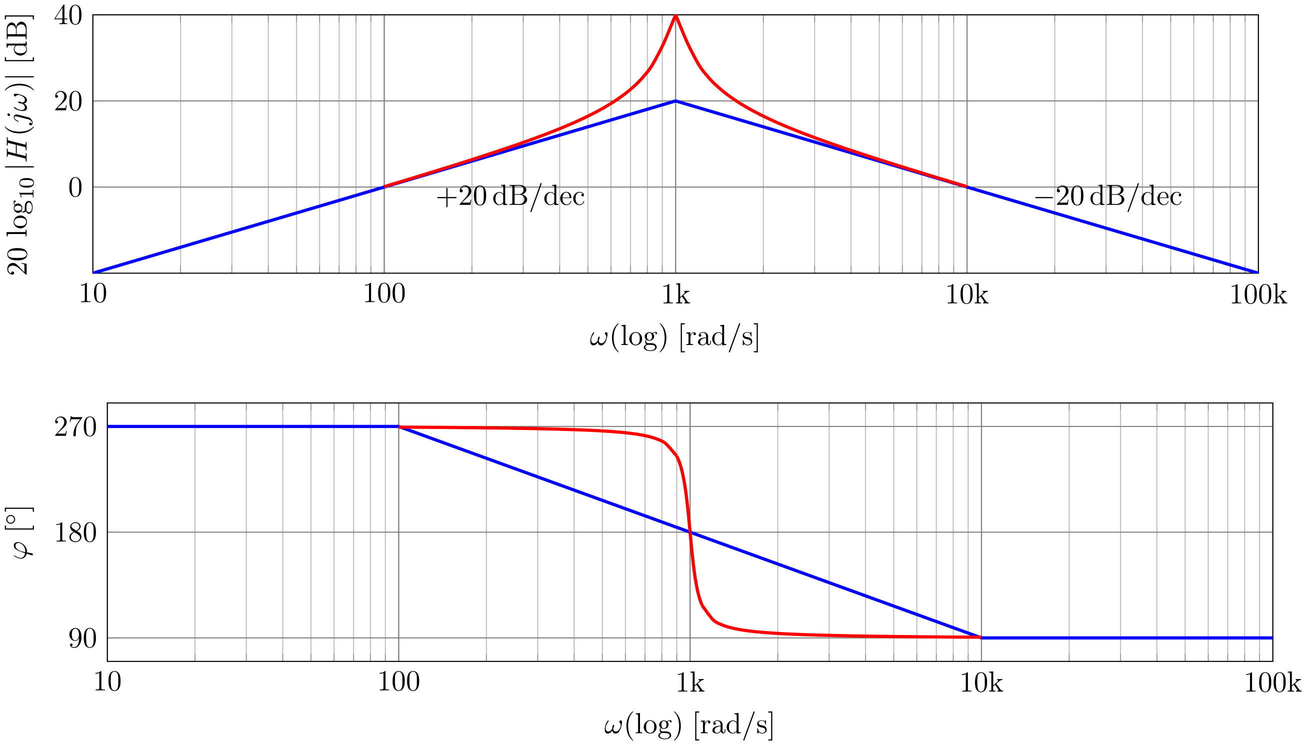
Zadatak 3.51.

a) Odredi prenosnu funkciju kola sa slike 3.51.1 ako je $C = 1\,\mu$F i $R = 10$ kΩ.
b) Nacrtati amplitudsku i faznu karakteristiku kola.
c) Odrediti ustaljeni odziv kola ako je $v_U(t) = 1\text{ V}\,(1 + \cos^2(10^6\,t))$.

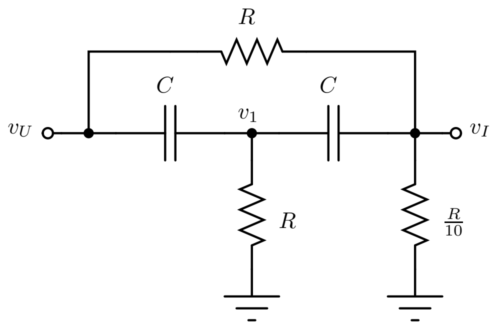
Rešenje:

a) Dve jednačine po metodi potencijala čvorova V_1 i V_I daju:

$$V_1\left(sC + sC + \tfrac{1}{R}\right) - V_1\,sC = V_U\,sC,$$
$$-V_1\,sC + V_I\left(sC + \tfrac{1}{R} + \tfrac{11}{R}\right) = \tfrac{V_U}{R}.$$



Slika 3.50.2.



Slika 3.51.1.

Množenjem obe jednačine sa R, dobija se sistem linearnih jednačina sa dve nepoznate:

$$\begin{aligned} &V_1\,(2\,sCR+1) - V_1\,sCR = V_U\,sCR, \\ &-V_1\,sCR + V_I\,(sCR+11) = V_U, \end{aligned}$$

čija je determinanta

$$\Delta = (1+2\,sCR)\,(11+sCR) - (sCR)^2 = (sCR)^2 + 23\,sCR + 11 \approx (sCR+0.5)\,(sCR+22.5).$$

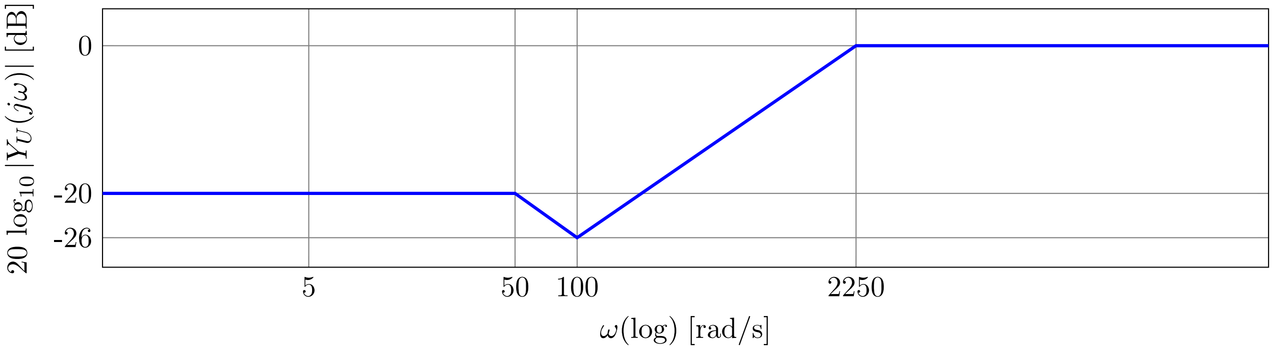
Determinanta po naponu V_I je

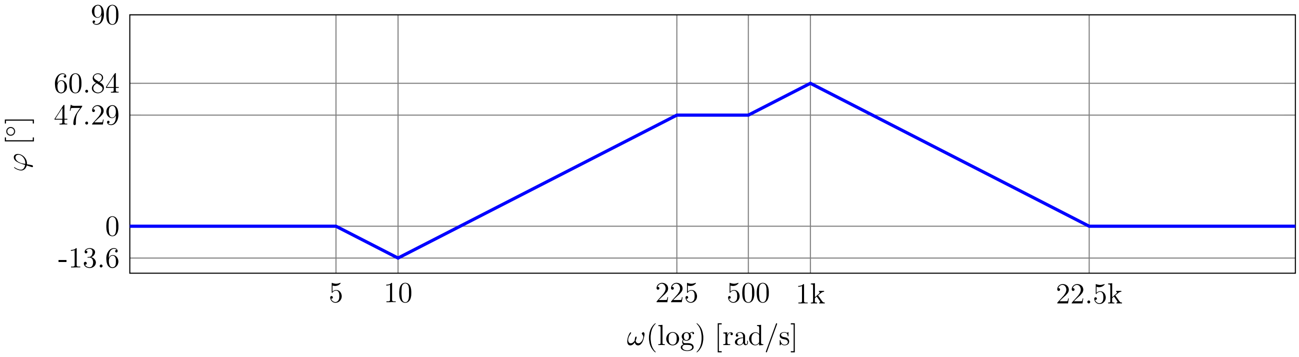
$$\Delta V_I = \det\begin{vmatrix} 1+2\,sCR & sCR\,V_U \\ -sCR & V_U \end{vmatrix} = (1+sCR)^2\,V_U,$$

pa je

$$V_I \approx \frac{(1+sCR)^2}{(sCR+0.5)\,(sCR+22.5)}\,V_U \approx \frac{1}{11}\,\frac{\left(1+\frac{s}{\omega_n}\right)^2}{\left(1+\frac{s}{\omega_{p1}}\right)\,\left(1+\frac{s}{\omega_{p2}}\right)},$$

gde je $\omega_n = \frac{1}{RC} = 100\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\omega_{p1} = \frac{0.5}{RC} = 50\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ i $\omega_{p2} = \frac{22.5}{RC} = 2250\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.
b) Fazna karakteristika u intervalima $\omega \in \left[5\frac{\text{rad}}{\text{s}},\ 10\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ i $\omega \in \left[1000\frac{\text{rad}}{\text{s}},\ 22500\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ opada sa $-45°/\text{dec}$. U intervalima $\omega \in \left[10\frac{\text{rad}}{\text{s}},\ 225\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ i $\omega \in \left[500\frac{\text{rad}}{\text{s}},\ 1000\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ faza raste sa nagibom $45°/\text{dec}$.
c) $v_I(t) = 1\ \text{V}\,\left(\frac{3}{22} + \frac{1}{2}\cos(2\cdot 10^6\,t)\right)$





Slika 3.49.2.

4.4 Furijeovi redovi diskretnih signala

Razvoj diskretnog signala $x[n]$ u Furijeov red se računa

$$X[k] = \frac{1}{N_F} \sum_{n=\langle N_F \rangle} x[n]\, e^{-j\,\frac{2\pi kn}{N_F}}, \qquad 0 \le k \le N_F - 1.$$

Koristeći koeficijente razvoja u Furijeov red , signal $x[n]$ se može predstaviti kao:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_F \rangle} X[k]\, e^{j\,\frac{2\pi kn}{N_F}}, \qquad n_0 \le n \le n_0 + N_F - 1.$$

4.4.1 Osobine koeficijenata Furijeovih redova

Original $x[n] = x[n + p\,N_F]$	**Slika** $X[k]$
$ax[n] + by[n]$	$aX[k] + bY[k]$
$x[n - n_0]$	$X[k]\,\mathrm{e}^{-j\,\frac{2\pi k n_0}{N_F}}$
$e^{j\,\frac{2\pi k_0 n}{N_F}}\,x[n]$	$X[k - k_0]$
$x[-n]$	$X[-k]$
$x^*[n]$	$X^*[-k]$
$z[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{m}\right], & \frac{n}{m} \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{drugde}, \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}$	$\dfrac{1}{m}\,X[k]$
$x[n]$	$\left.\begin{matrix} X\left[\frac{k}{m}\right], & \frac{k}{m} \in \mathbb{Z} \\ 0, & \frac{k}{m} \notin \mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \quad N_F = m\,N_0$
$x[n] * y[n]$	$N_0\,X[k]\,Y[k]$
$x[n]\,y[n]$	$X[k] \circledast Y[k]$
$x[n] - x[n-1]$	$\left(1 - e^{-j\,\frac{2\pi k n}{N_F}}\right)\,X[k]$
$\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$	$\dfrac{1}{1 - e^{-j\,\frac{2\pi k n}{N_F}}}\,X[k]$
$x[n] \in \mathbb{R}$	$X[-k] = X^*[k], \quad \Theta[-k] = -\Theta[k]$ $\Re\{X[k]\} = \Re\{X[-k]\}$ $\Im\{X[k]\} = \Im\{X[-k]\}$ $\lvert X[k]\rvert = \lvert X[-k]\rvert$ $\arg(X[k]) = -\arg(X[-k])$

Zadatak 3.52.

Dat je diskretni signal $x[n]$ koji zadovoljava sledeće osobine:
1) Osnovna perioda signala je $N = 6$.
2) $\sum\limits_{n=0}^{5} x[n] = 2$.
3) $\sum\limits_{n=2}^{7} (-1)^n \, x[n] = 1$.
4) Signal ima minimalnu srednju snagu od svih signala koji zadovoljavaju prethodna tri uslova.
Odrediti signal $x[n]$ i razvoj u Furijeov red $X[k]$.

Rešenje:

Na osnovu uslova pod 2) je $X[0] = \frac{1}{N} \sum\limits_{n=0}^{N-1} x[n] = \frac{1}{6} \sum\limits_{n=0}^{5} x[n] = \frac{1}{3}$. Kako je $(-1)^n = e^{-jn\pi} = e^{-\frac{2\pi}{6} \cdot 3}$, onda se računa da je $X[3] = \frac{1}{N} \sum\limits_{n=a}^{a+N-1} x[n] \, e^{-3j \, \frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{6} \sum\limits_{n=2}^{7} (-1)^n \cdot x[n] = \frac{1}{6}$.

Na osnovu Parsevalove teoreme srednja snaga diskretnog signala $x[n]$ je jednaka $P = \sum\limits_{n=0}^{N-1} |X[k]|^2 = \sum\limits_{n=0}^{5} |X[k]|^2$. Kako su vrednosti razvoja u Furijeov red za $k = 0$ i $k = 3$ različite od nule, onda se minimalna snaga dobija kada su sve ostale vrednosti razvoja jednake nuli, odnosno ako je $X[1] = X[2] = X[4] = X[5] = 0$.

Signal $x[n]$ je tada: $x[n] = X[0] + X[3] \, e^{jn\pi} = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^n}{6}$.

Zadatak 3.53.

Dat je diskretni signal $x[n]$ čiji je osnovni period $N = 10$, a nenulti koeficijenti njegovog razvoja u kompleksni Furijeov red su: $X[0] = 1$, $X[2] = X^*[-2] = e^{j\frac{\pi}{6}}$ i $X[4] = X^*[-4] = 2\, e^{j\frac{\pi}{3}}$. Odrediti signal $x[n]$.

Rešenje:

Na osnovu definicije je $x[n] = \sum\limits_{k=\langle N \rangle} X[k] \, e^{j\,\frac{2\pi k n}{N}}$, pa je:

$$x[n] = X[0] + X[2] \, e^{j\,\frac{4\pi n}{10}} + X[-2] \, e^{-j\,\frac{4\pi n}{10}} + X[4] \, e^{j\,\frac{8\pi n}{10}} + X[-4] \, e^{-j\,\frac{8\pi n}{10}} =$$
$$= 1 + \left(e^{j\left(\frac{2\pi n}{5} + \frac{\pi}{6}\right)} + e^{-j\left(\frac{2\pi n}{5} + \frac{\pi}{6}\right)} \right) + 2\, \left(e^{j\left(\frac{4\pi n}{5} + \frac{\pi}{3}\right)} + e^{-j\left(\frac{4\pi n}{5} + \frac{\pi}{3}\right)} \right) =$$
$$= 1 + 2\, \cos\left(\frac{2\pi n}{5} + \frac{\pi}{6}\right) + 4\, \cos\left(\frac{4\pi n}{5} + \frac{\pi}{3}\right).$$

Zadatak 3.54.

Razviti na osnovnoj periodi signal $x[n] = \sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty} (4\,\delta[n-4m] + 8\,\delta[n-1-4m])$.

Rešenje:

Osnovni period signala je $N = 4$.

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \, e^{-j\,\frac{2\pi k n}{N}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} x[n] \, e^{-j\,\frac{2\pi k n}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} (4\,\delta[n] + 8\,\delta[n-1]) \, e^{-j\,\frac{\pi k n}{2}} = 1 + 2\, e^{-j\,\frac{\pi k}{2}}$$

Koeficijenti razvoja su: $X[0] = 1$, $X[1] = 1 - 2j$, $X[2] = -1$ i $X[3] = 1 + 2j$.

Zadatak 3.55.

Dat je periodični realni neparni diskretni signal $x[n]$ osnovnog perioda $N = 7$ čiji su koeficijenti razvoja u Furijeov red $X[k]$. Ako je $X[15] = j$, $X[16] = 2j$ i $X[17] = 3j$, odrediti $X[0]$, $X[-1]$, $X[-2]$ i $X[-3]$.

Rešenje:

Razvoj u Furijeov red je periodičan sa periodom N. Tako je $X[1] = X[15] = j$, $X[2] = X[16] = 2j$ i $X[3] = X[17] = 3j$. Kako je signal $x[n]$ realan i neparan, važi da je $X[0]$ i da je $X[-1] = -X[1] = -j$, $X[-2] = -X[2] = -2j$ i $X[-3] = -X[3] = -3j$.

Zadatak 3.56.

Date su dve periodične diskretne sekvence $x_1[n]$ i $x_2[n]$ čiji je osnovni period $N = 4$, a koeficijenti razvoja u Furijeov red $x_1[n] \overset{\mathcal{FR}}{\longleftrightarrow} \alpha_k$ i $x_2[n] \overset{\mathcal{FR}}{\longleftrightarrow} \beta_k$, pri čemu je:

$$\alpha_0 = \alpha_3 = \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\alpha_2}{2} = 1, \qquad \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1.$$

Koristeći osobine Furijeovih redova odrediti koeficijente razvoja u Furijeov red sekvence $g[n] = x_1[n]\, x_2[n]$.

Rešenje:

Proizvod dva signala odgovara konvoluciji Furijeovih redova datih signala. Neka je $g[n] \overset{\mathcal{FR}}{\longleftrightarrow} \gamma_k$.

$$\gamma_k = \sum_{q=\langle N \rangle} \alpha_q\, \beta_{k-q} = \sum_{q=0}^{3} \alpha_q\, \beta_{k-q} = \alpha_0\, \beta_k + \alpha_1\, \beta_{k-1} + \alpha_2\, \beta_{k-2} + \alpha_3\, \beta_{k-4} =$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6$$

Zadatak 3.57.

Data su sledeća tri diskretna signala čiji je osnovni period $N = 6$:

$$x[n] = 1 + \cos\left(\frac{2\pi n}{6}\right), \qquad y[n] = \sin\left(\frac{2\pi n}{6} + \frac{\pi}{4}\right), \qquad z[n] = x[n]\, y[n].$$

a) Odrediti razvoj u Furijeov red signala $x[n]$.
b) Odrediti razvoj u Furijeov red signala $y[n]$.
c) Odrediti razvoj u Furijeov red signala $z[n]$ koristeći rezultate iz tačaka a) i b).

Rešenje:

a) Kako je $x[n] = 1 + \dfrac{e^{j\frac{2\pi n}{6}} + e^{-j\frac{2\pi n}{6}}}{2}$, koeficijenti razvoja u red su: $X[0] = 1$ i $X[1] = X[-1] = \frac{1}{2}$.

a) Kako je $y[n] = \dfrac{e^{j\left(\frac{2\pi n}{6} + \frac{\pi}{4}\right)} - e^{-j\left(\frac{2\pi n}{6} + \frac{\pi}{4}\right)}}{2j}$, koeficijenti razvoja u red su: $Y[1] = Y^*[-1] = \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{2}$.

c) Kako je $z[n] = x[n]\, y[n] \overset{\mathcal{FR}}{\longleftrightarrow} Z[k] = \sum\limits_{q=-2}^{2} X[q]\, Y[k-q]$, računaju se koeficijenti razvoja u Furijeov red: $Z[0] = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}$, $Z[1] = Z^*[-1] = \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{2}$ i $Z[2] = Z^*[-2] = \frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{4}$.

Zadatak 3.58.

Dat je diskretni signal

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 7, \\ 0, & 8 \le n \le 9, \end{cases}$$

koji je periodičan sa periodom $N = 10$, a koeficijenti razvoja u Furijeov red su dati sa $X[k]$. Neka je signal $g[n] = x[n] - x[n-1]$.
a) Pokazati da je signal $g[n]$ periodičan sa periodom N.
b) Odrediti koeficijente razvoja signala $g[n]$ u Furijeov red.
c) Koristeći osobine Furijeovih redova i rezultata iz tačke b) odrediti $X[k]$ za $k \neq 0$.

Rešenje:

a) Signal $g[n]$ ima nenulte odbirke samo za $n = 0$ i $n = 8$ u toku jedne periode $N = 10$.

$$g[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\delta[n - 10m] - \delta[n - 8 - 10m])$$

b) Koeficijenti razvoja u Furijeov red su:

$$G[k] = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{9} (\delta[n] - \delta[n-8])\, e^{-j\,\frac{\pi k n}{5}} = \frac{1 - e^{-j\,\frac{8\pi k}{5}}}{10}.$$

c) Kako je $g[n] = x[n] - x[n-1]$, mora da važi $G[k] = X[k] - e^{-j\,\frac{2\pi k}{10}}\, X[k] = \left(1 - e^{-j\,\frac{\pi k}{5}}\right) X[k]$.

$$X[k] = \frac{1 - e^{-j\,\frac{8\pi k}{5}}}{10\left(1 - e^{-j\,\frac{\pi k}{5}}\right)}$$

4.5 Furijeova transformacija diskretnih signala

4.5.1 Osobine Furijeove transformacije

Original $x[n]$	**Slika** $X(j\Omega)$
$ax[n] + by[n]$	$aX(j\Omega) + bY(j\Omega)$
$x[n - n_0]$	$X(j\Omega)\,\mathrm{e}^{-j\Omega n_0}$
$x[n]\,\mathrm{e}^{j\Omega_0 n}$ $x[n]\ \sin(\Omega_0 n)$ $x[n]\ \cos(\Omega_0 n)$	$X(j(\Omega - \Omega_0))$ $\frac{j}{2}\left(X(j\,(\Omega + \Omega_0)) - X(j\,(\Omega - \Omega_0))\right)$ $\frac{1}{2}\left(X(j\,(\Omega + \Omega_0)) + X(j\,(\Omega - \Omega_0))\right)$
$x^*[n]$	$X^*(-j\Omega)$
$x[-n]$ $x[-n] = x[n],\ x[n] \in \mathbb{R}$ $x[-n] = -x[n],\ x[n] \in \mathbb{R}$	$X(-j\Omega)$ $X(j\Omega)$ $-X(j\Omega)$
$n\,x[n]$	$j\,\frac{d}{d\Omega}X(j\Omega)$
$x(t) * y(t)$	$X(j\Omega)\,Y(j\Omega)$
$x[n]\,y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\,X(j\Omega) \circledast Y(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} X(j(\Omega - \lambda))\,Y(j\lambda)\,d\lambda$
$x[n] - x[n-1]$	$\left(1 - e^{-j\Omega}\right)\ X(j\Omega)$
$\sum\limits_{m=-\infty}^{n} x[m]$	$\dfrac{X(j\Omega)}{1 - e^{-j\Omega}} + \dfrac{X(0)}{2}\,\mathrm{comb}\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)$
$x[n] \in \mathbb{R}$	$X(j\Omega) = X^*(-j\Omega)$ $\Re\left\{X(j\Omega)\right\} = \Re\left\{X(-j\Omega)\right\}$ $\Im\left\{X(j\Omega)\right\} = -\Im\left\{X(-j\Omega)\right\}$ $\lvert X(j\Omega)\rvert = \lvert X(-j\Omega)\rvert$ $\arg(X(j\Omega)) = -\arg(X(-j\Omega))$
Parsevalova teorema $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,v[n]$ $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n]$	 $\frac{1}{2\pi}\,X^*(j\Omega) \circledast V(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} X^*(j\Omega)\,V(j\Omega)\,d\Omega$ $\frac{1}{2\pi}\,X^*(j\Omega) \circledast X(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \lvert X(j\Omega)\rvert^2\,d\Omega$

4.5.2 Tablice Furijeove transformacije

$x[n]$	$X(j\Omega)$
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}$
$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta[n-p\,N]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$
1	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2k\pi)$
$\mathrm{sgn}[n]$	$\frac{2}{1-e^{-j\Omega}}$
$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2k\pi)$
$\cos(\Omega_0 n)$ $\cos(\Omega_0 n + \Theta)$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\delta(\Omega-\Omega_0-2l\pi) + \delta(\Omega+\Omega_0-2l\pi)]$ $\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [e^{j\Theta}\,\delta(\Omega-\Omega_0-2l\pi) + e^{-j\Theta}\,\delta(\Omega+\Omega_0-2l\pi)]$
$\sin(\Omega_0 n)$ $\sin(\Omega_0 n + \Theta)$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\delta(\Omega-\Omega_0-2l\pi) - \delta(\Omega+\Omega_0-2l\pi)]$ $\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [e^{j\Theta}\,\delta(\Omega-\Omega_0-2l\pi) - e^{-j\Theta}\,\delta(\Omega+\Omega_0-2l\pi)]$
$\mathrm{u}[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2k\pi)$
$a^n\,\mathrm{u}[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$
$(n+1)\,a^n\,\mathrm{u}[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{(1-e^{-j\Omega})^2}$
$\frac{(n+r-1)!}{n!\,(r-1)}\,a^n\,\mathrm{u}[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{(1-e^{-j\Omega})^r}$
$\mathrm{rect}_{N_1}[n]$	$\frac{\sin(\Omega(N_1+0.5))}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$
$\frac{\sin(W_1 n)}{\pi n} = \frac{W_1}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{W_1 n}{\pi}\right), \quad 0 < W_1 < \pi$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\Omega}{2W_1} - 2k\pi\right)$
$\left(1 - \frac{2\lvert n\rvert}{\tau}\right)\,\mathrm{rect}_\tau[n]$	$\frac{\tau}{2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\tau\Omega}{4\pi}\right)$
$\sum_{p=\langle N\rangle} a_p\, e^{jp\,\frac{2n\pi}{N}}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\,\delta\left(\Omega - \frac{2k\pi}{N}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{\lvert n\rvert}}$	$\sqrt{\frac{2\pi}{\lvert\Omega\rvert}}$

Zadatak 3.59.

Neka je dat diskretni signal $x[n]$ čija je Furijeova transformacija $X(j\Omega)$. Odrediti Furijeovu transformaciju signala $x_1[n] = x[1-n] + x[-1-n]$.

Rešenje:

Koristeći osobinu inverzije u vremenskom domenu imamo: $x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{FT}} X(-j\Omega)$.
Koristeći osobine pomeraja u vremenu se određuje:

$$x[-n+1] \xleftrightarrow{\mathcal{FT}} e^{-j\Omega}\, X(-j\Omega),$$

$$x[-n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{FT}} e^{j\Omega}\, X(-j\Omega).$$

$$x_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{FT}} X_1(j\Omega) = e^{-j\Omega}\, X(-j\Omega) + e^{j\Omega}\, X(-j\Omega) = 2\,\cos(\Omega)\, X(-j\Omega)$$

Zadatak 3.60.

Ako se neki diskretni linearni vremenski nepromenljivi sistem čiji je impulsni odziv $h[n] = 2^{-n}\,\mathrm{u}[n]$ pobudi signalom $x[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n \mathrm{u}[n]$, primenom Furijeove transformacije diskretnog signala odrediti odziv sistema u vremenskom i frekvencijskom domenu.

Rešenje:

Izvešćemo oblik Furijeove transformacije diskretnog signala $z[n] = a^n\,\mathrm{u}[n]$, pri čemu je $|a| < 1$. Furijeova transformacija je:

$$Z(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n\,\mathrm{u}[n]\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a\, e^{-j\Omega}\right)^n = \frac{1}{1-(a\, e^{-j\Omega})}$$

jer je $\left|a\, e^{-j\Omega}\right| = |a|\,\left|e^{-j\Omega}\right| = |a| < 1$.

Primenom prethodne formule je $X(j\Omega) = \dfrac{1}{1-\frac{3}{4}\, e^{-j\Omega}}$ i $H(j\Omega) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}\, e^{-j\Omega}}$. Odziv sistema u frekvencijskom domenu je $Y(j\Omega) = X(j\Omega)\, H(j\Omega) = \dfrac{1}{1-\frac{3}{4}\, e^{-j\Omega}}\,\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}\, e^{-j\Omega}} = \dfrac{3}{1-\frac{3}{4}\, e^{-j\Omega}} - \dfrac{2}{1-\frac{1}{2}\, e^{-j\Omega}}$.
Odnosno u vremenskom domenu je:

$$y[n] = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n \mathrm{u}[n] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{u}[n].$$

Zadatak 3.61.

Linearni diskretni sistem čiji je impulsni odziv $h_1[n] = 3^{-n}\,\mathrm{u}[n]$ vezan je paralelno sa drugim linearnim diskretnim sistemom čiji je impulsni odziv $h_2[n]$. Odrediti $h_2[n]$ ako je frekvencijska karakteristika kompletnog sistema:

$$H(j\Omega) = \frac{-12 + 5\, e^{-j\Omega}}{12 - 7\, e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega}}.$$

Rešenje:

Furijeova transformacija sistema $h_1[n]$ je prema zadatku 3.60 jednaka: $H_1(j\Omega) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}\,e^{-j\Omega}}$. Paralelnom vezom sistema se dobija sistem $h[n] = h_1[n] + h_2[n]$, odnosno u Furijeovom domenu $H(j\Omega) = H_1(j\Omega) + H_2(j\Omega)$. Računa se:

$$H_2(j\Omega) = H(j\Omega) - H_1(j\Omega) = \frac{-12+5\,e^{-j\Omega}}{12-7\,e^{-j\Omega}+e^{-2j\Omega}} + \frac{3}{e^{-j\Omega}-3} = \frac{8\,\left(e^{-j\Omega}-3\right)}{\left(e^{-j\Omega}-3\right)\,\left(e^{-j\Omega}-4\right)} = -\frac{2}{1-\frac{1}{4}\,e^{-j\Omega}},$$

odnosno $h[n] = -2\,\left(\frac{1}{4}\right)^n\,\mathrm{u}[n]$.

Zadatak 3.62.

Koristeći konvoluciju u vremenskom domenu i teoreme Furijeove transformacije diskretnog signala odrediti inverznu Furijeovu transformaciju signala $X(j\Omega) = \left(1 - a\,e^{-j\Omega}\right)^{-2}$ za $|a| < 1$.

Rešenje:

Konvolucija dva signala u vremenskom domenu odgovara proizvodu u Furijeovom domenu:

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{FT}} X_1(j\Omega)\,X_2(j\Omega).$$

Na osnovu zadatka 3.60 je poznato da je za signal $x_1[n] = a^n\,\mathrm{u}[n]$, Furijeova transformacija jednaka $X_1(j\Omega) = \left(1 - a\,e^{-j\Omega}\right)^{-1}$. Tako se može napisati da je $X(j\Omega) = X_1(j\Omega)\,X_1(j\Omega)$, odnosno u vremenskom domenu važi da je: $x[n] = x_1[n] * x_1[n]$.

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a^m\,\mathrm{u}[m]\,a^{n-m}\,\mathrm{u}[n-m] = a^n\,\mathrm{u}[n]\sum_{m=0}^{n} 1 = (n+1)\,a^n\,\mathrm{u}[n]$$

Zadatak 3.63.

Dat je linearni vremenski nepromenljivi diskretni sistem koji ima impulsni odziv $h[n]$ i frekvencijsku karakteristiku $H(j\Omega)$. Poznato je da sistem pobuđen ulaznim signalom $x[n] = \cos(n\Omega_0)$ kao odziv daje signal $y[n] = |\Omega_0|\,\cos(n\Omega_0)$ u celom osnovnom opsegu učestanosti $-\pi \le \Omega_0 \le \pi$. Odrediti $H(j\Omega)$ i impulsni odziv sistema $h[n]$.

Rešenje:

Vidi se da je $x[n] = \cos(n\Omega_0) = \frac{1}{2}\,\left(e^{jn\Omega_0} + e^{-jn\Omega_0}\right)$ i $y[n] = \frac{|\Omega_0|}{2}\,\left(e^{jn\Omega_0} + e^{-jn\Omega_0}\right)$, pa je očigledno:

$$H(j\Omega) = |\Omega|.$$

Inverznom Furijeovom transformacijom se dobija impulsni odziv.

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(j\Omega)\,e^{j\Omega n}\,d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -\Omega\,e^{j\Omega n}\,d\Omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \Omega\,e^{j\Omega n}\,d\Omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \Omega\,\cos(n\Omega)\,d\Omega = \frac{\cos(n\pi)-1}{n^2\,\pi}$$

4.6 Filtri

Zadatak 3.64.

Posmatrajmo sistem sa sledećom frekvencijskom karakteristikom:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 100, \\ 0, & |\omega| > 100. \end{cases}$$

Ulazni signal u ovaj sistem je periodični signal $x(t)$ čiji je osnovni period $T_0 = \frac{\pi}{6}$, a čiji su koeficijenti razvoja u Furijeov red $X[k]$. Ispitivanjem izlaznog signala je nađeno da je uvek $y(t) = x(t)$. Odrediti opseg indeksa k u kome može biti $X[k] \neq 0$.

Rešenje:

Sistem opisan frekvencijskom karakteristikom $H(j\omega)$ predstavlja idealni filtar propusnik niskih učestanosti. Da bi $Y(j\omega) = X(j\omega)$ kao u uslovu zadatka, potrebno je da u sprektru signala $x(t)$ ne postoji nijedna komponenta čija je učestanost veća od $\omega_c = 100\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Znači da je potrebno da važi $|k\omega_0| < \omega_c$. Kako je $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 12\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, onda mora da važi $|12\,k| < 100$, odnosno za $k \in \mathbb{Z}$ je $|k| \leq 8$.

Zadatak 3.65.

Idealni kontinualni sistem propusnik visokih učestanosti ima frekvencijsku karakteristiku:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \geq \omega_c, \\ 0, & |\omega| < \omega_c. \end{cases}$$

a) Odrediti impulsni odziv ovog sistema.
b) Šta se dešava sa impulsnim odzivom kada se menja granična učestanost ω_c?

Rešenje:

a) Vidi se da je $H(j\omega) = 1 - H_{NF}(j\omega)$, gde je:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c, \\ 0, & |\omega| > \omega_c, \end{cases}$$

i predstavlja propusnik niskih učestanosti. Na osnovu osobine linearnosti je: $h(t) = \delta(t) - h_{NF}(t)$, gde je na osnovu Furijeovih transformacija:

$$h_{NF}(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}.$$

$$h(t) = \delta(t) - \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

b) Kada ω_c raste, prigušeni deo impulsnog odziva se komprimuje, a njegova amplituda raste. Zato impulsni odziv postaje više koncentrisan oko koordinatnog početka. U graničnom slučaju je $\lim\limits_{\omega_c \to \infty} h(t) = 0$.

Kada ω_c opada, prigušeni sinusoidalni deo se širi, a njegova amplituda opada, pa je u graničnom slučaju $\lim\limits_{\omega_c \to 0} h(t) = \delta(t)$.

Zadatak 3.66.

Frekvencijska karakteristika linearnog kontinualnog sistema propusnika opsega učestanosti data je izrazom:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_c \le |\omega| \le 3\omega_c, \\ 0, & \text{drugde.} \end{cases}$$

Pokazati da impulsni odziv ovog sistema $h(t)$ ima oblik $h(t) = \left(\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}\right) g(t)$. Odrediti $g(t)$.

Rešenje:

Frekvencijska karakteristika sistema se može izraziti preko $H_{NF}(j\omega)$ definisanog kao u zadatku 3.65 kao: $H(j\omega) = H_{NF}(j\,(\omega - 2\omega_c)) + H_{NF}(j\,(\omega + 2\omega_c))$. Primenom inverzne Furijeove transformacije se dobija:

$$h(t) = h_{NF}(t)\, e^{j\,2\omega_c t} + h_{NF}(t)\, e^{-j\,2\omega_c t} = 2\, h_{NF}(t)\, \cos(2\omega_c t) = 2\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}\, \cos(2\omega_c t).$$

Vidi se da je $g(t) = 2\, \cos(2\omega_c t)$.

Zadatak 3.67.

Funkcija prenosa nekog linearnog vremenski nepromenljivog sistema je data izrazom:

$$H(j\omega) = \begin{cases} \frac{j\omega}{3\pi}, & |\omega| \le 3\pi, \\ 0, & \text{drugde.} \end{cases}$$

Odrediti odziv ovog sistema na pobude $x_1(t) = \cos(2\pi t + \theta)$ i $x_2(t) = \cos(4\pi t + \theta)$.

Rešenje:

Furijeova transformacija izlaznog signala je:

$$H(j\omega) = \begin{cases} \frac{j\omega}{3\pi}\, X(j\omega), & |\omega| \le 3\pi, \\ 0, & |\omega| > 3\pi. \end{cases}$$

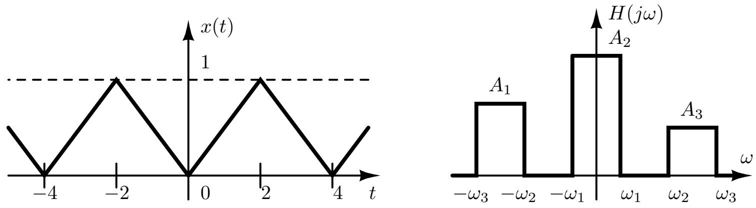
Pošto je $X_1(j\omega) = e^{j\theta}\, \pi\, \delta(\omega - 2\pi) + e^{-j\theta}\, \pi\, \delta(\omega + 2\pi)$, spektar signala $x_1(t)$ leži unutar opsega $|\omega| \le 3\pi$. Na osnovu Furijeove transformacije izvoda sledi da je: $y(t) = \frac{1}{3\pi}\, \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{2}{3}\, \sin(2\pi t + \theta)$.

Pošto je za $x_2(t)$ spektar signala izvan opsega $-3\pi \le \omega \le 3\pi$, onda je $Y(j\omega) = 0$, pa je i $y(t) = 0$.

Zadatak 3.68.

Signal $x(t)$, prikazan na slici 3.68.1 levo, a čiji su koeficijenti razvoja u Furijeov red:

$$X[k] = \begin{cases} 2\, \dfrac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{j\,(k\pi)^2}\, e^{-j\,\frac{k\pi}{2}}, & k \ne 0, \\ \dfrac{1}{2}, & k = 0, \end{cases}$$



Slika 3.68.1.

se propušta kroz sistem sa frekvencijskom karakteristikom $H(j\omega)$, prikazanom na slici 3.68.1 desno, i generiše odziv $y(t) = 1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Odrediti nepoznate vrednosti A_i i ω_i, za $i \in \{1, 2, 3\}$, ako se zna da granične učestanosti ω_i leže na sredini učestanosti harmonika signala $x(t)$.

Rešenje:

Na osnovu grafičkog prikaza ulaznog signala se vidi da je njegov osnovni period $T_0 = 4$, a njegova osnovna učetsnost $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{2}$. Iz jednačine za izlazni signal se vidi da on ima samo jednosmernu komponentu i jednu sinusoidalnu komponentu na učestanosti $3\,\frac{\pi}{2} = 3\omega_0$. Izraz za izlazni signal se može napisati u obliku:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{j\,\frac{3\pi}{2}} + e^{-j\,\frac{3\pi}{2}}}{2} = 1 - \frac{e^{j\,3\omega_0} + e^{-j\,3\omega_0}}{2},$$

pa je njegov razvoj u Furijeov red: $Y[0] = 1$, $Y[\pm 3] = -\frac{1}{2}$.

Kako se signal $x(t)$ propušta kroz linearni sistem, onda važi da je $Y[k] = Y[k]\,H(jk\omega_0)$. Zato je:

$$H(0) = \frac{Y[0]}{X[0]} = 2 = A_2,$$

$$H(j3\omega_0) = \frac{Y[3]}{X[3]} = \frac{9\,\pi^2}{4} = A_3,$$

$$H(-j3\omega_0) = \frac{Y[-3]}{X[-3]} = \frac{9\,\pi^2}{4} = A_1.$$

Funkcija prenosa sistema mora da bude takva da ne propušta druge frekvencijske komponente ulaznog signala, odnosno $H(jk\omega_0) = 0$ za $k \neq 0$ i $k \neq \pm 3$. Pošto graničen učestanosti prema uslovu zadatka leže na sredini između učestanosti harmonika signala $x(t)$, njihov položaj je određen relacijom $\omega_i = \frac{2k+1}{2}\,\omega_0 = \frac{(2k+1)\,\pi}{4}$. Kako treba zadržati samo jednosmernu komponentu i treći harmonik, imamo:

$$\omega_1 = \tfrac{\pi}{4},$$

$$\omega_2 = \tfrac{5\pi}{4},$$

$$\omega_3 = \tfrac{7\pi}{4}.$$

4.7 Diskretizacija kontinualnih signala

Zadatak 3.69.

Signal $y(t)$ je dobijen množenjem dva signala ograničenog spektra $x_1(t)$ i $x_2(t)$, $y(t) = x_1(t)\,x_2(t)$. Važi da je:

$$X_1(j\omega) = 0, \qquad |\omega| > \omega_1,$$

$$X_2(j\omega) = 0, \qquad |\omega| > \omega_2.$$

Zatim je izvršena diskretizacija signala $y(t)$ po vremenu korišćenjem idealnog impulsnog odabiranja. Odrediti opseg vrednosti periode odabiranja za koji se dobija korektna rekonstrukcija signala $y(t)$ iz njegovih odbiraka.

Rešenje:

Furijeova transformacija proizvoda dva signala je $Y(j\omega) = X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$, pa je $Y(j\omega) = 0$ za $|\omega| > \omega_1 + \omega_2$.

Minimalna učestanost odabiranja mora biti dva puta veća od maksimalne učestanosti u spektru signala, odnosno: $\omega_{s\,\mathrm{min}} = 2\,(\omega_1 + \omega_2)$, pa je maksimalna vrednost periode odabiranja za koju se dobija korektna rekonstrukcija signala $y(t)$ iz njegovih odbiraka:

$$T_{s\,\mathrm{max}} = \frac{2\pi}{\omega_{s\,\mathrm{min}}} = \frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Zadatak 3.70.

Signal $y(t)$ je dobijen konvolucijom dva signala ograničenog spektra $x_1(t)$ i $x_2(t)$, $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$. Važi da je:

$$X_1(j\omega) = 0, \qquad |\omega| > 1000\pi,$$

$$X_2(j\omega) = 0, \qquad |\omega| > 2000\pi.$$

Zatim je izvršena diskretizacija signala $y(t)$ po vremenu korišćenjem idealnog impulsnog odabiranja. Odrediti opseg vrednosti periode odabiranja za koji se dobija korektna rekonstrukcija signala $y(t)$ iz njegovih odbiraka.

Rešenje:

Furijeova transformacija konvolucije dva signala je $Y(j\omega) = X_1(j\omega)\,X_2(j\omega)$, pa je $Y(j\omega) = 0$ za $|\omega| > 1000\pi$.

Minimalna učestanost odabiranja mora biti dva puta veća od maksimalne učestanosti u spektru signala, odnosno: $\omega_{s\,\mathrm{min}} = 2000\pi$, pa je maksimalna vrednost periode odabiranja za koju se dobija korektna rekonstrukcija signala $y(t)$ iz njegovih odbiraka:

$$T_{s\,\mathrm{max}} = \frac{2\pi}{\omega_{s\,\mathrm{min}}} = 1 \text{ ms}.$$

Zadatak 3.71.

Odrediti minimalne potrebne učestanosti odabiranja (Nikvistove brzine) za signale

$$x(t) = \frac{\sin(5000\pi t)}{\pi t}, \qquad g(t) = \left(\frac{\sin(5000\pi t)}{\pi t}\right)^2.$$

Rešenje:

Signal $x(t) = a\,\frac{\sin(a\pi t)}{a\pi t} = a\ \mathrm{sinc}(at)$, gde je $a = 5000$. Primenom Furijeove transfromacije se dobija da je $X(j\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2a\pi}\right)$, pa se vidi da je spektar signala ograničen u opsegu kružnih učestanosti $|\omega| < a\pi = 5000\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Minimalna učestanost odabiranja ovog signala je $\omega_{\mathrm{min}} = 10000\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$.

Na isti način je $g(t) = a^2\left(\frac{\sin(a\pi t)}{a\pi t}\right)^2 = a^2\ \mathrm{sinc}^2(at)$. Furijeova transformacija ovog signala je trougaoni signal: $G(j\omega) = a\ \mathrm{tri}\left(\frac{\omega}{2a\pi}\right)$, pa je $|\omega| < 2a\pi = 10000\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Minimalna učestanost odabiranja ovog signala je $\omega_{\mathrm{min}} = 20000\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$.

Zadatak 3.72.

Posmatrajmo dva kontinualna signala: $x_1(t) = e^{-t^2}$ i $x_2(t) = e^{-t^2} + \sin(8\pi t)$. Izvršiti diskretizaciju po vremenu (odabiranje) ova dva signala sa učestanošću odabiranja $f_s = 8$ Hz na intervalu -1 s $< t < 1$ s.
a) U kakvom su odnosu odbirci ova dva signala?
b) Objasniti zašto postoji takav odnos.

Rešenje:

a) Imamo da je $x_1[n] = x_1(nT_s) = e^{-n^2 T_s^2} = e^{-\frac{n^2}{8^2}}$.

$$x_2[n] = x_2(nT_s) = e^{-n^2 T_s^2} + \sin(8n\pi\, T_s) = e^{-\frac{n^2}{8^2}}$$

Vidi se da su odbirci ova dva signala isti.
b) Za sinusni deo signala $x_2(t)$ nije zadovoljena teorema odabiranja, pa rezultat odabiranja nije korektan.

Zadatak 3.73.

Furijeova transformacija diskretnog signala $x[n]$ data kao $X\left(e^{j\Omega}\right)$ je jednaka nuli u intervalu $\frac{3\pi}{4} \leq |\Omega| \leq \pi$. Iz ovog signala je rekonstruisan kontinualni signal:

$$x(t) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\left(t - nT\right)\right)}{\pi\left(t - nT\right)}, \quad T = 10^{-3} \text{ s.}$$

Odrediti vrednosti granične učestanosti ω_c iznad koje će Furijeova transfromacija kontinualnog signala $X(j\omega)$ biti jednaka nuli.

Rešenje:

Na osnovu zadatka 3.65 je funkcija prenosa idealnog filtra propusnika niskih učestanosti:

$$h_{NF}(t) = \frac{\sin(\omega_s t)}{\pi t}.$$

Vidi se da je prema tome signal $x(t)$ rekonstruisan korišćenjem niskofrekventnog filtra čija je granična učestanost jednaka $\omega_s = \frac{\pi}{T} = 1000\pi \,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Između digitalne i analogne učestanosti postoji veza $\Omega = \omega\, T$. Granična učestanost kontinualnog signala iznad koje će spektar biti jednak nuli je onda $\omega_c = \frac{3\pi}{4T} = 750\pi \,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Glava 5

Laplasova transformacija

5.1 Laplasova transformacija – osnovne definicije i teoreme

5.1.1 Tablice Laplasove transformacije

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1
$\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{1}{s}$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}$
$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$	$s^{-\frac{3}{2}}$
$\dfrac{t^n}{n!}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$	$\dfrac{1}{s^{n+1}}$
$\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{1}{s+a}$
$\dfrac{t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-at}}{(n-1)!}\,\mathrm{u}(t), \quad n = 1, 2, 3, \cdots$	$\dfrac{1}{(s+a)^n}$
$\cos(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$
$\sinh(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$\dfrac{t}{2\omega}\,\sin(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\dfrac{\sin(\omega t) - \omega t\,\cos(\omega t)}{2\omega}\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

5.1.2 Osnovne teoreme i osobine Laplasove transformacije

	Operacija	$f(t)$	$F(s)$
1	Aditivnost	$f_1(t) + f_2(t)$	$F_1(s) + F_2(s)$
2	Množenje skalarom	$a\,f(t)$	$a\,F(s)$
3	Diferenciranje	$\frac{d}{dt}f(t)$	$s\,F(s) - f(0^+)$
4		$\frac{d^2}{dt^2}f(t)$	$s^2\,F(s) - s\,f(0^+) - f'(0^+)$
5		$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	$s^n\,F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\,f^{(k)}(0^+)$
6	Integracija	$\int_{0^-}^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}\,F(s)$
7		$\int_{-\infty}^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}\,F(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} f(\tau)\,d\tau$
8	Kašnjenje	$f(t - t_0)$	$F(s)\,\mathrm{e}^{-st_0}$
9	Kašnjenje u kompleksnom domenu	$f(t)\,\mathrm{e}^{-s_0 t}$	$F(s - s_0)$
10	Diferenciranje u kompleksnom domenu	$t^n\,f(t)$	$(-1)^n\,F^{(n)}(s)$
11	Integracija u kompleksnom domenu	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{+\infty} F(z)\,dz$
12	Skaliranje	$f(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a}\,F\left(\frac{s}{a}\right)$
13	Konvolucija u vremenskom domenu	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s)\,F_2(s)$
14	Konvolucija u kompleksnom domenu	$f_1(t)\,f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j}\,F_1(s) * F_2(s)$
15	Slika periodične funkcije	$f(t + a) = f(t)$	$\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-as}}\int_0^a f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt$
16		$f(t + a) = -f(t)$	$\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-as}}\int_0^a f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt$

5.1.3 Osnovne definicije i teoreme konturne integracije funkcije kompleksne promenljive

Definicija 1
Pod okolinom tačke z_0 u kompleksnoj ravni podrazumeva se skup tačaka z za koje je $|z - z_0| < \epsilon$, gde je ϵ data pozitivna konstanta koja se naziva poluprečnik ove okoline.

Definicija 2
Neprekidna kriva $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, naziva se prosta ili Jordanova kriva ako za svako t_1 i t_2 koji $t_1, t_2 \in [a, b]$, važi $t_1 \neq t_2 \Leftrightarrow z(t_1) \neq z(t_2)$. Ako je pri tom $a = b$, kaže se da je zatvorena Jordanova kriva. Ako je Jordanova kriva glatka, ili deo po deo glatka, onda se ona naziva kontura ili putanja.

Definicija 3
Ako se integracija po konturi Γ obavlja kretanjem u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku, tada se konturni integral zapisuje kao $\oint_{\Gamma+} f(z)\, dz$ ili samo kao $\oint_{\Gamma} f(z)\, dz$.

Definicija 4
Oblast $\mathbf{G}$ je jednostruko povezana u konačnom delu z ravni ako za svaku zatvorenu Jordanovu krivu $\Gamma \subset \mathbf{G}$ važi da je $\text{int}\Gamma \subset \mathbf{G}$, odnosno da Γ obuhvata samo tačke iz $\mathbf{G}$. U suprotnom je oblast višestruko povezana.

Definicija 5
Neka je f funkcija kompleksne promenljive z definisana i diferencijabilna u svakoj tački oblasti $\mathbf{G}$ osim u konačno mnogo tačaka.

- Za funkciju f se da je analitička funkcija u oblasti $\mathbf{G}$.
- Tačke u kojima funkcija nije analitička nazivaju se singularne tačke ili singulariteti funkcije f.
- Ako analitička funkcija f ima izvod u svakoj tački oblasti $\mathbf{G}$, kaže se da je funkcija regularna ili holomorfna u oblasti $\mathbf{G}$.
- Za funkciju se kaže da je analitička ili regularna u tački a ako je analitička ili regularna u nekoj okolini tačke a.

Definicija 6
Neka je a singularitet analitičke funkcije f. Razlikuju se tri slučaja: Ako je $\lim_{z\to a} f(z) = C$, gde je C konstanta, za tačku a se kaže da je prividni, otklonjiv singularitet funkcije f. Ako je $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, tačka a se zove pol funkcije f. Ako ne $\lim_{z\to a} f(z)$ postoji, tačka a se naziva esencijalni singularitet funkcije f.

Definicija 7
Neka je f funkcija kompleksne promenljive z, $f(z) = u(x, y) + j\, v(x, y)$, $z = x + j\, y$.

Ako je u oblasti $\mathbf{G}$ ispunjeno

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

kaže se da funkcija f u oblasti $\mathbf{G}$ ispunjava Koši-Rimanove uslove.

Teorema 1: Koši-Rimanovi uslovi
Funkcija f je diferencijabilna u tački $z = x + j\, y$ ako i samo ako su parcijalni izvodi u_x, u_y, v_x i v_y neprekidni u tački (x, y) i u toj tački važe Koši-Rimanovi uslovi.

Teorema 2: Košijeva integralna teorema
Neka je f funkcija kompleksne promenljive z regularna u jednostruko povezanoj oblasti $\mathbf{G}$ i ako je njen prvi izvod neprekidan u $\mathbf{G}$, tada je:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz = 0,$$

gde je $\Gamma \subset \mathbf{G}$ zatvorena kontura.

Teorema 3: Košijeva integralna formula
Neka je $a \in \mathrm{int}\Gamma$ gde je $\Gamma \subset \mathbf{G}$ zatvorena kontura, a $\mathbf{G}$ jednostruko povezana oblast u konačnom delu z ravni i neka je f analitička funkcija u oblasti $\mathbf{G}$. Tada važe formule:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a),$$

$$\frac{n!}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = \frac{d^n}{dz^n}f(z)\bigg|_{z=a}.$$

Definicja 8
Neka je funkcija f analitička u jednostruko povezanoj oblasti $\mathbf{G}$ i neka je $a \in \mathrm{int}\Gamma$ gde je $\Gamma \subset \mathbf{G}$ zatvorena kontura. Ostatak funkcije u tački a se definiše kao

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma f(z)\,dz.$$

Pri tome tačka a može biti jedini pol ili esencijalni singularitet u oblasti $\mathbf{G}$.

Teorema 4
Ako je tačka a regularna tačka ili prividni singularitet funkcije f, tada je $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = 0$.

Teorema 5
Neka je a pol k–tog reda analitičke funkcije f. Tada se ostatak funkcije u tački a može izračunati kao

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\Big((z-a)^k f(z)\Big).$$

Teorema 6
Neka je f analitička funkcija u oblasti $\mathbf{G}$ koja je ograničena konturom Γ. Neka su a_1, a_2, ..., a_n svi singulariteti funkcije f i nalaze se u unutrašnjosti oblasti Γ. Tada je ispunjeno:

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z).$$

Teorema 7: Razvoj racionalne funkcije u parcijalne razlomke
Neka je $R(s)$ racionalna funkcija kompleksne promenljive s u oblasti $\mathbf{G}$, sa polovima $\omega_{pk} \in \mathbf{G}$, $k = 1, 2, \cdots, n$, za koju važi $R(s) \to 0$ kada $s \to \infty$.Tada se $R(s)$ može napisati kao

$$R(s) = \sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=\omega_{pk}}\frac{R(z)}{s-z}.$$

Dokaz:
Neka je $\mathrm{int}\,\Gamma$, $\Gamma \subset \mathbf{G}$ oblast koja sadrži sve plove funkcije $R(s)$. Tada je funkcija $R(s)$ u oblasti $\mathrm{ext}\,\Gamma$ regularna tako da važi:

$$R(s) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma-}\frac{R(z)}{z-s}\,dz = -\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma+}\frac{R(z)}{z-s}\,dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma+}\frac{R(z)}{s-z}\,dz = \sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=\omega_{pk}}\frac{R(z)}{s-z}.$$

Teorema 8
Neka je ω_p prost pol racionalne funkcije $R(s)$ za koju važi $|R(s)| \to 0$ ako $s \to \infty$. Ostatak u tom polu definiše parcijalni razlomak R_{ω_p} koji odgovara tom polu:

$$R_{\omega_p} = \frac{A}{s-\omega_p}, \qquad A = \lim_{s\to\omega_p}(s-\omega_p)\,R(s).$$

Dokaz:
Dokaz sleduje neposredno iz teoreme 7.

Teorema 9
Neka je ω_p pol reda n racionalne funkcije $R(s)$ za koju važi $|R(s)| \to 0$ ako $s \to \infty$. Ostatak u tom polu definiše n parcijalnih razlomaka $R_{\omega_p 1}$, $R_{\omega_p 2}$, ..., $R_{\omega_p n}$ koji odgovaraju tom polu:

$$R_{\omega_p m} = \frac{A_m}{(s-\omega_p)^m}, \qquad A_m = \frac{1}{(n-m)!} \lim_{s \to \omega_p} \frac{d^{n-m}}{ds^{n-m}} \left((s-\omega_p)^n R(s)\right).$$

Dokaz:
Na osnovu teoreme 7 važi:

$$\operatorname*{Res}_{z=\omega_p} \frac{R(z)}{s-z} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to \omega_p} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{(z-\omega_p)^n R(z)}{s-z} \right).$$

Pošto je na osnovu Lajbnicove formule za n–ti izvod proizvoda dve funkcije:

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\left(\frac{1}{s-z}\right) \left((z-\omega_p)^n R(z)\right) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{s-z}\right)^{(k)} \left((z-\omega_p)^n R(z)\right)^{(n-1-k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{k!}{(s-z)^{k+1}} \left((z-\omega_p)^n R(z)\right)^{(n-1-k)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} \frac{1}{(s-z)^{k+1}} \left((z-\omega_p)^n R(z)\right)^{(n-1-k)}$$

dobija se da je:

$$\operatorname*{Res}_{z=\omega_p} \frac{R(z)}{s-z} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(s-\omega_p)^{k+1}} \frac{1}{(n-1-k)!} \lim_{z \to \omega_p} \left((z-\omega_p)^n R(z)\right)^{(n-1-k)} =$$

$$\underbrace{\frac{1}{s-\omega_p} \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to \omega_p} \left((z-\omega_p)^n R(z)\right)^{(n-1)}}_{R_{\omega_p 1}} + \underbrace{\frac{1}{(s-\omega_p)^2} \frac{1}{(n-2)!} \lim_{z \to \omega_p} \left((z-\omega_p)^n R(z)\right)^{(n-2)}}_{R_{\omega_p 2}} + \cdots$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{(s-\omega_p)^m} \frac{1}{(n-m)!} \lim_{z \to \omega_p} \left((z-\omega_p)^n R(z)\right)^{(n-m)}}_{R_{\omega_p m}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{(s-\omega_p)^n} \lim_{z \to \omega_p} (z-\omega_p)^n R(z)}_{R_{\omega_p n}}.$$

Teorema 10
Neka je $H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ prenosna funkcija koja ima par konjugovano-kompleksnih polova prvog reda $\omega_p = \alpha + j\,\beta$ i $\omega_p^* = \alpha - j\,\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Njima odgovara parcijalni razlomak oblika:

$$R_{\omega_p}(s) = \frac{As+B}{(s-\alpha)^2 + \beta^2},$$

gde se konstante A i B računaju na osnovu formule

$$A = \Im\{Q\}, \quad \frac{\alpha A + B}{\beta} = \Re\{Q\},$$

$$Q = \frac{1}{\beta} \lim_{s \to \omega_p} \left((s-\alpha)^2 + \beta^2\right) H(s).$$

Pri tome je

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{R_{\omega_p}(s)\right\} = \mathrm{e}^{\alpha t} \left(A \cos(\beta t) + \frac{\alpha A + B}{\beta} \sin(\beta t) \right) \mathrm{u}(t).$$

Dokaz:
Direktna primena Teoreme 9 na par konjugovano-kompleksnih polova daje traženi dokaz.

Teorema 11
Neka je $H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ prenosna funkcija koja ima samo proste polove. Tada važi

$$\operatorname*{Res}_{s=\omega_p} \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(\omega_p)}{Q'(\omega_p)}.$$

Dokaz:
Pošto se $Q(s)$ može napisati kao

$$Q(s) = (s - \omega_p)\, Q_1(s).$$

Ako se diferencira leva i desna strana dobija se

$$Q'(s) = Q_1(s) + (s - \omega_p)\, Q_1'(s).$$

Ako se pusti da $s \to \omega_p$, dobija se

$$Q'(\omega_p) = Q_1(\omega_p).$$

Na osnovu toga je

$$\operatorname*{Res}_{s=\omega_p} \frac{P(s)}{Q(s)} = \lim_{s\to\omega_p} \frac{(s-\omega_p)\, P(s)}{Q(s)} = \lim_{s\to\omega_p} \frac{P(s)}{Q_1(s)} = \frac{P(\omega_p)}{Q'(\omega_p)}.$$

Teorema 12: Računanje inverzne Laplasove transformacije
Neka je $X(s)$ racionalna funkcija kompleksne promenljive s za koji važi

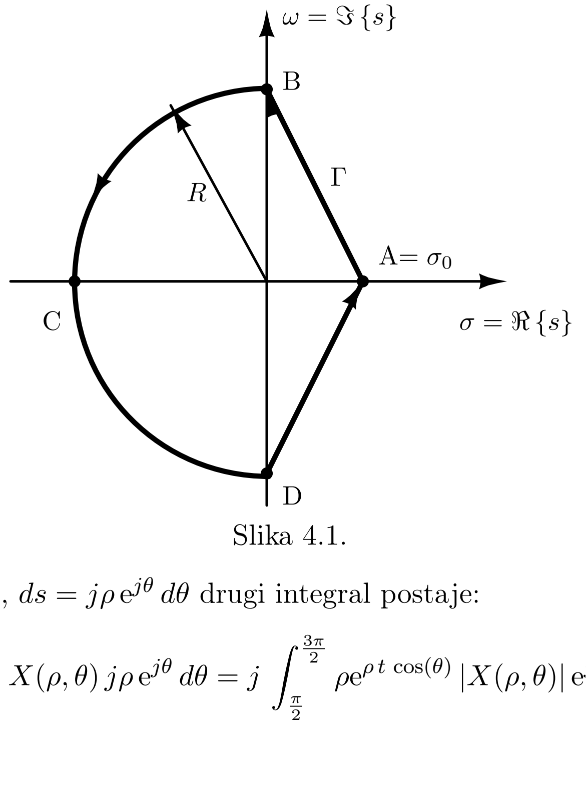
$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad \lim_{|s|\to\infty} |X(s)| = 0,$$

i neka su svi polovi funkcije $X(s)$ sa leve strane prave $s = \sigma_0$, $\sigma_0 \in \mathbb{R}$. Tada je za $t > 0$ ispunjeno:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \mathrm{e}^{st}\, X(s)\, ds = \sum_{v=1}^{n} \operatorname*{Res}_{s=\omega_{pv}} \mathrm{e}^{st}\, X(s) = \sum_{v=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \lim_{s\to\omega_{pv}} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \Big((s-\omega_p)^k\, \mathrm{e}^{st}\, X(s) \Big).$$

Dokaz:
Neka je dat integral I po konturi Γ kao na slici 4.1:

$$I = \oint_{\Gamma+} \mathrm{e}^{st}\, X(s)\, ds = \int_{DAB} \mathrm{e}^{st}\, X(s)\, ds + \int_{BCD} \mathrm{e}^{st}\, X(s)\, ds = I_1 + I_2.$$



Slika 4.1.

Uvodeći smenu $s = \rho\, \mathrm{e}^{j\theta}$, $ds = j\rho\, \mathrm{e}^{j\theta}\, d\theta$ drugi integral postaje:

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \mathrm{e}^{\rho\, t\, (\cos(\theta) + j\, \sin(\theta))}\, X(\rho,\theta)\, j\rho\, \mathrm{e}^{j\theta}\, d\theta = j \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \rho \mathrm{e}^{\rho\, t\, \cos(\theta)}\, |X(\rho,\theta)|\, \mathrm{e}^{j\, (\arg\{X(\rho,\theta)\} + t\, \rho\, \sin(\theta) + \theta)}\, d\theta.$$

Kada $R \to \infty$, onda $|s| = \rho \to \infty$. Kako je za $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ vrednost $\cos(\theta) < 0$, onda funkcija $\rho \mathrm{e}^{\rho\, t \, \cos(\theta)} \to 0$, pa je i $I_2 = 0$.

Integral I_1 za $R \to \infty$ postaje $\lim\limits_{R\to\infty} I_1 = \displaystyle\int_{\sigma_0 - j\,\infty}^{\sigma_0 + j\,\infty} \mathrm{e}^{st}\, X(s)\, ds$, jer ugao $\measuredangle DAC \to 180^\circ$ za $R \to \infty$. Zato je kontura DAB prava $s = \sigma_0$.

Napomena: Uslov $\lim\limits_{|s|\to\infty} |X(s)| = 0$ je ekvivalentan uslovu da je polinom u imeniocu višeg reda od polinoma u brojiocu.

5.2 Zadaci

Zadatak 4.1.

Ako je $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\,\mathrm{u}(t)\}$, primenom osobine (teoreme) modulacije naći sliku signala:
a) $x(t) = \mathrm{e}^{-at}\, f(t)\, \cos(bt)\,\mathrm{u}(t)$,
b) $x(t) = \mathrm{e}^{-at}\, f(t)\, \sin(bt)\,\mathrm{u}(t)$,
c) $x(t) = f(t)\, \cos(bt)\,\mathrm{u}(t)$,
d) $x(t) = f(t)\, \sin(bt)\,\mathrm{u}(t)$.

Rešenje:

a) $X(s) = \dfrac{1}{2}\,(F(s+a-jb) + F(s+a+jb))$
b) $X(s) = \dfrac{1}{2j}\,(F(s+a-jb) - F(s+a+jb))$
a) $X(s) = \dfrac{1}{2}\,(F(s-jb) + F(s+jb))$
a) $X(s) = \dfrac{1}{2j}\,(F(s-jb) - F(s+jb))$

Zadatak 4.2.

Naći Laplasovu transformaciju signala:
a) $x(t) = t\, \cos(bt)\,\mathrm{u}(t)$,
b) $x(t) = t\, \sin(bt)\,\mathrm{u}(t)$,
c) $x(t) = t\,\mathrm{e}^{-at}\, \cos(bt)\,\mathrm{u}(t)$.

Rešenje:

a) Prvi način: Kako je $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$, primenjujući pravilo modulacije dobija se:

$$X(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s-jb)^2} + \frac{1}{(s+jb)^2} = \frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}\right).$$

Drugi način: Primenjujući teoremu $\mathcal{L}\{t^n\, f(t)\} = (-1)^n\, \frac{d^n}{ds^n}\, F(s)$ dobija se:

$$\mathcal{L}\{t\, \cos(bt)\} = -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\left\{\cos(bt)\right\} = -\frac{d}{ds}\,\frac{s}{s^2+b^2} = -\frac{s^2+b^2-2\,s^2}{(s^2+b^2)^2} = \frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}.$$

b) $X(s) = 2\,b\,\dfrac{s}{(s^2+b^2)^2}$
c) $X(s) = \dfrac{(s+a)^2-b^2}{((s+a)^2+b^2)^2}$

Zadatak 4.3.

Primenom osobine $\mathcal{L}\{\frac{f(t)}{t}\} = \int_s^{+\infty} F(z)dz$ odrediti sliku signala $x(t) = \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{u}(t)$.

Rešenje:

Pošto je $f(t) = \sin t$, tada je $F(s) = \frac{1}{1+s^2}$, odnosno $F(z) = \frac{1}{1+z^2}$, pa je

$$X(s) = \int_s^{+\infty} \frac{1}{1+z^2}\, dz.$$

Smenom $v = \frac{1}{z}$ se dobija

$$X(s) = \int_0^{1/s} \frac{1}{1+v^2}\, dv = \arctan \frac{1}{s}.$$

Zadatak 4.4.

Primenom osobine $X(s) = \mathcal{L}\{\int_0^t f(v)dv\} = \frac{1}{s}\, F(s)$ odrediti sliku signala $x(t) = \int_0^t \frac{\sin v}{v}\, dv$ za $t \geq 0$.

Rešenje:

Na osnovu prethodnog zadatka je $X(s) = \frac{1}{s}\, \arctan \frac{1}{s}$.

Zadatak 4.5. (teorema o slici periodične funkcije)

Ako za funkciju važi $f(t) = f(t - nT)$, $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$, dokazati da je

$$F(s) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-sT}} \int_0^T \mathrm{e}^{-sT}\, f(t) dt.$$

Rešenje:

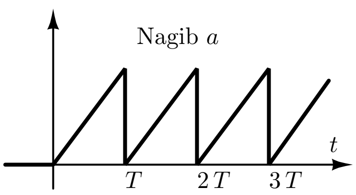
Neka je

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leq t < T, \\ 0 & \text{ostalo,} \end{cases}$$

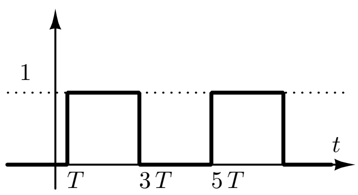
tada se može napisati $f_1(t) = f(t)\,\mathrm{u}(t) - f(t-T)\,\mathrm{u}(t-T)$. Na osnovu teoreme o pomeranju u vremenskom domenu važi da je $F_1(s) = F(s)\ (1 - \mathrm{e}^{-sT})$. Kako je po definiciji $F_1(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sT}\, f_1(t) dt = \int_0^T \mathrm{e}^{-sT}\, f(t) dt$, sleduje da je $F(s) = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-sT}} \int_0^T \mathrm{e}^{-sT}\, f(t) dt$.

Zadatak 4.6.

Odrediti sliku signala:
a) $x(t) = |\sin t|\,\mathrm{u}(t)$,
b) $x(t) = |\sin(\omega_0 t)|\,\mathrm{u}(t)$,
c) $x(t) = |\cos(\omega_0 t)|\,\mathrm{u}(t)$.
d)



e)



Rešenje:

a) Kako je $T = \pi$, dobija se da je $x_1(t) = \sin t\,\mathrm{u}(t) + \sin(t-\pi)\,\mathrm{u}(t-\pi)$. Na osnovu toga je

$$X_1(s) = \frac{1}{1+s^2}\,(1 + \mathrm{e}^{-s\pi}),$$

$$X(s) = \frac{1+\mathrm{e}^{-s\pi}}{(1+s^2)\,(1-\mathrm{e}^{-s\pi})} = \frac{\mathrm{e}^{s\pi/2}+\mathrm{e}^{-s\pi/2}}{(s^2+1)\,(\mathrm{e}^{s\pi/2}-\mathrm{e}^{-s\pi/2})} = \frac{1}{s^2+1}\coth\left(\frac{s\pi}{2}\right).$$

b) Signal $x_1(t) = \sin(\omega_0 t)\,\mathrm{u}(t) + \sin\left(\omega_0\,\left(t-\frac{T_0}{2}\right)\right)\,\mathrm{u}\left(t-\frac{T_0}{2}\right)$, pa je

$$X_1(s) = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} + \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\,\mathrm{e}^{-s\,\frac{T_0}{2}} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\,\left(1+\mathrm{e}^{-s\,\frac{\pi}{\omega_0}}\right).$$

Pošto je $\frac{T_0}{2}$ istovremeno i perioda ispravljenog signala, važi da je

$$X(s) = \frac{X_1(s)}{1-\mathrm{e}^{-s\,\frac{T_0}{2}}} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\,\frac{1+\mathrm{e}^{-s\,\frac{\pi}{\omega_0}}}{1-\mathrm{e}^{-s\,\frac{\pi}{\omega_0}}} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\coth\left(s\,\frac{\pi}{2\,\omega_0}\right).$$

c) $X(s) = \dfrac{s}{s^2+\omega_0^2} + \dfrac{\omega_0}{(s^2+\omega_0^2)\sinh\left(\frac{s\pi}{2\omega_0}\right)}$

d) $X(s) = \dfrac{a}{s^2} - \dfrac{aT}{2s}\,\left(\coth\left(\frac{sT}{2}\right)-1\right)$

e) $X(s) = \dfrac{1}{2s\coth(sT)}$

Zadatak 4.7.

Primenjujući teoreme Laplasove transformacije, odrediti sliku sledećih signala:
a) $x(t) = (t-2)^3\,\mathrm{u}(t-2)$,
b) $x(t) = t\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{u}(t-1)$,
c) $x(t) = \sin(t-\pi)\,\mathrm{u}(t-\pi)$,
d) $x(t) = \sin t\,\mathrm{u}(t-\pi)$,
e) $x(t) = (t^3+1)\,\mathrm{u}(t-2) - \mathrm{u}(t-3)$,
f) $x(t) = \int_0^t v^2\,\sin(t-v)\,dv, \quad t \geq 0$,
g) $x(t) = \int_0^t (t-v)^3\,\cos(v)\,dv, \quad t \geq 0$,
h) $x(t) = \int_0^t \dfrac{\cos(v)\,\sin(t-v)}{t-v}\,dv, \quad t \geq 0$,
i) $x(t) = \int_0^t \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\tau}}{\tau}\,d\tau, \quad t,\tau \geq 0$,
j) $x(t) = \dfrac{\sin^2(t)}{t}\,\mathrm{u}(t)$,
k) $x(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-2t}}{t}\,\mathrm{u}(t)$,
l) $x(t) = \int_0^t (\tau-t)^2\,\mathrm{e}^{\tau}\,d\tau$.

Rešenje:

a) Na osnovu tabele transformacija važi da je $\mathcal{L}\{t^n\,\mathrm{u}(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, pa je prema tome $\mathcal{L}\{t^3\,\mathrm{u}(t)\} = \frac{6}{s^4}$. Na osnovu teoreme o kašnjenu u vremenskom domenu, dobija se da je

$$X(s) = \frac{6}{s^4}\,\mathrm{e}^{-2s}.$$

b) Pošto je

$$x(t) = t\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{u}(t-1) = \mathrm{e}^2\,\left((t-1)\,\mathrm{e}^{2(t-1)} + \mathrm{e}^{2(t-1)}\right)\,\mathrm{u}(t-1),$$

dobija se da je

$$X(s) = \mathrm{e}^2\,\left(\frac{1}{s-2} - \left(\frac{1}{s-2}\right)'\right)\,\mathrm{e}^{-s} = \left(\frac{1}{s-2}+\frac{1}{(s-2)^2}\right)\,\mathrm{e}^{-(s-2)} = \frac{s-1}{(s-2)^2}\,\mathrm{e}^{-(s-2)}.$$

c) Neka je $x_1(t) = \sin t\,\mathrm{u}(t)$. Tada je $x(t) = x_1(t-\pi) = \sin(t-\pi)\,\mathrm{u}(t-\pi)$. Pošto je $X_1(s) = \frac{1}{s^2+1}$ i $X(s) = X_1(s)\,\mathrm{e}^{-s\pi}$, na osnovu teoreme o kašnjenju u vremenskom domenu dobija se da je $X(s) = \frac{\mathrm{e}^{-s\pi}}{s^2+1}$.
d) Kako je $\sin t = -\sin(t-\pi)$, to je $x(t) = -\sin(t-\pi)\,\mathrm{u}(t-\pi)$, pa je $X(s) = -\frac{1}{s^2+1}\,\mathrm{e}^{-s\pi}$.
e) Neka je $x_1(t) = \mathrm{u}(t-2)$, tada je $X_1(s) = \frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-2s}$. Na osnovu teoreme o izvodu slike važi da je

$$X(s) = \left((-1)^3\,\frac{d^3}{ds^3} + 1\right)\,X(s) - \frac{\mathrm{e}^{-3s}}{s} = \mathrm{e}^{-2s}\,\left(\frac{6}{s^4} + \frac{12}{s^3} + \frac{12}{s^2} + \frac{9}{s}\right) - \frac{\mathrm{e}^{-3s}}{s}.$$

f) Konvolucija u vremenskom domanu predstavlja množenje u Laplasovom. Zato je

$$X(s) = \mathcal{L}\left\{t^2\right\}\,\mathcal{L}\left\{\sin(t)\right\} = \frac{2}{s^3}\,\frac{1}{s^2+1}.$$

g)

$$X(s) = \mathcal{L}\left\{t^3\right\}\,\mathcal{L}\left\{\cos(t)\right\} = \frac{6}{s^4}\,\frac{s}{s^2+1} = \frac{6}{s^3\,(s^2+1)}$$

h)

$$X(s) = \mathcal{L}\left\{\cos(t)\right\}\,\mathcal{L}\left\{\frac{\sin(t)}{t}\right\} = \frac{s}{s^2+1}\,\int_s^{+\infty}\mathcal{L}\left\{\sin(t)\right\}\,dz = \frac{s}{s^2+1}\,\int_s^{+\infty}\frac{1}{z^2+1}\,dz$$
$$= \frac{s}{s^2+1}\,\mathrm{atan}(z)|_s^{+\infty} = \frac{s}{s^2+1}\,\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{atan}(s)\right) = \frac{s}{s^2+1}\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{s}\right)$$

i) Kako je $\mathcal{L}\left\{(1-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{u}(t)\right\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s\,(s+1)}$, na osnovu teoreme o integraciji slike dobija se da je

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{u}(t)\right\} = \int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)\,dz = (\ln(z) - \ln(z+1))|_s^{+\infty} = \ln\left(\frac{z}{z+1}\right)\Bigg|_s^{+\infty} = \ln\left(\frac{s+1}{s}\right).$$

Na osnovu teoreme o integraciji originala dobija se

$$X(s) = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\left\{\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{u}(t)\right\} = \frac{1}{s}\,\ln\left(\frac{s+1}{s}\right).$$

j) Kako je $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$, to je $\mathcal{L}\left\{\sin^2(t)\right\} = \frac{1}{2}\,\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)$. Na osnovu teoreme o integraciji originala je

$$X(s) = \frac{1}{2}\int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+4}\right)\,dz,$$

primenom smene $v = z^2 + 4$ je

$$X(s) = \frac{1}{2}\,\ln(z)|_s^{+\infty} - \frac{1}{4}\int_{s^2+4}^{+\infty}\frac{dv}{v} = \frac{1}{4}\,\ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right).$$

k) $X(s) = \ln\left(\frac{s+2}{s+3}\right)$
l) $X(s) = \frac{2}{s^3\,(s-1)}$

Zadatak 4.8.

Vremenski oblik signala $x(t)$ je $x(t) = (\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-t}\,\cos(3t))\,\mathrm{u}(t) + \mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{u}(-t)$.
a) Odrediti bilateralnu Laplasovu transformaciju signala $x(t)$ koristeći metod po izboru.
b) Odrediti oblast konvergencije.

Rešenje:

a) Neka je $x(t) = x_1(t)+x_2(t)$, gde je $x_1(t) = (\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t}\cos(3t))\,\mathrm{u}(t)$ kauzalan signal i $x_2(t) = \mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{u}(-t)$ antikauzalan signal.

Signal $x_1(t)$ se može napisati kao

$$x_1(t) = \left(\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-(1+3j)t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-(1-3j)t}\right)\mathrm{u}(t),$$

pa je

$$X_1(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1/2}{s+(1+3j)} + \frac{1/2}{s+(1-3j)}.$$

Laplasova transformacija signala $x_2(t)$ je

$$X_2(s) = \frac{-1}{s-3}.$$

Računa se $X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1/2}{s+(1+3j)} + \frac{1/2}{s+(1-3j)} - \frac{1}{s-3}$.

b) Sabirci signala $x_1(t)$ su kauzalni i imaju oblast konvergencije desno od pola, redom, ROC: $\sigma > -2$, ROC: $\sigma > -1$ i ROC: $\sigma > -1$. Tako da je ukupna oblast konvergencije signala $x_1(t)$ ROC: $\sigma > -1$. Signal $x_2(t)$ je antikauzalan i njegova oblast konvergencije je levo od pola ROC: $\sigma < 3$.

Ukupna oblast konvergencije signala $x(t)$ je ROC: $-1 < \sigma < 3$.

Zadatak 4.9.

Primenom unilateralne Laplasove transformacije dokazati formulu

$$\frac{d}{dt}\,(f(t) * g(t)) = -f(0^+)\,g(t) + f'(t) * g(t).$$

Rešenje:

Neka je $y(t) = f(t) * g(t)$, na osnovu teoreme o diferenciranju je

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\,y(t)\right\} = s\,Y(s) - y(0^+) = (s\,F(s))\,G(s) - y(0^+),$$

gde je $Y(s) = F(s)\,G(s)$ i

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)d\tau,$$

pa je za $t = 0^+$

$$y(0^+) = \int_0^{0^+} f(\tau)\,g(t-\tau)d\tau = f(0^+)\,g(t).$$

Nakon primene inverzne Laplasove transformacije dobija se

$$\frac{d}{dt}\,(f(t) * g(t)) = -f(0^+)\,g(t) + f'(t) * g(t).$$

Zadatak 4.10.

Dokazati teoreme:

a) $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{d^n}{dt^n} f(t) = \lim\limits_{s\to\infty} s^{n+1} F(s)$,

b) Ako važi da je $\lim\limits_{s\to\infty} s^{k+1} F(s) = a$, tada je $\lim\limits_{s\to\infty} s^n F(s) = 0$, za svako $1 \le n \le k$.

Rešenje:

a) Kako je

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} f(t)\right\} = \int_{0^+}^{+\infty} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt = \frac{d^n f(t)}{dt^n}\,\mathrm{e}^{-st}\Big|_{0^+}^{+\infty} + s\int_{0^+}^{+\infty} \frac{d^n}{dt^n} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt =$$

$$= -\lim_{t\to 0^+}\frac{d^n f(t)}{dt^n} + \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}}\,s\,\mathrm{e}^{-st}\Big|_{0^+}^{+\infty} + s^2\int_{0^+}^{+\infty} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt =$$

$$= -\lim_{t\to 0^+}\frac{d^n f(t)}{dt^n} - \sum_{v=1}^{n} s^v \lim_{t\to 0^+}\frac{d^{n-v} f(t)}{dt^{n-v}} + s^{n+1}\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt =$$

$$= -\lim_{t\to 0^+}\frac{d^n f(t)}{dt^n} - \sum_{v=1}^{n} s^v \lim_{t\to 0^+}\frac{d^{n-v} f(t)}{dt^{n-v}} + s^{n+1} F(s).$$

Ako se pusti da $s\to\infty$m onda postaje

$$\lim_{s\to\infty}\mathcal{L}\left\{\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} f(t)\right\} = 0,$$

pa je

$$\lim_{s\to\infty}\mathcal{L}\left\{\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} f(t)\right\} = \lim_{s\to\infty}\left(-\lim_{t\to 0^+}\frac{d^n f(t)}{dt^n} - \sum_{v=1}^{n} s^v \lim_{t\to 0^+}\frac{d^{n-v} f(t)}{dt^{n-v}} + s^{n+1} F(s)\right) =$$

$$= -\lim_{t\to 0^+}\frac{d^n f(t)}{dt^n} + \lim_{s\to\infty}\left(s^{n+1} F(s)\right) = 0,$$

zato što je s^{n+1} najveći stepen, a $\lim_{t\to 0^+}\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ ne zavisi od s. Važi

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{d^n}{dt^n} f(t) = \lim_{s\to\infty} s^{n+1} F(s).$$

b) Važi

$$\lim_{s\to\infty} s^n F(s) = \lim_{s\to\infty} s^n \frac{a}{s^{k+1}} = \lim_{s\to\infty}\frac{a}{s^{k+1-n}} = 0$$

za $k, n \in \mathbb{N}$, $k+1-n \ge 1$, odnosno za $n \le k$. Istovremeno mora da važi da je $n \ge 1$ zato što je prirodan broj.

Zadatak 4.11.

Odrediti original kauzalnog signala čije su slike:

a) $X(s) = \dfrac{1}{s\,(s+1)\,(s-2)^2}$,

b) $X(s) = \dfrac{s+1}{s^2\,(s+2)}$,

c) $X(s) = \dfrac{s-1}{s\,(s^2+a^2)}$,

d) $X(s) = \dfrac{s}{(s+1)\,(s^2+a^2)}$,

e) $X(s) = \dfrac{s^3+s}{(s+1)\,(s^2+4)}$,

f) $X(s) = \dfrac{s^2}{(s+1)\,(s^2+4s+8)}$,

g) $X(s) = \dfrac{s+1}{s\,(s+2)}\,\mathrm{e}^{-as}$,

h) $X(s) = \dfrac{1}{s\,(1-\mathrm{e}^{-as})}$.

Rešenje:

a) Prvi način, rastavljanjem na parcijalne razlomke:

$$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{(s-2)^2}.$$

Na osnovu teorema 8 i 9 iz Dodatka E neodređene konstante su jednake:

$$A = \lim_{s\to 0} s\,X(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{(s+1)\,(s-2)^2} = \frac{1}{4},$$

$$B = \lim_{s\to -1} (s+1)\,X(s) = \lim_{s\to -1} \frac{1}{s\,(s-2)^2} = -\frac{1}{9},$$

$$C = \lim_{s\to 2} \frac{d}{ds}((s-2)^2\,X(s)) = -\lim_{s\to 2} \frac{2s+1}{s^2\,(s+1)^2} = -\frac{5}{36},$$

$$D = \lim_{s\to 2} (s-2)^2\,X(s) = \lim_{s\to 2} \frac{1}{s\,(s+1)} = \frac{1}{6}.$$

Na osnovu toga je

$$x(t) = \frac{1}{4}\,\mathrm{u}(t) - \frac{1}{9}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{u}(t) - \frac{5}{36}\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{u}(t) + \frac{1}{6}\,t\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{u}(t).$$

Drugi način, direktnom primenom računa ostatka na definicioni integral:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} \mathrm{e}^{st}\,X(s)ds = \sum_{v=1}^{n} \mathrm{Res}_{s=\omega_{pv}} \mathrm{e}^{st}\,X(s) = \sum_{v=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \lim_{s\to\omega_{pv}} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left((s-\omega_{pv})^k\,\mathrm{e}^{st}\,X(s)\right).$$

$$x(t) = \lim_{s\to 0} \frac{s\mathrm{e}^{st}}{s\,(s+1)\,(s-2)^2} + \lim_{s\to -1} \frac{(s+1)\,\mathrm{e}^{st}}{s\,(s+1)\,(s-2)^2} + \lim_{s\to 2} \frac{d}{ds}\,\frac{(s-2)^2\,\mathrm{e}^{st}}{s\,(s+1)\,(s-2)^2} =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^0}{4} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{9} + \lim_{s\to 2} \frac{t\mathrm{e}^{st}\,s\,(s+1) - (2s+1)\,\mathrm{e}^{st}}{s^2\,(s+1)^2}$$

$$x(t) = \frac{1}{4}\,\mathrm{u}(t) - \frac{1}{9}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{u}(t) - \frac{5}{36}\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{u}(t) + \frac{1}{6}\,t\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{u}(t).$$

Kao što se vidi, razvoj u parcijalne razlomke je u ovom primeru suvišan korak.

b) Pošto se jednostavne racionalne funkcije mogu napamet rastaviti, u takvim slučajevima je nepotrebno koristiti direktnu primenu računa ostatka.

$$X(s) = \frac{s+1}{s^2\,(s+2)} = \frac{(s+1)\,(s-2)}{s^2\,(s^2-4)} = (s+1)\,(s-2)\,\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2-4} - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{s+1}{s+2} - \frac{s^2-s-2}{s^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{s+2} - 1 + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s+2}\right)$$

Na osnovu toga je $x(t) = \dfrac{1}{4}\,(1 + 2t - \mathrm{e}^{-2t})\,\mathrm{u}(t)$.

c)

$$X(s) = \frac{s-1}{s\,(s^2+a^2)} = \frac{s\,(s-1)}{s^2\,(s^2+a^2)} = \frac{s\,(s-1)}{a^2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+a^2}\right) = \frac{1}{a^2}\left(\frac{s-1}{s} - \frac{s^2-s}{s^2+a^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{1}{s} - 1 + \frac{s+a^2}{s^2+a^2}\right) = \frac{1}{a^2}\left(-\frac{1}{s} + \frac{s+a^2}{s^2+a^2}\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{a^2}\,(a\,\sin(at) + \cos(at) - 1)\,\mathrm{u}(t)$$

d)

$$X(s) = \frac{s\,(s-1)}{(s^2-1)\,(s^2+a^2)} = \frac{1}{a^2+1}\left(\frac{s\,(s-1)}{s^2-1} - \frac{s\,(s-1)}{s^2+a^2}\right) = \frac{1}{a^2+1}\left(\frac{s}{s+1} - \frac{s^2+a^2-a^2-s}{s^2+a^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2+1}\left(1 - \frac{1}{s+1} - 1 + \frac{s+a^2}{s^2+a^2}\right) = \frac{1}{a^2+1}\left(-\frac{1}{s+1} + \frac{s+a^2}{s^2+a^2}\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{a^2+1}\,\left(a\,\sin(at) + \cos(at) - \mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{u}(t)$$

e) Prvi način

$$X(s) = \frac{s^3+s}{(s+1)\,(s^2+4)} = \frac{s^3+s^2+4s+4}{(s+1)\,(s^2+4)} - \frac{s^2+3s+4}{(s+1)\,(s^2+4)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{5}\left(\frac{(s^2+3s+4)\,(s-1)}{s^2-1} - \frac{(s^2+3s+4)\,(s-1)}{s^2+4}\right) = 1 - \frac{1}{5}\left(\frac{s^2+3s+4}{s+1} - \frac{(s^2+3s+4)\,(s-1)}{s^2+4}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{5}\left(s + 2 + \frac{2}{s+1} - s + 1 - 3 + 3\,\frac{s+4}{s^2+4}\right) = 1 - \frac{1}{5}\left(\frac{2}{s+1} + 3\,\frac{s+4}{s^2+4}\right)$$

$$x(t) = \delta(t) - \frac{1}{5}\,(6\,\sin(2t) + 3\,\cos(2t) + 2\,\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{u}(t)$$

Drugi način

$$X(s) = 1 - \frac{A}{s+1} - \frac{Cs+D}{s^2+2^2},$$

gde je na osnovu teoreme 10 iz Dodatka E

$$A = \lim_{s\to-1} \frac{s^2+3s+4}{s^2+4} = \frac{2}{5},$$

$$Q = \frac{1}{2}\lim_{s\to 2j} \frac{s^2+3s+4}{s+1} = \frac{1}{2}\,\frac{-4+6j+4}{2j+1} = \frac{6+3j}{5},$$

$$C = \Im\{Q\} = \frac{3}{5},$$

$$\frac{D}{2} = \Re\{Q\} \Rightarrow D = \frac{12}{5}.$$

$$x(t) = \delta(t) - \frac{1}{5}\,\left(6\,\sin(2t) + 3\,\cos(2t) + 2\,\mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{u}(t)$$

Napomena: Prividno je drugi postupak efikasniji, ali se u njemu ne može preskočiti nijedan korak, dok se u prvom postupku uz malo iskustva može odmah pisati krajnji razvoj u parcijalne razlomke.

f)

$$X(s) = \frac{s^2}{(s+1)\,(s^2+4s+8)} = \frac{1/5}{s+1} + \frac{As+B}{s^2+4s+8}$$

$$Q = \frac{1}{2}\lim_{s\to-2+2j} \frac{s^2}{s+1} = -\frac{8}{5} + j\,\frac{4}{5}$$

$$A = \Im\{Q\} = \frac{4}{5}$$

Konstantu B nije potrebno računati jer se izraz $\frac{\alpha A+B}{\beta} = \Re\{Q\} = -\frac{8}{5}$ pojavljuje u krajnjem rešenju.

$$x(t) = \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{u}(t) + \mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{4}{5}\cos(2t) - \frac{8}{5}\sin(2t)\right)\mathrm{u}(t)$$

g) Pošto je

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s\,(s+2)}\right\} = \frac{1}{2}\,(1+\mathrm{e}^{-2t})\,\mathrm{u}(t),$$

na osnovu teoreme o kašnjenju u vremenskom domenu je

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-2\,(t-a)}\right)\mathrm{u}(t-a).$$

h) Prvi način: Neka je $X_1(s) = X(s)\,(1-\mathrm{e}^{-as})$. To znači da je $x_1(t) = x(t)\,\mathrm{u}(t) - x(t-a)\,\mathrm{u}(t-a)$, odnosno da je $\mathrm{u}(t) = x(t)\,\mathrm{u}(t) - x(t-a)\,\mathrm{u}(t-a)$. Neka je sada

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{u}(t-ka) = x(t)\,\mathrm{u}(t) - x(t-na)\,\mathrm{u}(t-na).$$

Pošto je

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = x(t)\,\mathrm{u}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{u}(t-ka),$$

vidi se da je $x(t)$ signal oblika stepenica sa stepenikom širine $D = a$ i visinom $l = 1$.
Drugi način:

$$X(s) = \frac{1}{s\,(1-\mathrm{e}^{-as})} = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-kas} \Rightarrow x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{u}(t-ka)$$

Zadatak 4.12.

Neka je prenosna funkcija $H(s)$ takva da za svaki njen pol važi $\omega_{pk} < 0$.
a) Dokazati da je

$$\lim_{t\to+\infty}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\omega_0^2}\,H(s)\right\} = A\,\cos(at) + B\,\sin(bt).$$

b) Odrediti A, B, a i b.

Rešenje:

a) Kako su svi polovi transfer funkcije $H(s)$ u levoj kompleksnoj poluravni, to znači da odziv sistema iščezava sa protokom vremena. U ustaljenom stanju će postojati jedino odziv koji potiče od $\frac{1}{s^2+\omega_0^2}$ i to je

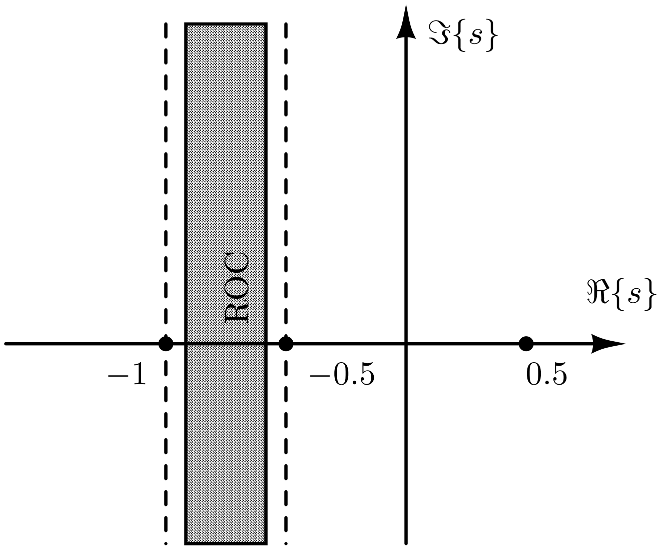
$$\lim_{t\to+\infty}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\omega_0^2}\,H(s)\right\} = \frac{\Im\{H(j\omega_0)\}}{\omega_0}\,\cos(\omega_0 t) + \frac{\Re\{H(j\omega_0)\}}{\omega_0}\,\sin(\omega_0 t),$$

što je i trebalo pokazati.
b) Vrednosti su redom $A = \frac{\Im\{H(j\omega_0)\}}{\omega_0}$, $B = \frac{\Re\{H(j\omega_0)\}}{\omega_0}$ i $a = b = \omega_0$.

Zadatak 4.13.

Odrediti inverznu bilateralnu Laplasovu transformaciju:

$$X(s) = \frac{2}{(s^2-0.25)\,(s+1)}, \qquad ROC: -1 < \sigma < -0.5,\ \sigma = \Re\{s\}.$$



Slika 4.13.1.

Rešenje:

Na slici 4.13.1 je prikazana oblast konvergencije signala.

$$X(s) = \frac{4/3}{s-0.5} - \frac{4}{s+0.5} + \frac{8/3}{s+1}$$

Polovi $+0.5$ i -0.5 nalaze se desno od ROC i pripadaju antikauzalnom delu odziva, dok se pol -1 nalazi levo do ROC i pripada kauzalnom delu odziva.

$$x(t) = -\frac{4}{3}\,\mathrm{e}^{0.5\,t}\,\mathrm{u}(-t) + 4\,\mathrm{e}^{-0.5\,t}\,\mathrm{u}(-t) + \frac{8}{3}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{u}(t)$$

Napomena: Inverzna transformacija antikauzalnog dela se dobija tako sto se umesto s stavi $-s$, nađe se onda inverzna transformacija kao da je unilateralna, a onda se umesto t stavi $-t$.

Zadatak 4.14.

Odrediti sopstveni i prinudni odziv sistema sa početnim uslovima opisanog diferencijalnom jednačinom

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\,\frac{dy}{dt} + 3y = x(t),$$

ako je $x(t) = (1-\cos(3t))\,\mathrm{u}(t)$, za početne uslove $y'(0) = 2$ i $y(0) = -1$.

Rešenje:

Primenom Laplasove transformacije na diferencijalnu jednačinu dobija se:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} + 4\,\frac{dy}{dt} + 3y\right\} = \mathcal{L}\{x(t)\} \Rightarrow s^2\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + 4s\,Y(s) - 4\,y(0) + 3\,Y(s) = X(s),$$

$$Y(s)\,(s^2+4s+3) = -(s+2) + X(s) \Rightarrow Y(s) = -\frac{s+2}{s^2+4s+3} + \frac{X(s)}{s^2+4s+3} = Y_S(s) + Y_P(s),$$

pri čemu je $X(s) = \dfrac{9}{s\,(s^2+9)}$.

Za $t \geq 0$ prinudni odziv je jednak $y_P(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_P(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{X(s)}{s^2+4s+3}\right\}$, dok je sopstveni odziv jednak $y_S(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_S(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{s+2}{s^2+4s+3}\right\}$.

$$Y_S(s) = -\frac{s+2}{s^2+4s+3} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3}\right) \Rightarrow y_S(t) = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-3t}\right)\mathrm{u}(t)$$

$$Y_P(s) = \frac{9}{s\,(s+1)\,(s+3)\,(s^2+9)} = \frac{1/3}{s} + \frac{-9/20}{s+1} + \frac{1/12}{s+3} + \frac{As+B}{s^2+3^2}$$

$$Q = \frac{1}{3}\lim_{s\to 3j}\frac{9}{s\,(s+1)\,(s+3)} = \frac{-2+j}{30}$$

Vidi se da je $A = \frac{1}{30}$, a B nije potrebno računati.

$$y_P(t) = \left(\frac{1}{3} - \frac{9}{20}\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{12}\,\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{30}\,\cos(3t) - \frac{1}{15}\,\sin(3t)\right)\mathrm{u}(t)$$

$$y(t) = y_S(t) + y_P(t) = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-3t}\right)\mathrm{u}(t) + \left(\frac{1}{3} - \frac{9}{20}\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{12}\,\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{30}\,\cos(3t) - \frac{1}{15}\,\sin(3t)\right)\mathrm{u}(t)$$

Za $t < 0$ nema pobude, pa postoji samo sopstveni odziv, $y(t) = y_S(t)$. Za svako t važi izraz

$$y(t) = \underbrace{\overbrace{-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-3t}\right)}^{\text{sopstveni prelazni režim}} + \overbrace{\left(-\frac{9}{20}\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{12}\,\mathrm{e}^{-3t}\right)\mathrm{u}(t)}^{\text{prinudni prelazni režim}}}_{\text{prelazni režim}} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{30}\,\cos(3t) - \frac{1}{15}\,\sin(3t)\right)\mathrm{u}(t)}_{\text{jed. komponenta i ustaljeni prostoperiodični režim}}$$

Napomena: Ustaljeni prostoperiodični režim se može jednostavnije naći pomoću Furijeove transformacije, pa u tom slučaju nije potrebno računati Q, A i B, već samo parcijalne razlomke koji odgovaraju prinudnom i sopstvenom prelaznom režimu.

$$Y_{us}(j\omega) = -\frac{\pi\left(\delta(\omega+3) + \delta(\omega-3)\right)}{(j\omega+1)\,(j\omega+3)} = -\frac{\pi\,\delta(\omega+3)}{(-j3+1)\,(-j3+3)} - \frac{\pi\,\delta(\omega-3)}{(j3+1)\,(j3+3)} =$$

$$= \frac{\pi}{60}\left(\delta(\omega+3)\,(-2+4j) + \delta(\omega-3)\,(-2-4j)\right) = \frac{\pi}{60}\left(-2\left(\delta(\omega+3)+\delta(\omega-3)\right) + 4j\left(\delta(\omega+3)-\delta(\omega-3)\right)\right)$$

$$y_{us}(t) = \frac{1}{30}\,\cos(3t) - \frac{1}{15}\,\sin(3t)$$

Još jednostavnije rešenje se dobija primenom fazorskog računa:

$$Y_{us}(j\omega) = -\left.\frac{1}{(j\omega+1)\,(j\omega+3)}\right|_{\omega=3} = \frac{1+2j}{30},$$

pa je

$$y_{us}(t) = \frac{1}{30}\,\cos(3t) - \frac{1}{15}\,\sin(3t).$$

Fazorske predstave prostoperiodičnih generatora su:

$$U\,\cos(\omega t) \to U,$$

$$U\,\cos(\omega t + \varphi) \to U\,\mathrm{e}^{j\varphi},$$

$$U\,\sin(\omega t) = U\,\cos(\omega t - \pi/2) \to -j\,U.$$

Zadatak 4.15.

Odrediti odziv sistema za $t \geq 0$ ako su opisani diferencijalnim jednačinama sa zadatim konturnim uslovima:
a) $y''(t) - y(t) = t\,\mathrm{u}(t)$, za $y(0) = y(1) = 0$,
b) $y''(t) + \pi^2\, y(t) = \cos t\,\mathrm{u}(t)$, za $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$.

Rešenje:

a)

$$s^2\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0) - Y(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{s\,y(0) + y'(0)}{s^2 - 1} + \frac{1}{s^2\,(s^2-1)}$$

$$Y(s) = \frac{y'(0)+1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2} = \frac{A}{s^2-1} - \frac{1}{s^2} \Rightarrow y(t) = (A\,\mathrm{sh}(t) - t)\,\mathrm{u}(t)$$

Kako je $y(1) = A\,\mathrm{sh}(1) - 1 = 0$, to je $A = \dfrac{1}{1-\mathrm{sh}(1)}$.

b)

$$s^2\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + \pi^2\,Y(s) = \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow (s^2+\pi^2)\,Y(s) = s\,y(0) + y'(0) + \frac{s}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{s\,y(0)}{s^2+\pi^2} + \frac{y'(0)}{s^2+\pi^2} + \frac{1}{\pi^2-1}\left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+\pi^2}\right)$$

Rastavljanje na parcijalne razlomke je trivijalno, pa nije potrebna primena računa ostatka.

$$Y(s) = \frac{s\,A}{s^2+\pi^2} + \frac{\pi\,B}{s^2+\pi^2} + \frac{1}{\pi^2-1}\,\frac{s}{s^2+1} \Rightarrow y(t) = \left(A\,\cos(\pi t) + B\,\sin(\pi t) + \frac{1}{\pi^2-1}\,\cos t\right)\,\mathrm{u}(t)$$

$$y(0) = A + \frac{1}{\pi^2-1} = y(1) = -A + \frac{1}{\pi^2-1}\,\cos(1) \Rightarrow A = \frac{1}{2\,(\pi^2-1)}\,(\cos(1)-1)$$

$$y'(t) = -A\,\sin(\pi t) + \pi B\,\cos(\pi t) - \frac{1}{\pi^2-1}\,\sin t$$

$$y'(0) = \pi B = y'(1) = -\pi B - \frac{1}{\pi^2-1}\,\sin(1) \Rightarrow B = -\frac{1}{2\pi\,(\pi^2-1)}\,\sin(1)$$

Zadatak 4.16.

Primenom Laplasove transformacije rešiti integro-diferencijalne jednačine za $t \geq 0$:
a) $y(t) + y'(t) = \mathrm{u}(t) + \int_0^t \sin(t-\tau)\,y(\tau)d\tau,\ y(0) = 0$,
b) $y(t) - y''(t) = t\,\mathrm{u}(t) - 3\,\int_0^t \sin(t-\tau)\,y(\tau)d\tau,\ y(0) = y'(0) = 0$.

Rešenje:

a) Primenjujući teoremu o konvoluciji u vremenskom domenu dobija se:

$$(s+1)\,Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1}\,Y(s)$$

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{(s^2+s+1)\,s^2} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1+s}{s^2+s+1} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

Na osnovu tabele transformacija sleduje da je:

$$y(t) = -1 + t + \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\,\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\,\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}, \qquad t \geq 0.$$

b)

$$Y(s) - s^2\,Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{3}{s^2+1}\,Y(s) \Rightarrow Y(s)\left(1 - s^2 + \frac{3}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = -\frac{s^2+1}{s^2\,(s^4-4)} = -\frac{s^2+1}{s^2\,(s^2-2)\,(s^2+2)}$$

Ako se uvede smena $z = s^2$, dobija se racionalna funkcija.

$$\frac{z+1}{z\,(z-2)\,(z+2)} = -\frac{1/4}{z} - \frac{1/8}{z+2} + \frac{3/8}{z-2}$$

Na osnovu toga je

$$Y(s) = \frac{1/4}{s^2} + \frac{1/8}{s^2+2} - \frac{3/8}{s^2-2} \Rightarrow y(t) = \frac{t}{4} + \frac{1}{8\sqrt{2}}\,\sin(\sqrt{2}\,t) - \frac{3}{8\sqrt{2}}\sinh(\sqrt{2}\,t), \quad t \geq 0.$$

Zadatak 4.17.

Primenom Laplasove transformacije za $t \geq 0$ rešiti integralne jednačine:
a) $\sin t = \int_0^t \cos(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau$,
b) $y(t) = \mathrm{e}^{2t} + \cos(3t) + \int_0^t \sin(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau$.

Rešenje:

a)

$$\frac{1}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1}\,Y(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow y(t) = \mathrm{u}(t)$$

b)

$$Y(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{s}{s^2+9} + Y(s)\,\frac{1}{s^2+1} \Rightarrow Y(s)\,\frac{s^2}{s^2+1} = \frac{1}{s-2} + \frac{s}{s^2+9}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s-2}\,\frac{s^2+1}{s^2} + \frac{s}{s^2+9}\,\frac{s^2+1}{s^2} = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s^2\,(s-2)} + \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{s\,(s^2+9)} =$$

$$= \frac{1}{s-2} + \frac{1}{4\,(s-2)} - \frac{1}{2\,s^2} - \frac{1}{4\,s} + \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{s\,(s^2+9)}$$

$$y(t) = \frac{5}{4}\,\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\,t + \cos(3t) + \frac{1}{9}\,(1-\cos(3t)), \qquad t \geq 0$$

Zadatak 4.18.

Za $t \geq 0$ rešiti integralne jednačine:
a) $y(t) + \int_0^t y(v)\,dv = t$,
b) $y(t) + \int_0^t \mathrm{e}^{t-v}\,y(v)\,dv = \cosh t$,
c) $y(t) = 4t\,\mathrm{u}(t) - 3\,\int_0^t y(v)\,\sin(t-v)\,dv$,
d) $y(t) = 9\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{u}(t) - 2\,\int_0^t y(v)\,\cos(t-v)\,dv$.

Rešenje:

a)

$$Y(s) + \frac{1}{s}\,Y(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s\,(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$y(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}, \qquad t \geq 0$$

b)

$$Y(s) + \frac{1}{s-1}\,Y(s) = \frac{s}{s^2-1} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t}, \qquad t \geq 0$$

c)

$$Y(s) = \frac{4}{s^2} - \frac{3}{s^2+1}\,Y(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{4\,(s^2+1)}{s^2\,(s^2+4)} = \left.\frac{4\,(z+1)}{z\,(z+4)}\right|_{z=s^2} = \frac{1}{z} + \frac{3}{z+4} = \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s^2+4}$$

$$y(t) = t + \frac{3}{2}\,\sin(2t), \qquad t \geq 0$$

d)

$$Y(s) = \frac{9}{s+2} - \frac{2s}{s^2+1}\,Y(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{9\,(s^2+1)}{(s+2)\,(s+1)^2} = \frac{45}{s+2} - \frac{36}{s+1} + \frac{18}{(s+1)^2}$$

$$y(t) = 45\,\mathrm{e}^{-2t} - 36\,\mathrm{e}^{-t} + 18\,t\,\mathrm{e}^{-t}, \qquad t \geq 0$$

Zadatak 4.19.

Sistem je za $t \geq 0$ opisan integralnom jednačinom $y(t) + 2\int_0^t y(v)\,\sin(t-v)\,dv = \sin(2t)$.
a) Odrediti Laplasovu transformaciju signala $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$.
b) Odrediti oblast konvergencije slike transformacije signala $y(t)$.
c) Primenom inverzne Laplasnove transformacije odrediti $y(t)$.

Rešenje:

a)

$$Y(s) + \frac{2}{s^2+1}\,Y(s) = \frac{2}{s^2+4} \Rightarrow Y(s) = 2\,\frac{s^2+1}{(s^2+3)\,(s^2+4)}$$

b) Kako se svi polovi slike nalaze na imaginarnoj osi, dovoljno je da je $\sigma > 0$, $s = \sigma + j\omega$.
c) Uvodeći smenu $z = s^2$ dobija se

$$Y(s) = 2\,\frac{s^2+1}{(s^2+3)\,(s^2+4)} = 2\,\frac{z+1}{(z+3)\,(z+4)} = \frac{3}{z+4} - \frac{2}{z+3} = \frac{3}{s^2+4} - \frac{2}{s^2+3}.$$

Na osnovu toga je:

$$y(t) = 3\,\sin(2t) - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\sin(\sqrt{3}t), \qquad t \geq 0.$$

Zadatak 4.20.

Odrediti opšte rešenje sistema diferencijalnih jednačina:

$$\frac{d}{dt}\,x(t) - \frac{d}{dt}\,y(t) - y(t) = -\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{u}(t),$$

$$x(t) + \frac{d}{dt}\,y(t) - y(t) = \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{u}(t).$$

Rešenje:

$$\begin{aligned} &s\,X(s) - x(0) - s\,Y(s) + y(0) - Y(s) = -\frac{1}{s-1} \\ &X(s) + s\,Y(s) - y(0) - Y(s) = \frac{1}{s-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &s\,X(s) - (s+1)\,Y(s) = -\frac{1}{s-1} + x(0) - y(0) = -\frac{1}{s-1} + C_1 \\ &X(s) + (s-1)\,Y(s) = \frac{1}{s-2} + y(0) = \frac{1}{s-2} + C_2 \end{aligned}$$

Rešavanjem sistema dobija se:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{3}{(s-2)\,(s^2+1)} - (C_1 - C_2)\,\frac{1}{s^2+1} + (C_1 + C_2)\,\frac{s}{s^2+1}, \\ Y(s) &= -C_1\,\frac{1}{s^2+1} + C_2\,\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{(s-1)\,(s^2+1)} + \frac{s}{(s-2)\,(s^2+1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{3/5}{s-2} - \frac{3}{5}\,\frac{s+2}{s^2+1} - (C_1 - C_2)\,\frac{1}{s^2+1} + (C_1 + C_2)\,\frac{s}{s^2+1} \\ Y(s) &= -C_1\,\frac{1}{s^2+1} + C_2\,\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\,\frac{s-1}{s^2+1} + \frac{2}{5}\,\frac{1}{s-2} - \frac{1}{5}\,\frac{2s-1}{s^2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{3}{5}\,\frac{1}{s-2} + \left(C_2 - C_1 - \frac{6}{5}\right)\frac{1}{s^2+1} + \left(C_1 + C_2 - \frac{3}{5}\right)\frac{s}{s^2+1} \\ Y(s) &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-1} + \frac{2}{5}\,\frac{1}{s-2} - \left(C_1 + \frac{3}{10}\right)\frac{1}{s^2+1} + \left(C_2 - \frac{9}{10}\right)\frac{s}{s^2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{3}{5}\,\mathrm{e}^{2t} + \left(C_2 - C_1 - \frac{6}{5}\right)\sin t + \left(C_1 + C_2 - \frac{3}{5}\right)\cos t, \qquad t \geq 0 \\ y(t) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t} + \frac{2}{5}\,\mathrm{e}^{2t} - \left(C_1 + \frac{3}{10}\right)\sin t + \left(C_2 - \frac{9}{10}\right)\cos t, \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

Zadatak 4.21.

Ako je $D = \frac{d}{dt}$ za $t \geq 0$ rešiti sisteme diferencijalnih jednačina:
a)

$$(D^2 - 8)\,x(t) + D\sqrt{6}\,y(t) = (\mathrm{e}^{-t} + 2)\,\mathrm{u}(t)$$

$$-\sqrt{6}\,Dx(t) + (D^2 + 2)\,y(t) = (\mathrm{e}^{-t} - 2)\,\mathrm{u}(t)$$

$$x(0) = 1,\ x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$$

b)

$$(D+2)\,x(t)+(D+1)\,y(t)=t\,\mathrm{u}(t)$$

$$5\,x(t)+(D+3)\,y(t)=t^2\,\mathrm{u}(t)$$

$$x(0)=0,\ y(0)=1$$

Rešenje:

a)

$$(s^2-8)\,X(s)+s\sqrt{6}\,Y(s)=s+\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s}$$

$$-s\sqrt{6}\,X(s)+(s^2+2)\,Y(s)=-\sqrt{6}+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}$$

$$X(s)=\frac{s^5+s^4+11s^3+10s^2+(6+\sqrt{6})\,s+4}{s\,(s+1)\,(s^4-16)}$$

$$Y(s)=\frac{(11\sqrt{6}-1)\,s^2+10\sqrt{6}\,s+8}{s\,(s+1)\,(s^4-16)}$$

$$x(t)=\frac{2+\sqrt{6}}{80}\sin(2t)-\frac{27-\sqrt{6}}{40}\cos(2t)-\frac{3+\sqrt{6}}{15}\,\mathrm{e}^{-t}+\frac{36+\sqrt{6}}{32}\,\mathrm{e}^{-2t}+\frac{96+\sqrt{6}}{96}\,\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{4}$$

$$y(t)=\frac{6-27\sqrt{6}}{40}\sin(2t)+\frac{3-\sqrt{6}}{40}\cos(2t)+\frac{7+6\sqrt{6}}{15}\,\mathrm{e}^{-t}-\frac{1+6\sqrt{6}}{16}\,\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1+16\sqrt{6}}{96}\,\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{2}$$

b)

$$(s+2)\,X(s)+(s+1)\,Y(s)=1+\frac{1}{s^2}$$

$$5\,X(s)+(s+3)\,Y(s)=\frac{2}{s^3}+1$$

$$X(s)=\frac{2s^3+s^2+s-2}{s^3\,(s^2+1)}$$

$$Y(s)=\frac{s^4-3s^3-3s+4}{s^3\,(s^2+1)}$$

$$x(t)=-t^2+t-3\,\cos t+\sin t+3$$

$$y(t)=2t^2-3t+5\,\cos t-4$$

Zadatak 4.22.

Za $t \geq 0$ primenom Laplasove transformacije rešiti sisteme integralnih jednačina:
a)

$$x(t) = 2t\,\mathrm{u}(t) - \int_0^t (t-v)\,x(v)\,dv + \int_0^t y(v)\,dv$$

$$y(t) = -2\,\mathrm{u}(t) - 4\,\int_0^t x(v)\,dv + 3\,\int_0^t (t-v)\,y(v)\,dv$$

b)

$$x(t) = 2\,\mathrm{u}(t) + \int_0^t y(v)\,dv$$

$$y(t) = (9t - t^2 - t^4)\,\mathrm{u}(t) + \int_0^t z(v)\,dv$$

$$z(t) = 15\,\mathrm{u}(t) + \int_0^t x(v)\,dv$$

Rešenje:

a) $x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\sqrt{3}\,t) - \frac{3}{2}\sinh t, \qquad y(t) = \cos(\sqrt{3}\,t) - 3\cosh t, \qquad t \geq 0$
b) $x(t) = 2\,(1 + 6\,t^2)\,\mathrm{u}(t), \quad y(t) = 24t\,\mathrm{u}(t), \quad z(t) = (15 + 2t + 4t^3)\,\mathrm{u}(t), \quad t \geq 0$

Zadatak 4.23.

Sistem je opisan sistemom diferencijalnih jednačina:

$$y_1''(t) - y_2(t) = 0, \qquad -y_1(t) + y_2''(t) = x(t).$$

Odrediti prinudni odziv sistema ako je pobuda oblika: $x(t) = \mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-a)$.

Rešenje:

Neka su $g_1(t)$ i $g_2(t)$ rešenja sistema

$$g_1''(t) - g_2(t) = 0, \qquad -g_1(t) + g_2''(t) = \mathrm{u}(t).$$

Primenom Laplasove transformacije dobija se

$$s^2\,G_1(s) - G_2(s) = 0, \qquad -G_1(s) + s^2\,G_2(s) = \frac{1}{s}.$$

Rešenje tog sistema glasi:

$$G_1(s) = \frac{1}{s\,(s^4-1)} = \frac{s}{s^2\,(s^2-1)\,(s^2+1)},$$

$$G_2(s) = \frac{s}{s^4-1} = \frac{s}{(s^2-1)\,(s^2+1)}.$$

Ako se dobijene funkcije rastave na parcijalne razlomke, dobija se:

$$G_1(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\,\frac{s}{s^2-1} + \frac{1}{2}\,\frac{s}{s^2+1},$$

$$G_2(s) = \frac{1}{2}\,\frac{s}{s^2-1} - \frac{1}{2}\,\frac{s}{s^2+1}.$$

Na osnovu toga je

$$g_1(t) = \frac{1}{2}\left(-2 + \cosh t + \cos t\right) \mathrm{u}(t),$$

$$g_2(t) = \frac{1}{2}\left(\cosh t - \cos t\right) \mathrm{u}(t).$$

Zbog linearnosti i vremenske invarijantnosti važi da su

$$y_1(t) = g_1(t) - g_1(t-a), \qquad y_2(t) = g_2(t) - g_2(t-a).$$

$$y_1(t) = \frac{1}{2}\left(-2 + \cosh t + \cos t\right) \mathrm{u}(t) - \frac{1}{2}\left(-2 + \cosh(t-a) + \cos(t-a)\right) \mathrm{u}(t-a)$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2}\left(\cosh t - \cos t\right) \mathrm{u}(t) - \frac{1}{2}\left(\cosh(t-a) - \cos(t-a)\right) \mathrm{u}(t-a)$$

Zadatak 4.24.

Sistem sa dva ulaza i dva izlaza opisan je sistemom diferencijalnih jednačina:

$$\frac{d}{dt} y_1(t) + y_1(t) + 2\,\frac{d}{dt} y_2(t) + 7\,y_2(t) = x_1(t),$$

$$-2\,y_1(t) + \frac{d}{dt} y_2(t) + 3\,y_2(t) = x_2(t).$$

a) Nacrtati blok dijagram sistema koristeći diferencijatore, sumatore i pojačavače.
b) Koristeći se Laplasovom transformacijom odrediti odziv sistema bez početnih uslova ako je $x_1(t) = \mathrm{u}(t)$ i $x_2(t) = -\mathrm{u}(t)$.
c) Nacrtati frekvencijsku karakteristiku prenosne funkcije $\left.\frac{Y_2(s)}{X_1(s)}\right|_{x_2(t)=0}$.

Rešenje:

a) Sistem jednačina može da se napiše u obliku:

$$y_1(t) = -\frac{d}{dt} y_1(t) - 2\,\frac{d}{dt} y_2(t) - 7\,y_2(t) + x_1(t),$$

$$y_2(t) = \frac{1}{3}\left(2\,y_1(t) - \frac{d}{dt} y_2(t) + x_2(t)\right).$$

Na osnovu toga je nacrtana blok šema sistema.
b) Primenom Laplasove transformacije, dobija se sistem jednačina:

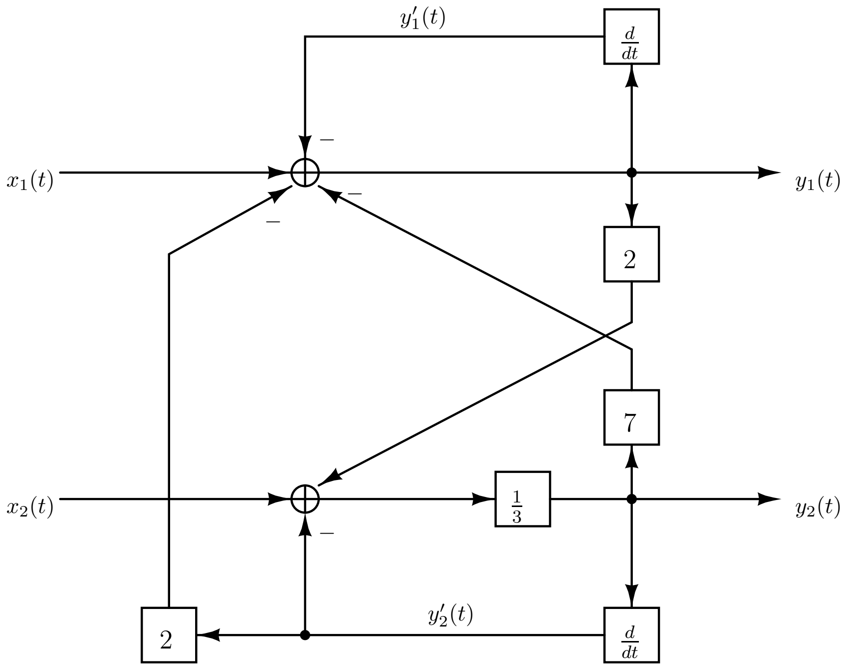
$$(s+1)\,Y_1(s) + (2s+7)\,Y_2(s) = X_1(s),$$

$$-2\,Y_1(s) + (s+3)\,Y_2(s) = X_2(s).$$

Rešavanjem sistema jednačina dobija se

$$Y_1(s) = \frac{(s+3)\,X_1(s) - (2s+7)\,X_2(s)}{s^2+8s+17} = \frac{3s+10}{s\,(s^2+8s+17)},$$

$$Y_2(s) = \frac{2\,X_1(s) + (s+1)\,X_2(s)}{s^2+8s+17} = \frac{1-s}{s\,(s^2+8s+17)}.$$



Slika 4.24.1.

Primenom inverzne Laplasove transformacije dobija se:

$$y_1(t) = \frac{1}{34}\,(20 + 4\,\mathrm{e}^{-4t}\,(-20\,\cos t + 22\,\sin t))\,\mathrm{u}(t),$$

$$y_2(t) = \frac{1}{34}\,(2 - 2\,\mathrm{e}^{-4t}\,(\cos t + 21\,\sin t))\,\mathrm{u}(t).$$

c) Tražena prenosna funkcija čiju frekvencijsku karakteristiku je potrebno nacrtati glasi:

$$H_{21}(s) = \frac{2}{s^2 + 8s + 17} = \frac{2}{s^2 + \dfrac{\omega_P\, s}{Q} + \omega_P^2}, \quad \omega_P = \sqrt{17} \approx 4, \quad Q = \frac{\sqrt{17}}{8} \approx \frac{1}{2}.$$

Na osnovu toga je

$$H_{21}(s) \approx \frac{2}{(s+4)^2}.$$

Na slici 4.24.2 je prikazana frekvencijska karakteristika.

Zadatak 4.25.

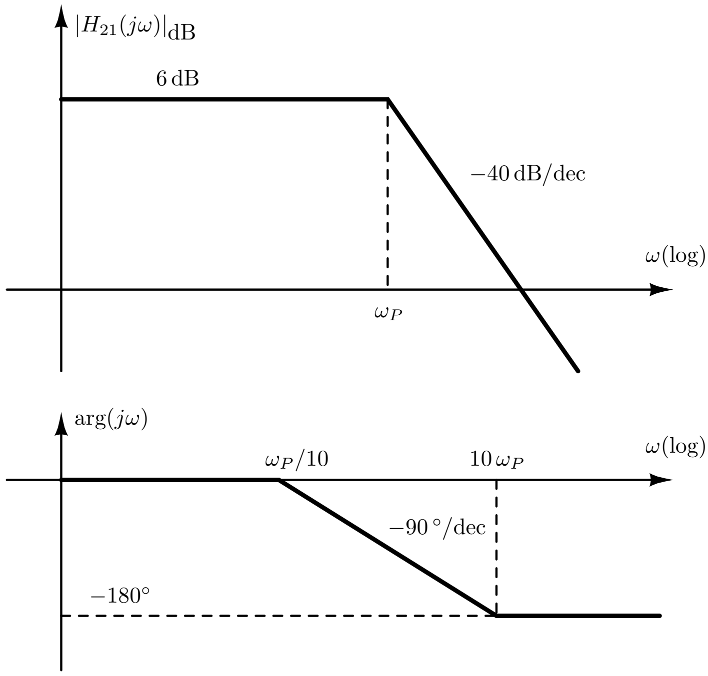
U kolu poznatih parametara L, C i $\rho = 2\sqrt{L/C}$ deluje generator konstantne struje. Prekidač je u položaju 1 i u kolu je stacionarno stanje. U trenutku $t = 0$ prekidač se prebacuje u položaj 2. Odrediti vremenski odziv struje i_1.

Rešenje:

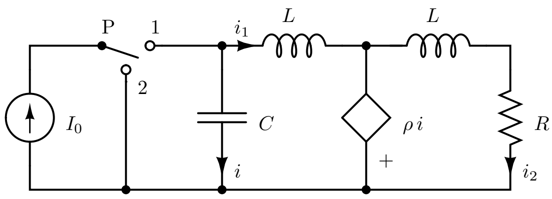
U stacionarnom stanju je jednosmerni režim, kondenzator je otvorena veza, a kalem je kratak spoj. Zbog toga je ispunjeno $i_{L1}(0^-) = I_0$, $i_{L2}(0^-) = 0$ i $v_C(0^-) = 0$.

Posle prebacivanja prekidača u položaj 2, treba odrediti odziv na početne uslove. Početni uslovi se mogu modelovati nezavisnim generatorima i kolom bez početnih uslova, slika 4.25.2.

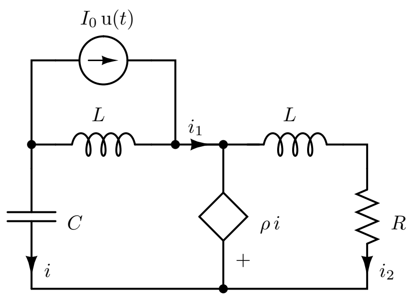
Ako se primeni Tevenenova teorema na nezavisni strujni generator, a impedanse predstave svojim slikama u kompleksnom domenu, dobija se kolo sa slike 4.25.3.



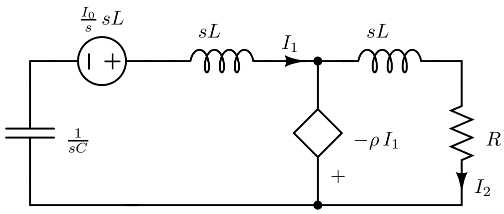
Slika 4.24.2.



Slika 4.25.1.



Slika 4.25.2.



Slika 4.25.3.

Tražena struja može da se dobije formiranjem jednačine za samo jednu konturu:

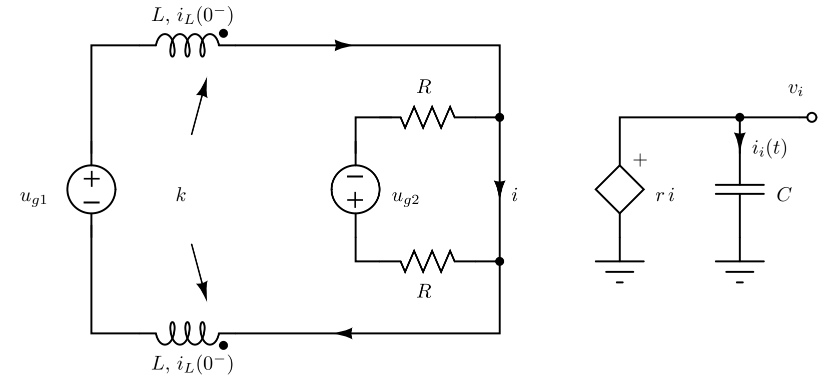
$$I_1(s) = \frac{\dfrac{I_0\, sL}{s} - \rho\, I_1(s)}{sL + \dfrac{1}{sC}},$$

$$I_1(s) = \frac{\dfrac{I_0\, sL}{s}}{\rho + sL + \dfrac{1}{sC}} = \frac{I_0\, LC\, s}{s^2\, LC + 2s\sqrt{LC} + 1} = \frac{I_0\, s}{\left(s + \dfrac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2} = \frac{I_0}{s + \dfrac{1}{\sqrt{LC}}} - \frac{I_0\, \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}{\left(s + \dfrac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2}.$$

$$i_1(t) = I_0\,(\mathrm{e}^{-\omega_0 t} - \omega_0 t\, \mathrm{e}^{-\omega_0 t})\,\mathrm{u}(t), \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Zadatak 4.26.

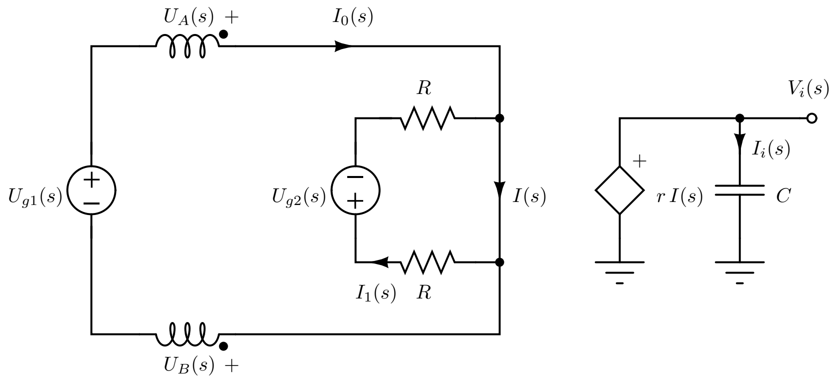
Za kolo sa slike 4.26.1 odrediti vremenski odziv struje na izlazu ako je $u_{g1}(t) = U_m\,\mathrm{u}(t)$, $u_{g2}(t) = U_m\,\sin(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$, a $\omega = \dfrac{R}{(1-k)\,L}$.



Slika 4.26.1.

Rešenje:

Na slici 4.26.2 je prikazano kolo sa veličinama predstavljenim u kompleksnom domenu. Za transformator



Slika 4.26.2.

koji se nalazi u kolu, slika 4.26.3, mogu da se postave sledeće jednačine:

$$U_A = sL_1\,I_A + sL_{12}\,I_B,$$

$$U_B = sL_2\,I_B + sL_{21}\,I_A,$$

$$L_1 = L_2 = L,$$

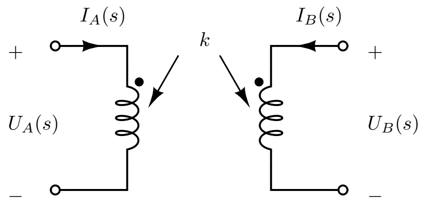
$$L_{12} = L_{21} = k\,\sqrt{L_1\,L_2} = kL.$$

Pošto je $I_A = -I_0$, $I_B = I_0$, sleduje da je

$$U_A = -sL\,I_0 + skL\,I_0 = -sL\,I_0\,(1-k),$$

$$U_B = -skL\,I_0 + sL\,I_0 = sL\,I_0\,(1-k),$$

$$U_B = -U_A.$$



Slika 4.26.3.

U vremenskom domenu to je $v_B(t) = -v_A(t) = L\,(1-k)\,\frac{di_0}{dt}$.

Sada se mogu napisati jednačine za dve konture koje sadrže generatore:

$$U_{g1}(s) + U_A(s) - U_B(s) = 0 \Rightarrow \frac{U_m}{s} = 2L\,(1-k)\,(s\,I_0(s) - i_0(0)),$$

$$I_0(s) = \frac{U_m}{sL\,(1-k)\,s^2} + \frac{i_0(0)}{s}.$$

Pošto je $\omega = \frac{R}{(1-k)\,L}$, sleduje da je $I_0(s) = \frac{\omega\,U_m}{2R\,s^2} + \frac{i_0(0)}{s}$. Za drugu konturu važi:

$$I_1(s) = -\frac{U_{g2}(s)}{2R} = -\frac{U_m}{2R}\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Pošto je $I = I_0 + I_1$, sleduje

$$I_i(s) = \frac{rI(s)}{1/sC} = rsC\,I(s) = rC\,\frac{\omega\,U_m}{2R\,s} + rC\,i_0(0) - \omega\,rC\,\frac{U_m}{2R}\,\frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije dobija se

$$i_i(t) = \left(rC\,\frac{\omega\,U_m}{2R} - \omega\,rC\,\frac{U_m}{2R}\,\cos(\omega t)\right)\,\mathrm{u}(t) + rC\,i_0(0)\,\delta(t),$$

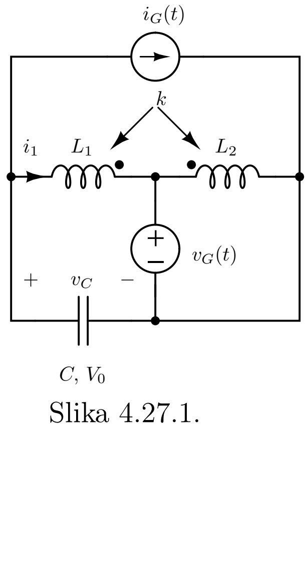
$$i_i(t) = \omega\,rC\,\frac{U_m}{2R}\,(1-\cos(\omega t))\,\mathrm{u}(t) + rC\,i_0(0)\,\delta(t).$$

Zadatak 4.27.

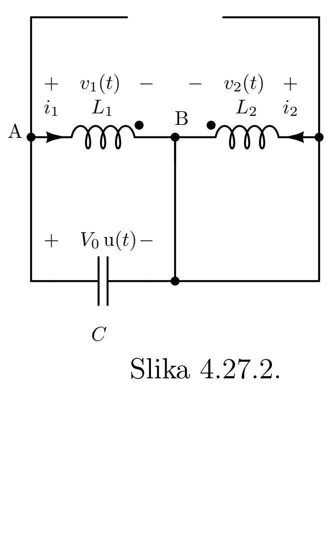
Neka je u kolu sa slike 4.27.1 u trenutku $t = 0$ napon na kondenzatoru $v_C(0) = V_0$ i ako su $i_G(t) = I\,\mathrm{u}(t)$, $v_G(t) = V\,\mathrm{u}(t)$, $L_1 = L_2 = L$, a koeficijent sprege transformatora k.

a) Primenom Laplasove transformacije odrediti sopstveni odziv struje $i_1(t)$ za $t > 0$.

b) Primenom Laplasove transformacije odrediti prinudni odziv struje $i_1(t)$ kola za $t > 0$.



Slika 4.27.1.



Slika 4.27.2.

Rešenje:

a) Sopstveni odziv je odziv na akumulisanu energiju sa nultom pobudom. Ako se ukidanjem pravih nezavisnih generatora anulira stvarna pobuda u kolu, a akumulisana energija modeluje nezavisnim generatorom koji prouzrokuje sopstveni odziv, dobija se kolo sa slike 4.27.2. Kao što je poznato iz teorije kola, element sa akumulisanom energijom može da se modeluje kao veza istog tog elementa bez akumulisane energije i nezavisnog generatora, slika 4.27.3.

Pošto je $L_{12} = L_{21} = k\sqrt{L_1 L_2} = k\,L$ prema slici 4.27.3, za transformator je ispunjeno:

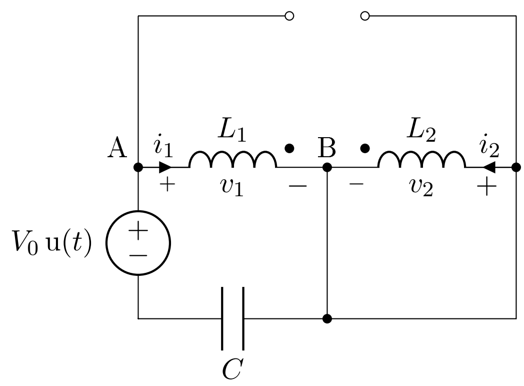
$$V_1(s) = sL_1\,I_1(s) + sL_{12}\,I_2(s) = sL\,I_1(s) + skL\,I_2(s),$$

$$V_2(s) = sL_{21}\,I_1(s) + sL_2\,I_2(s) = skL\,I_1(s) + sL\,I_2(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad k\,I_1(s) = -I_2(s).$$

Eliminacijom struje $I_2(s)$ se dobija da je

$$V_1(s) = sL\,I_1(s) + skL\,(-k\,I_1(s)) = sL\,(1-k^2)\,I_1(s).$$

Pošto je $\frac{V_1(s)}{I_1(s)} = sL\,(1-k^2)$, ekvivalentna impedansa između tačaka A i B je jednaka $Z_{AB} = sL\,(1-k^2)$. Sada se određivanje struje kalema L_1 svodi na rešavanje rednog LC kola.



Slika 4.27.3

$$I_1(s) = \frac{\frac{V_0}{s}}{Z_C + Z_{AB}} = \frac{V_0}{s}\,\frac{1}{\frac{1}{sC} + sL\,(1-k^2)}$$

$$I_1(s) = \frac{V_0}{s}\,\frac{sC}{1 + s^2LC\,(1-k^2)} = V_0\,\omega_0 C\,\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + s^2}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(1-k^2)\,LC}}$$

Na osnovu toga je očigledno da je $i_1(t) = V_0\omega_0 C\,\sin(\omega_0 t)$ za $t \geq 0$.

b) Prinudni odziv se dobija rešavanjem kola bez početnih uslova. Pri tome je moguće primeniti princip superpozicije $i_1(t) = i_{11}(t) + i_{12}(t)$, što je ilustrovano na slici 4.27.4.

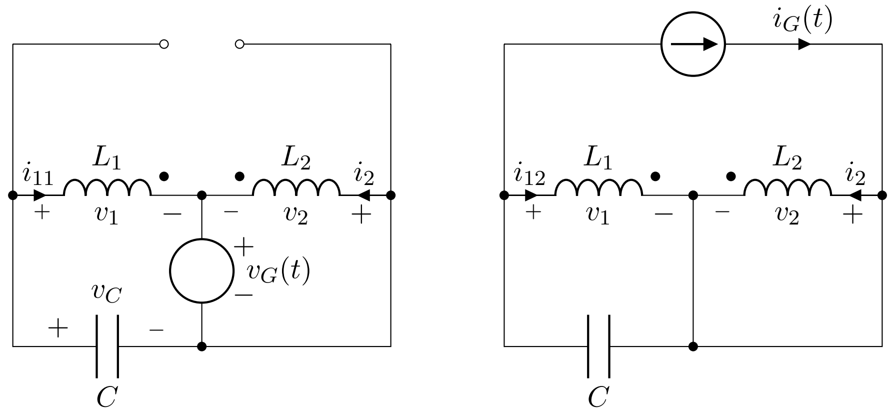
U slučaju kada je eliminisan strujni izvor važi

$$V_1 = V_C - V_G = sL\,I_{11} + skL\,I_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_C - V_G}{sL} = I_{11} + k\,I_2,$$

$$V_2 = -V_G = skL\,I_{11} + sL\,I_2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{V_G}{sL} = k\,I_{11} + I_2,$$

pa je

$$\frac{V_C - V_G}{sL} = I_{11} - k\,\left(\frac{V_G}{sL} + k\,I_{11}\right).$$



Slika 4.27.4.

Pošto je $V_C = Z_C\, I_C$, $I_C = -I_{11}$, važi da je $V_C = -\frac{I_{11}}{sC}$. Zamenom u prethodne jednačine je

$$I_{11} = -\frac{(1-k)\, sC}{s^2 LC\,(1-k^2)+1}\, V_G = - - \frac{(1-k)\, CV}{s^2 LC\,(1-k^2)+1},$$

odnosno

$$i_{11}(t) = -\frac{V}{(1+k)\, L\omega_0}\, \sin(\omega_0 t).$$

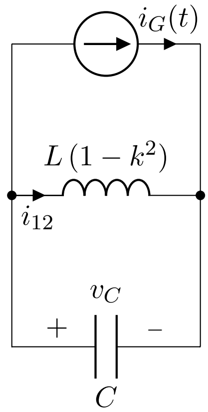
U drugom slučaju važi da je

$$V_2 = sL\, I_2 + skL\, I_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = -k\, I_{12},$$

pa je

$$V_1 = sL\, I_{12} + skL\, I_2 = sL\,(1-k^2)\, I_{12},$$

što daje šemu sa slike 4.27.5.



Slika 4.27.5.

Na osnovu strujnog razdelnika sa slike 4.27.5 je

$$I_{12} = -I_G\, \frac{Z_C}{Z_L + Z_C} = -I_G\, \frac{1}{s^2\, LC\,(1-k^2)+1} = -\frac{I}{s}\, \frac{\omega_0^2}{s^2+\omega_0^2},$$

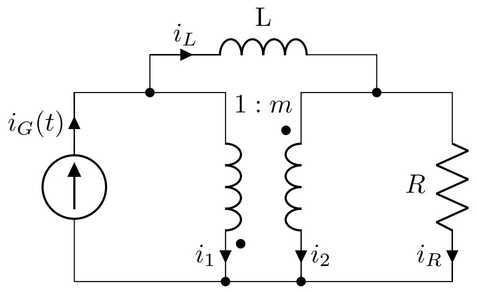
$$I_{12} = -\frac{I}{s} + \frac{s\, I}{s^2+\omega_0^2},$$

$$i_{12}(t) = -I\,(1-\cos(\omega_0 t))\, \mathrm{u}(t).$$

$$i_1(t) = -\frac{V}{(1+k)\, L\omega_0}\, \sin(\omega_0 t) - I\,(1-\cos(\omega_0 t))\, \mathrm{u}(t)$$

Zadatak 4.28.

U kolu sa slike 4.28.1 transformator je idealan, a struja kalema u trenutku $i_L(0) = I_0$. Ako je $i_G(t) = I_m\,\mathrm{u}(t) + \phi\delta(t-T)$, odrediti
a) sopstveni odziv struje kalema primenom Laplasove transformacije.
b) prinudni odziv struje kalema primenom Laplasove transformacije.
c) odziv struje kalema u ustaljenom stanju.



Slika 4.28.1.

Rešenje:

Na osnovu jendačina transformatora je

$$i_1 - m\,i_2 = 0$$

i

$$v_2 = -m\,v_1.$$

Važe jednačine u kolu:

$$i_G = i_L + i_1 = i_L + m\,i_2,$$

$$i_L = i_2 + i_R = \frac{1}{m}(i_G - i_L) + i_R \quad \Rightarrow \quad i_R = \frac{m+1}{m}\,i_L - \frac{1}{m}\,i_G,$$

$$v_2 = R\,i_R = -v_L + v_1 = -L\,\frac{di_L}{dt} - \frac{R\,i_R}{m}.$$

$$\frac{R}{L}\left(\frac{m+1}{m}\right) i_R = -\frac{di_L}{dt}$$

$$\frac{R}{L}\left(\frac{m+1}{m}\right)^2 i_L - \frac{R}{L}\,\frac{m+1}{m^2}\,i_G = -\frac{di_L}{dt}$$

$$\frac{di_L}{dt} + A\,i_L = B\,i_G, \quad A = \frac{R}{L}\left(\frac{m+1}{m}\right)^2, \quad B = \frac{R}{L}\,\frac{m+1}{m^2}$$

Nakon primene Laplasove transformacije je

$$sI_L(s) - i_L(0) + A\,I_L(s) = B\,I_G(s),$$

$$I_L(s)(s+A) = I_0 + \frac{B\,I_m}{s} + B\,\phi\,\mathrm{e}^{-sT},$$

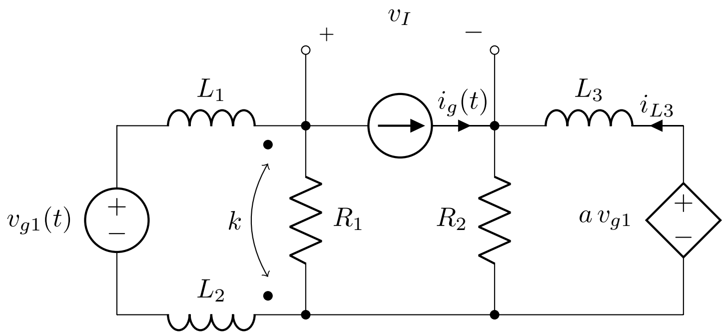
$$I_L(s) = \frac{I_0}{s+A} + \frac{B\,I_m}{As} - \frac{B\,I_m}{A\,(s+A)} + \frac{B\,\phi\,\mathrm{e}^{-sT}}{s+A}.$$

Dobija se

$$i_L(t) = \underbrace{I_0\,\mathrm{e}^{-At}\,\mathrm{u}(t)}_{\text{sopstveni}} + \underbrace{\overbrace{\frac{I_m}{m+1}\,\mathrm{u}(t)}^{\text{ustaljeni}} - \frac{I_m}{m+1}\,\mathrm{e}^{-At}\,\mathrm{u}(t) + B\,\phi\,\mathrm{e}^{-A\,(t-T)}\,\mathrm{u}(t-T)}_{\text{prinudni}}.$$

Zadatak 4.29.

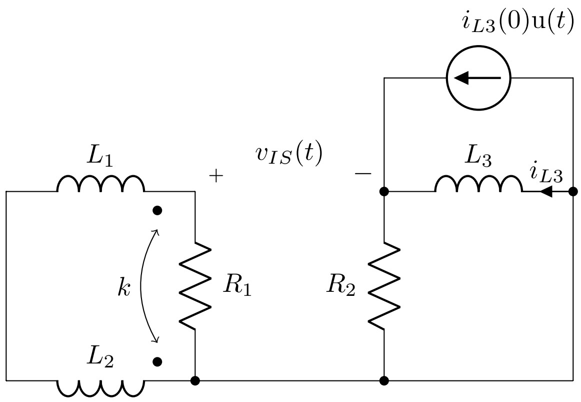
Za kolo sa slike 4.29.1 poznato je $k = 0.9$, $a = 1$, $L_1 = L_2 = 1$ mH, $L_3 = 100$ μH, $R_1 = R_2 = 1$ kΩ, $v_{g1}(t) = 1\ \mathrm{V}\,\mathrm{u}(t)$, $i_g(t) = 1\ \mathrm{mA}\,\mathrm{u}(t)$, $i_{L1}(0) = i_{L2}(0) = 0$ i $i_{L3}(0) = 2$ mA. Odrediti:
a) sopstveni odziv kola primenom Laplasove transformacije.
b) prinudni odziv kola primenom Laplasove transformacije.
c) odziv kola u ustaljenom stanju.



Slika 4.29.1.

Rešenje:

a) Sopstveni odziv kola se određuje na početne uslove. Ekvivalentna šema koja se koristi za određivanje sopstvenog odziva je prikazana na slici 4.29.2.



Slika 4.29.2.

Kroz transformator nema struje, pa je napon na izlazu jednak

$$V_{IS}(s) = -\frac{i_{L3}(0)}{s}\,(R_2 \parallel Z_{L3}) = -\frac{i_{L3}(0)\,R_2}{\frac{R_2}{L_3} + s},$$

$$v_{IS}(t) = -2\ \mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{u}(t), \quad \tau = \frac{L_3}{R_2} = 100\ \mathrm{ns}.$$

b) Pošto je $L_1 = L_2 = L$ i $v_{g1}(t) = R_1\,i_g(t) = R_2\,i_g(t)$, sa slike 4.29.3 važi da je

$$V_{g1}(s) - 2sL\,I_1(s) + 2skL\,I_1(s) = R_1\,(I_1(s) - I_g(s)) \quad \Rightarrow \quad I_1(s) = \frac{2\,V_{g1}(s)}{2\,(1-k)\,sL + R_1},$$

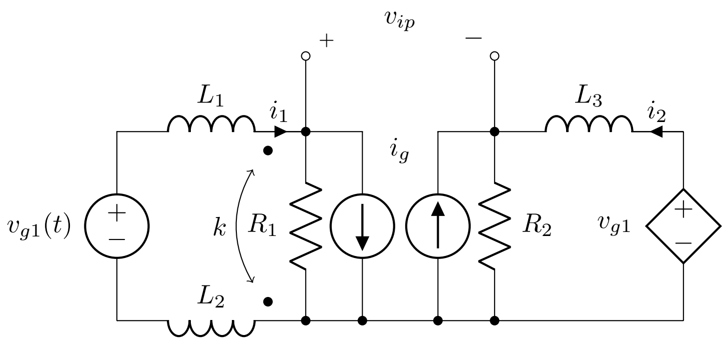
$$V_{g1}(s) - sL_3\,I_2(s) = R_2\,(I_g(s) + I_2(s)) \quad \Rightarrow \quad I_2(s) = 0.$$

Dobija se

$$V_{IP}(s) = R_1\,(I_1(s) - I_g(s)) - R_2\,I_g(s) = R_1\,I_1(s) - 2R_1\,I_g(s) = \frac{2\,V_{g1}(s)\,R_1}{2\,(1-k)\,sL + R_1} - 2\,V_{g1}(s),$$

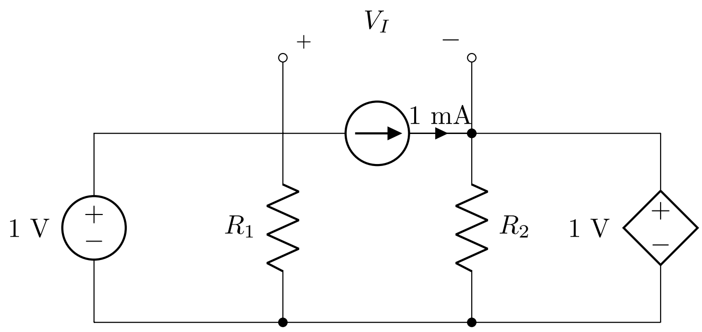
$$V_{IP}(s) = \frac{-4\,(1-k)\,sL\,V_{g1}(s)}{2\,(1-k)\,sL + R_1} = \frac{-4\,(1-k)\,sL\,\frac{V_{g1}}{s}}{2\,(1-k)\,sL + R_1} = \frac{-2\,V_{g1}}{s + \frac{R_1}{2\,(1-k)\,L}},$$

$$v_{IP}(t) = -2\ \mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{u}(t), \qquad \tau = \frac{2\,(1-k)\,L}{R_1} = 200\ \mathrm{ns}.$$



Slika 4.29.3.

c) U ustaljenom stanju je završen prelazni proces, pa je napon na kalemovima jednak nuli. Važi šema sa slike 4.29.4. Vidi se da je $V_I = 0$.



Slika 4.29.4.

Zadatak 4.30.

Za kolo sa slike 4.30.1:
a) Odrediti kompleksno pojačanje $A(s) = V_I(s)/V_G(s)$.
b) Nacrtati amplitudsku i faznu karakteristiku pojačanja.
c) Odrediti impulsni odziv kola bez početnih uslova.
d) Ako je u trenutku $t = 0$ struja kalema jednaka nuli, a napon na kondenzatoru iznosi $v_C(0) = 1$ V, odrediti $v_I(t)$ za $t \geq 0$, $v_G(t) = \frac{\delta(t)}{\omega_0}$.
Poznato je $\frac{R}{L} = 20\omega_0$, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ i operacioni pojačavači su idealni.

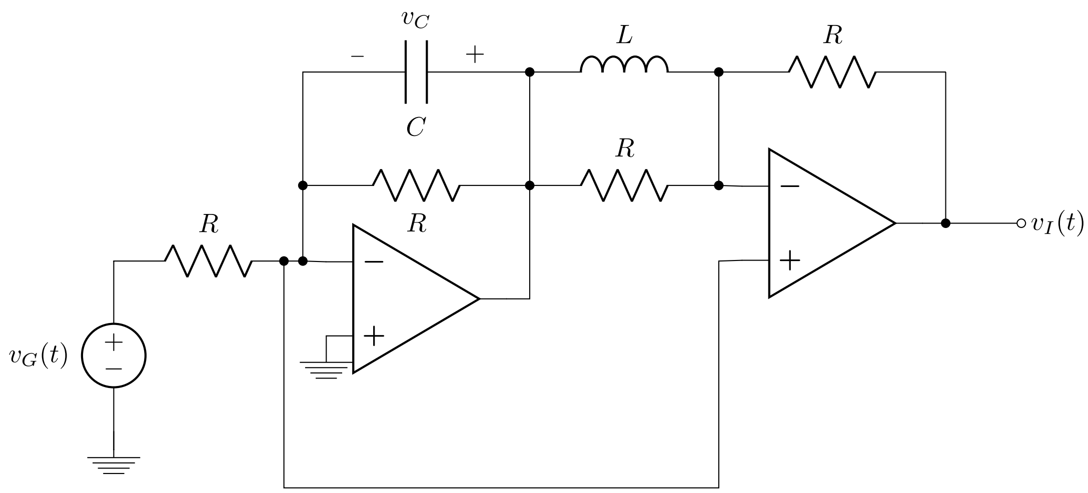
Rešenje:

a) Pojednostavljen izgled kola je prikazan na slici 4.30.2. Dobija se

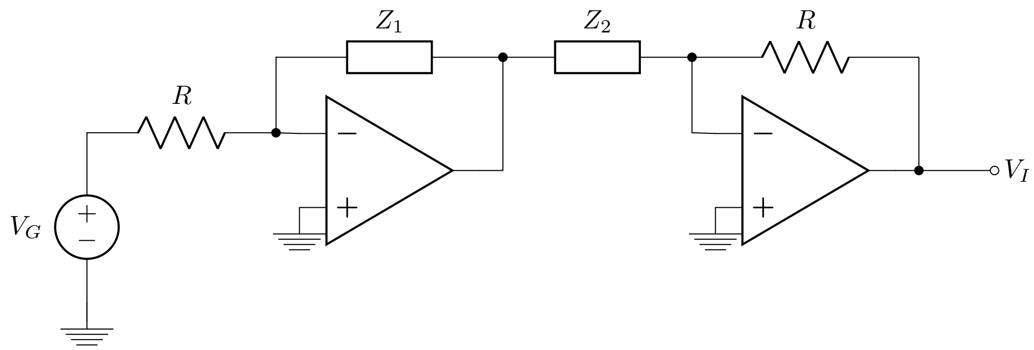
$$V_I(s) = -\frac{Z_1}{R}\left(-\frac{R}{Z_2}\right)V_G(s) \quad \Rightarrow \quad A(s) = \frac{Z_1}{Z_2},$$

$$Z_1 = R \parallel \frac{1}{sC} = \frac{1}{C}\,\frac{1}{s + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{C}\,\frac{1}{s + \omega_0},$$

$$Z_2 = R \parallel sL = \frac{sR}{s + \frac{R}{L}} = R\,\frac{s}{s + 20\omega_0},$$



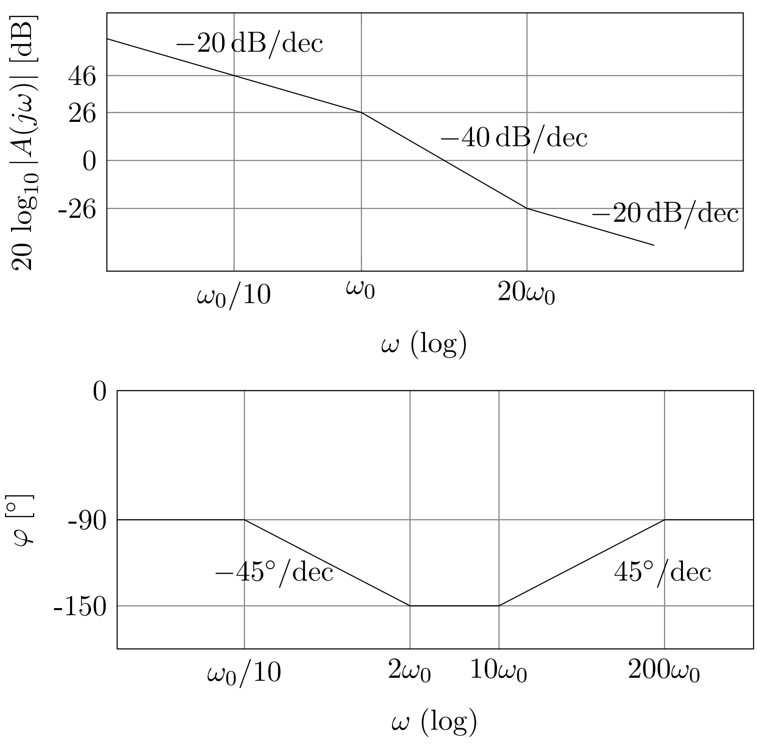
Slika 4.30.1.



Slika 4.30.2.

$$A(s) = \frac{1}{RC}\,\frac{s+20\omega_0}{s\,(s+\omega_0)} = \frac{\omega_0}{s}\,\frac{s+20\omega_0}{s+\omega_0}.$$

b) Na slici 4.30.3 su prikazane amplitudska i fazna karakteristika kola sa slike 4.30.1.

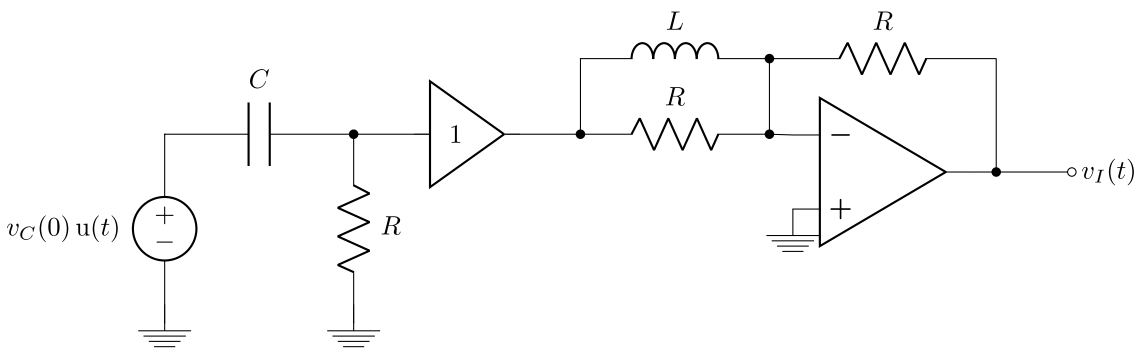


Slika 4.30.3.

c) Impulsni odziv je

$$v_{hI}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{A(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_0}{s}\,\frac{s+20\omega_0}{s+\omega_0}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{20\omega_0}{s} - \frac{19\omega_0}{s+\omega_0}\right\} = \omega_0\,\left(20 - 19\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}\right)\,\mathrm{u}(t).$$

d) Sopstveni odziv se dobija tako što se akumulisana energija kondenzatora predstavi nezavisnim generatorom. Pošto se kraj generatora nalazi na virtuelnoj masi pojačavača, a kroz otpornik R vezan na generator v_G (koji je sada kratko spojen) ne protiče struja, ekvivalentno kolo izgleda kao na slici 4.30.4.



Slika 4.30.4.

$$V_{IS}(s) = \frac{v_C(0)}{s}\,\frac{R}{\frac{1}{sC}+R}\left(-\frac{R}{Z_2}\right) = -\frac{v_C(0)}{s+\omega_0}\,\frac{s+20\omega_0}{s},$$

$$v_{IS}(t) = -v_C(0)\,(20 - 19\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t})\,\mathrm{u}(t) = -(20 - 19\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t})\,\mathrm{u}(t).$$

Prinudni odziv je

$$v_{IP}(t) = \frac{v_{hI}(t)}{\omega_0} = (20 - 19\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t})\,\mathrm{u}(t).$$

Ukupan odziv je

$$v_I(t) = v_{IS}(t) + v_{IP}(t) = 0.$$

Zadatak 4.31.*

a) Odrediti $y(t) = x(t) * x(t)$ ako je $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{u}(t)$.

b) Primenom teoreme o konvoluciji i na osnovu prethodne tačke odrediti $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{u}(t)\right\}$.

Rešenje:

a) Primenom konvolucije

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{u}(t) * \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{u}(t) = \mathrm{u}(t)\,\int_0^t \frac{dz}{\sqrt{z\,(t-z)}}$$

i smenom $v = \frac{z}{t}$, $dz = t\,dv$ dobija se

$$y(t) = \mathrm{u}(t)\,\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{v\,(1-v)}}.$$

Primenom smene $v = \sin^2\theta$, $dv = 2\,\sin\theta\,\cos\theta\,d\theta$ dobija se

$$y(t) = \mathrm{u}(t)\,\int_0^{\pi/2} 2\,d\theta = \pi\,\mathrm{u}(t).$$

Prema tome je $Y(s) = \frac{\pi}{s}$.
b) Kako je $Y(s) = X^2(s)$, to je $X(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$.

Zadatak 4.32.*

Primenjujući teoreme Laplasove transformacije, odrediti sliku sledećih funkcija:
a) $x(t) = \sqrt{t}\,\mathrm{u}(t) * \sqrt{t}\,\mathrm{u}(t)$,
b) $x(t) = \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{t}\,\mathrm{u}(t)$,
c) $x(t) = t^n\sqrt{t}\,\mathrm{u}(t)$,
d) $x(t) = \int_0^t \dfrac{\mathrm{e}^{-\tau}}{\sqrt{\tau}}\,d\tau$.

Rešenje:

a) Prvi način: Na osnovu zadatka 4.31 je $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{u}(t)\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$. Kako je $\sqrt{t} = t\,\frac{1}{\sqrt{t}}$, sleduje da je

$$\mathcal{L}\left\{\sqrt{t}\,\mathrm{u}(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{t\,\frac{\mathrm{u}(t)}{\sqrt{t}}\right\} = -\frac{d}{ds}\sqrt{\frac{\pi}{s}} = -\sqrt{\pi}\,\frac{ds^{-1/2}}{ds} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,s^{3/2}}.$$

$$X(s) = \frac{\pi}{4\,s^3}$$

Drugi način: Pošto je $x(t) = \mathrm{u}(t)\int_0^t \sqrt{\tau\,(t-\tau)}\,d\tau$, smenom $\tau = t\,\sin^2(\theta)$ dobija se da je $d\tau = 2t\,\sin(\theta)\,\cos(\theta)\,d\theta$. Za $t \geq 0$ važi

$$x(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{t\,\sin^2(\theta)\,(t - t\,\sin^2(\theta)}\right) 2t\,\sin(\theta)\,\cos(\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t^2\,\sin^2(\theta)\,\cos^2(\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{t^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2\theta)\,d\theta = \frac{t^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(4\theta))\,d\theta = \frac{\pi}{8}\,t^2.$$

Znači da je $x(t) = \frac{\pi\,t^2}{8}$, pa je zbog toga $X(s) = \frac{\pi}{4\,s^3}$.
b) Na osnovu prethodne tačke je $X(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,(s+2)^{3/2}}$.
c) Nalaženjem više izvoda se može pokazati da je $X(s) = \sqrt{\pi}\,\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2^{n+1}}\,s^{-\frac{2n+3}{2}}$. Primenom matematičke indukcije vidi se da je:

1. za $n = 1$, $X(s) = \sqrt{\pi}\,\frac{3}{4}\,s^{-\frac{5}{2}}$, pa formula važi.
2. pretpostavimo da važi za $n-1$, $X(s) = \sqrt{\pi}\,\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\,s^{-\frac{2n+1}{2}}$.
3. onda je za n, $X(s) = (-1)\,\frac{d}{ds}\left(\sqrt{\pi}\,\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\,s^{-\frac{2n+1}{2}}\right) = \sqrt{\pi}\,\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2^{n+1}}\,s^{-\frac{2n+3}{2}}$.

d) $X(s) = \dfrac{1}{s}\sqrt{\dfrac{\pi}{s+1}}$

Zadatak 4.33.*

Sistem je opisan linearnom diferencijalnom jednačinom sa vremenski promenljivim koeficijentima:

$$t\,y'''(t) + 2\,y''(t) + y'(t) + (t-1)\,y(t) = 0.$$

Odrediti odziv sistema na početne uslove $y(0) = -y'(0) = y''(0) = 1$.

Rešenje:

Uzimajući u obzir teoremu o izvodu slike $\mathcal{L}\{t\,y(t)\} = -\frac{d}{ds}Y(s)$ i primenom Laplasove transformacije na polaznu diferencijalnu jednačinu dobija se:

$$-\frac{d}{ds}\left(s^3 Y(s) - s^2 y(0) - s\,y'(0) - y''(0)\right) + 2s^2 Y(s) - 2s\,y(0) - 2\,y'(0) + s\,Y(s) - y(0) - Y(s) - \frac{d}{ds}Y(s) = 0,$$

$$-\frac{d}{ds}\left(s^3 Y(s) - s^2 + s - 1\right) + 2s^2 Y(s) - 2s + 2 + s\,Y(s) - 1 - Y(s) - \frac{d}{ds}Y(s) = 0,$$

$$-(s^3+1)\,Y'(s) - (s^2 - s + 1)\,Y(s) = 0,$$

$$(s+1)\,Y'(s) + Y(s) = 0.$$

Odavde je

$$\frac{Y'(s)}{Y(s)} = -\frac{1}{s+1} \quad\Rightarrow\quad \frac{dY}{Y} = -\frac{ds}{s+1},$$

pa se rešavanjem diferencijealne jednačine dobija $\ln(Y(s)) = -\ln(s+1) + C$, odnosno $Y(s) = \frac{C}{s+1}$, pa je

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{u}(t).$$

Kada se uvrste početni uslovi $y(0) = 1$, dobija se $C = 1$, pa je $y(t) = \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{u}(t)$.

Laplasova transformacija većine funkcija se može naći pomoću simboličkog paketa u MATLAB-u. Sledeći program ilustruje nalaženje slike signala.

```
syms a b t
f = t * cos(b * t);
f1 = t * sin(b * t);
f2 = t * exp(-a * t) * cos(b * t);
g = simple(laplace(f));
g1 = simple(laplace(f1));
g2 = simple(laplace(f2));
pretty(g)
pretty(g1)
pretty(g2)
```

Rezultat izvršenja programa je sledeći:

```
     2    2
    b   - s
- ----------
    2    2 2
  (b   + s )

   2 b s
----------
  2    2 2
(b   + s )

(a + s) (2 a + 2 s)         1
------------------- - -------------
          2    2 2           2    2
  ((a + s)   + b )      (a + s)   + b
```

Inverzna Laplasova transformacija se nalazi takođe jednostavno primenom MATLAB-ovog simboličkog paketa, što ilustruje sledeći program.

```
syms a b t s
f = (s^3 + s)/((s^2+4)*(s+1));
g = simple(ilaplace(f));
pretty(g)
```

Rezultat izvršavanja programa je:

```
           2 exp(-t)   sin(2 t) 6   cos(2 t) 3
dirac(t) - --------- - ---------- - ----------
               5            5            5
```

Glava 6

Z transformacija

6.1 Tablice Z transformacije

Tabela 6.1: Osnovni transformacioni parovi (bez oblasti konvergencije)

	$x[n]$	$X(z)$
1	$\delta[n]$	1
2	$a^n\,\mathrm{u}[n]$	$\dfrac{z}{z-a}$
3	$n\,a^n\,\mathrm{u}[n]$	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$
4	$\dfrac{n\,(n+1)}{2}\,\mathrm{u}[n]$	$\dfrac{z^2}{(z-1)^3}$
5	$\binom{n+k}{k}\,a^n\,\mathrm{u}[n]$	$\left(\dfrac{z}{z-a}\right)^{k+1}$
6	$\binom{n+m}{k}\,\mathrm{u}[n], \quad m \geq 0$	$\dfrac{z^{m+1}}{(z-1)^{k+1}}$
7	$(-1)^n\,\binom{m}{n}\,\mathrm{u}[n], \quad m \geq 0$	$\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^{m}$
8	$a^n\,\cos[n\theta]\,\mathrm{u}[n]$	$\dfrac{z\,(z-a\cos(\theta))}{z^2-2az\,\cos(\theta)+a^2}$
9	$a^n\,\sin[n\theta]\,\mathrm{u}[n]$	$\dfrac{az\,\sin(\theta)}{z^2-2az\,\cos(\theta)+a^2}$
10	$a^n\,\cosh[n\theta]\,\mathrm{u}[n]$	$\dfrac{z\,(z-a\cosh(\theta))}{z^2-2az\,\cosh(\theta)+a^2}$
9	$a^n\,\sinh[n\theta]\,\mathrm{u}[n]$	$\dfrac{az\,\sinh(\theta)}{z^2-2az\,\cosh(\theta)+a^2}$

6.2 Definicije i teoreme

Određivanje prstena konvergencije unilateralne Z transformacije

Neka je Z transformacja niza $x[n]$ data sa $X(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x[n]\, z^{-n}$ kompleksan red konvergentan u prstenu $R_1 < |z| < R_2$, gde je $0 < R_1 < R_2 < +\infty$. Prsten konvergencije (oblast, region, ROC) ovog reda može se ispitati primenom bilo kog od odgovarajućih kriterijuma iz teorije kompleksnih redova. Primenom Dalemberovog kriterijuma prsten konvergencije se određuje na sledeći način:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x[n+1]\, z^{-(n+1)}}{x[n]\, z^{-n}} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x[n+1]}{x[n]} \right| \frac{1}{|z|} < 1,$$

što daje

$$|z| > \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x[n+1]}{x[n]} \right|,$$

odakle proizilazi da je $R_1 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x[n+1]}{x[n]} \right|$. Za R_2 se može usvojiti bilo koja realna vrednost s tim da su svi polovi funkcije $X(z)$ unutar diska usvojenog poluprečnika R_2.

Inverzna Z transformacija

Neka je $X(z)$ slika niza $x[n]$. Tada se niz $x[n]$ može odrediti na osnovu konturnog integrala

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_{\Gamma^+} z^{n-1}\, X(z)\, dz,$$

gde kontura Γ obuhvata sve polove funkcije $X(z)$. Na osnovu Košijeve teoreme ostataka sleduje:

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}_{z=a_k} z^{n-1}\, X(z),$$

gde su a_1, a_2, ..., a_N svi polovi funkcije $z^{n-1}\, X(z)$. Pri tome treba voditi računa da za male vrednosti promenljive n funkcija $z^{n-1}\, X(z)$ može pored polova koji potuču od funkcije $X(z)$ imati i dodatni pol u nuli.

Teorema 1: Linearnost

Neka su $x[n]$ i $y[n]$ nizovi takvi da $\mathcal{Z}\{x[n]\}$ postoji za $r_1 < |z| < R_1$, a $\mathcal{Z}\{y[n]\}$ za $r_2 < |z| < R_2$. Tada važi $\mathcal{Z}\{\lambda\, x[n] + \mu\, y[n]\} = \lambda\, \mathcal{Z}\{x[n]\} + \mu\, \mathcal{Z}\{y[n]\}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ROC : $\max(r_1, r_2) < |z| < \min(R_1, R_2)$.

Teorema 2: Teorema o pomeranju argumenta

a) $\mathcal{Z}\{x[n+1]\} = z\, \mathcal{Z}\{x[n]\} - z\, x[0]$

b) $\mathcal{Z}\{x[n+p]\} = z^p \left(X(z) - \sum\limits_{k=0}^{p-1} x[k]\, z^{-k} \right)$, sa signal $x[n]$ koji može i ne mora biti kauzalan i $p > 0$

c) $\mathcal{Z}\{x[n-p]\} = z^{-p}\, X(z)$, ako je signal $x[n]$ kauzalan i $p > 0$

d) $\mathcal{Z}\{x[n-p]\} = z^{-p} \left(X(z) + \sum\limits_{k=-1}^{-p} x[k]\, z^{-k} \right)$, za nekauzalan signal $x[n]$ i $p > 0$

Dokaz:

a) $\mathcal{Z}\{x[n+1]\} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x[n+1]\, z^{-n} = z \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x[n+1]\, z^{-(n+1)} = z \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x[n]\, z^{-n} - x[0] \right) = z\,(X(z) - x[0])$

b) $\mathcal{Z}\{x[n+p]\} = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n+p]\, z^{-n} = z^p \sum_{n=0}^{+\infty} x[n+p]\, z^{-(n+p)} = z^p X(z) - z^p\, x[0] - z^{p-1}\, x[1] - \ldots - z^0\, x[p]$

c) $\mathcal{Z}\{x[n-p]\} = z^{-p} \sum_{n=0}^{+\infty} x[n-p]\, z^{-(n-p)}$, a pošto je $x[n] = 0$ za $n < 0$, sleduje dokaz.

Teorema 3: Teorema o množenju eksponencijalnim nizom – skaliranje signala u kompleksnom domenu

Neka je $a \in \mathbb{C}$. Tada važi $\mathcal{Z}\{a^n\, x[n]\} = X\left(\frac{z}{a}\right)$, $|a|\, r < |z| < |a|\, R$.

Dokaz:

$$\mathcal{Z}\{a^n\, x[n]\} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n\, x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]\, \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

ROC: Kako je $r < \left|\frac{z}{a}\right| < R$, dobija se da je $|a|\, r < |z| < |a|\, R$.

Teorema 4: Teorema o slici konjugovano kompleksnog argumenta

$$\mathcal{Z}\{x^*[n]\} = X^*(z^*)$$

Dokaz:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^*[n]\, z^{-n} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x[n]\, (z^{-n})^*\right)^* = X^*(z^*)$$

ROC: Pošto je ispunjeno da je $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^*[n+1]}{x^*[n]}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x[n+1]}{x[n]}\right|$, oblast konvergencije se ne menja.

Teorema 5: Teorema o slici konačne sume originala

Neka je $y[n] = \sum_{k=0}^{n-1} x[k]$, tada je $\mathcal{Z}\{y[n]\} = \frac{X(z)}{z-1}$.

Dokaz:

Po definiciji važi da je $\mathcal{Z}\{y[n]\} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} x[k]\right) z^{-n}$. Ako se uvede smena $x[k] = a[k+1] - a[k]$, dobija se da je $\sum_{k=0}^{+\infty} x[k] = a[n] - a[0]$, pa je

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a[n] - a[0])\, z^{-n} = \mathcal{Z}\{a[n]\} + \frac{z}{1-z}\, a[0] = \frac{\mathcal{Z}\{a[n]\} - z\, (\mathcal{Z}\{a[n]\} - a[0])}{1-z} =$$

$$= \frac{\mathcal{Z}\{a[n+1]\} - \mathcal{Z}\{a[n]\}}{z-1} = \frac{\mathcal{Z}\{x[n]\}}{z-1} = \frac{X(z)}{z-1}.$$

Teorema 6: Teorema o izvodu slike – diferenciranje signala u kompleksnom domenu

$$\mathcal{Z}\left\{n\,x[n]\right\} = -z\,\frac{dX(z)}{dz}$$

Dokaz:

Ako se uvede smena $z = \mathrm{e}^q$ i definiše seda je $Y(q) = X(z)$. Važi da je

$$\frac{dY(q)}{dq} = \sum_{n=0}^{\infty}(-n)\,x[n]\,\mathrm{e}^{-qn} = -\mathcal{Z}\left\{n\,x[n]\right\}.$$

Pošto je

$$\frac{\partial X(z)}{\partial q} = \frac{dX(z)}{dz}\,\frac{dz}{dq} = \frac{dX(z)}{dz}\,z,$$

sleduje da je

$$\frac{dX(z)}{dz}\,z = \sum_{n=0}^{\infty}(-n)\,x[n]\,\mathrm{e}^{-qn} = -\mathcal{Z}\left\{n\,x[n]\right\}.$$

Teorema 7: Teorema o parcijalnom izvodu

Neka je dat niz $x = x[n,a]$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{C}$ i neka red $\sum_{n=0}^{\infty} x[n,a]\,z^{-n}$ uniformno konvergira u prstenu $r < |z| < R$ ka funkciji $X(z,a)$. Neka je $\frac{\partial}{\partial a}\,X(z,a)$ analitička funkcija u tom istom prstenu. Tada važi:

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{\partial}{\partial a}\,x[n,a]\right\} = \frac{\partial}{\partial a}\,X(z,a).$$

Dokaz:

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{\partial}{\partial a}\,x[n,a]\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial a}\,x[n,a]\,z^{-n} = \frac{\partial}{\partial a}\sum_{n=0}^{\infty}x[n,a]\,z^{-n} = \frac{\partial}{\partial a}\,X(z,a)$$

Teorema 8: Parsevalova teorema

$$\sum_{n=0}^{\infty}x[n]\,y[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma+} X(z)\,Y\left(\frac{1}{z}\right)\,\frac{dz}{z}$$

Dokaz:

$$x[n]\,y[n] = \frac{y[n]}{2\pi j}\oint_{\Gamma+} X(z)\,z^{n-1}\,dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma+} X(z)\,y[n]z^{n-1}\,dz$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x[n]\,y[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma+} X(z)\left(\sum_{n=0}^{\infty}y[n]z^{n}\right)\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma+} X(z)\,Y\left(\frac{1}{z}\right)\,\frac{dz}{z}$$

Teorema 9: Teorema o konvoluciji

$$\mathcal{Z}\left\{x_1[n] * x_2[n]\right\} = X_1(z)\,X_2(z)$$

Dokaz:

$$\mathcal{Z}\left\{x_1[n] * x_2[n]\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \sum_{k=0}^{n} x_1[k]\,x_2[n-k] = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} x_1[k]\,x_2[n-k]\,\mathrm{u}[n-k]\,z^{-n}$$

Promenom redosleda sumiranja dobija se

$$\mathcal{Z}\left\{x_1[n] * x_2[n]\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} x_1[k]\,x_2[n-k]\,\mathrm{u}[n-k]\,z^{-n+k-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x_1[k] z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} x_2[n-k]\,\mathrm{u}[n-k]\,z^{-(n-k)}.$$

Ako se uvede smena $m = n - k$, dobija se

$$\mathcal{Z}\left\{x_1[n] * x_2[n]\right\} = X_1(z) \sum_{m=-k}^{\infty} x_2[m]\,\mathrm{u}[m]\,z^{-m} = X_1(z) \sum_{m=0}^{\infty} x_2[m]\,z^{-m} = X_1(z)\,X_2(z).$$

Teorema 10: Teorema o konvoluciji u kompleksnom domenu

$$\mathcal{Z}\left\{x_1[n]\,x_2[n]\right\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma^+} X(\rho)\,Y\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{d\rho}{\rho}, \quad \mathrm{ROC}: r_1\,r_2 < |z| < +\infty$$

Dokaz:

Na osnovu Parsevalove teoreme važi

$$\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\,y[n]\,z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma^+} X(\rho)\,\rho^{n-1}\,d\rho\right) y[n]\,z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma^+} X(\rho)\rho^{n-1}\,z^{-n}\,y[n]\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma^+}\left(\sum_{n=0}^{\infty} y[n]\left(\frac{z}{\rho}\right)^{-n}\right) X(\rho)\,\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma^+} X(\rho)\,Y\left(\frac{z}{\rho}\right)\frac{d\rho}{\rho}.$$

ROC: $r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x[n+1]\,y[n+1]}{x[n]\,y[n]}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x[n+1]}{x[n]}\right| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{y[n+1]}{y[n]}\right| = r_1\,r_2$

Teorema 11: Teorema o početnoj i krajnjoj vrednosti

a) $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$

b) $x[k] = \lim_{z\to\infty} z^k\left(X(z) - \sum_{i=0}^{k-1} x[i]\,z^{-i}\right)$

c) $\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\,X(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\,X(z)$

Dokaz:

a) $X(z) = x[0] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x[n]}{z^n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{z\to\infty} X(z) = x[0] + \lim_{z\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x[n]}{z^n} = x[0]$

b) $\mathcal{Z}\{x[n+k]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n+k]\, z^{-n} = z^k \left(X(z) - \sum_{i=0}^{k} x[i]\, z^{-i} \right)$

$$\lim_{z\to\infty} \mathcal{Z}\{x[n+k]\} = \lim_{z\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x[n+k]\, z^{-n} = 0$$

$$\lim_{z\to\infty} z^k \left(X(z) - \sum_{i=0}^{k} x[i]\, z^{-i} \right) = \lim_{z\to\infty} z^k \left(X(z) - \sum_{i=0}^{k-1} x[i]\, z^{-i} \right) - x[k] = 0$$

$$x[k] = \lim_{z\to\infty} z^k \left(X(z) - \sum_{i=0}^{k-1} x[i]\, z^{-i} \right)$$

Teorema 12: Teorema o integralu slike

$$\mathcal{Z}\left\{ \frac{x[n]}{n}\, \mathrm{u}[n-1] \right\} = \int_z^{+\infty} \frac{X(s) - x[0]}{s}\, ds$$

Dokaz:

$$\int_z^{+\infty} \frac{X(s) - x[0]}{s}\, ds = \int_z^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x[n]\, s^{-n} - x[0] \right) \frac{1}{s}\, ds = \int_z^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x[n]\, s^{-n} \right) \frac{1}{s}\, ds =$$

$$= \int_z^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} x[n]\, s^{-n-1}\, ds = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_z^{+\infty} s^{-n-1}\, ds = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x[n]}{n} z^{-n} = \mathcal{Z}\left\{ \frac{x[n]}{n}\, \mathrm{u}[n-1] \right\}$$

Diferencna jednačina N-tog reda, koja opisuje diskretni LTI sistem N-tog reda, može da bude zapisana u više formi od koje su dve pogodne za direktno rešavanje Z transformacijom:

- Sa kašnjenjima i preinicijalnim uslovima $y[-1], y[-2], \cdots, y[-N]$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k],$$

- Sa kašnjenjima i postinicijalnim uslovima $y[0], y[1], y[2], \cdots, y[N-1]$

$$\sum_{k=N}^{0} a_{N-k}\, y[n+k] = \sum_{k=M}^{0} b_{M-k}\, x[n+k].$$

Ukoliko jednačina nije data u nekoj od prethodne dve forme, na primer pomešana su kašnjenja i predikcije, ili pomoćni uslovi nisu ni preinicijalni, niti postinicijalni, pogodno je prevesti jednačinu u nekoj od dve standardne forme, a pomoćne uslove u oblik koji odgovara jednačini: preinicijalni za jednačinu sa kašnjenjem, a postinicijalni za jednačinu sa predikcijama.

Za oblik 1 se primenjuje Teorema o pomeranju argumenta d), a za oblik 2 Teorema o pomeranju argumenta b).

Kada se pomoćni uslovi (preinicijalni ili postinicijalni) anuliraju, primenom Z transformacije na bilo koju od jednačina, dobija se $H(z)$ funkcija prenosa (frekvencijski odziv), a inverzijom impulsni odziv $h[n]$.

- Sa kašnjenjima i preinicijalnim uslovima

$$y\,[n-m]\;\;u\,[n] \leftrightarrow \frac{1}{z^m}Y(z)+0 \qquad x\,[n-m]\;\;u\,[n] \leftrightarrow \frac{1}{z^m}X(z)+0$$

$$\left(a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_{N-1}z^{1-N}+a_Nz^{-N}\right)\,Y(z)=\left(b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_{M-1}z^{1-N}+b_Mz^{-M}\right)\,X(z)$$

$$H(z)\equiv\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_{M-1}z^{1-N}+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_{N-1}z^{1-N}+a_Nz^{-N}},\quad |z|>r_{\max}\text{ gde je }r_{\max}=\max_{1\le i\le N}\,|\mathrm{pol}_i|$$

- Sa kašnjenjima i postinicijalnim uslovima

$$y\,[n+m]\;\;\leftrightarrow z^mY(z)+0 \qquad x\,[n+m]\;\;\leftrightarrow z^mX(z)+0$$

$$\left(a_0z^N+a_1z^{N-1}+\cdots+a_{N-1}z^1+a_N\right)\,Y(z)=\left(b_0z^M+b_1z^{M-1}+\cdots+b_{M-1}z^1+b_M\right)\,X(z)$$

$$H(z)\equiv\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0z^M+b_1z^{M-1}+\cdots+b_{M-1}z^1+b_M}{a_0z^N+a_1z^{N-1}+\cdots+a_{N-1}z^1+a_N},\quad |z|>r_{\max}\text{ gde je }r_{\max}=\max_{1\le i\le N}\,|\mathrm{pol}_i|$$

Iz prethodnih izraza se dobija i prinudni odziv kao $y_p[n]=\mathcal{Z}^{-1}\left\{H(z)\,X(z)\right\}$.

6.3 Zadaci

Zadatak 5.1.

Na serijskoj magistrali se pojavljuju binarne cifre po slučajnom redosledu. Verovatnoća pojavljivanja svake od cifara je 50%. Kolika je verovatnoća da se u prvih n cifara od početka slanja podataka neće pojaviti dve uzastopne jedinice?

Rešenje:

Neka je $p[n]$ verovatnoća da se u prvih n cifara od početka slanja podataka nisu pojavila dve uzastopne jedinice.

Da bi uslov bio ispunjen, potrebno je da n-ta cifra bude 0 i da se u prethodnih $n-1$ cifara nisu pojavile dve uzastopne jedinice. Ili ako je ta n-ta cifra bila 1, da je $n-1$-va cifra 0 i da se u prethodnih $n-2$ cifara nisu pojavile dve uzastopne jedinice. Pošto je verovatnoća nailaska nule ili jedinice 0.5, verovatnoća da traženi uslov bude ispunjen iznosi:

$$p[n] = \frac{1}{2}\,p[n-1] + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,p[n-2], \qquad p[0] = p[1] = 1.$$

$$4\,p[n+2] - 2\,p[n+1] - p[n] = 0 \quad \Rightarrow \quad 4z^2\,P(z) - 4z^2\,p[0] - 4z\,p[1] - 2z\,P(z) + 2z\,p[0] - P(z) = 0$$

$$P(z) = 2\,\frac{2z^2+z}{4z^2-2z-1} = 2\,\frac{2z^2+z}{4\left(z-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(z-\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)}$$

$$p[n] = 2\,\frac{2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n} - \left(2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1}\right)}{4\,\frac{2\sqrt{5}}{4}}$$

$$p[n] = \frac{(2\,(1+\sqrt{5})+4)\,(1+\sqrt{5})^n - (2\,(1-\sqrt{5})+4)\,(1-\sqrt{5})^n}{4^{n+1}\,\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+2} - (1-\sqrt{5})^{n+2}}{4^{n+1}\,\sqrt{5}}$$

Zadatak 5.2.

Odrediti Z transformaciju i oblast konvergencije signala:
a) $x[n] = n\,\mathrm{u}[n]$,
b) $x[n] = n^2\,\mathrm{u}[n]$,
c) $x[n] = \frac{n\,(n-1)}{2}\,\mathrm{u}[n]$,
d) $x[n] = \mathrm{u}[n-k]$,
e) $x[n] = (n+1)^2\,\mathrm{u}[n]$,
f) $x[n] = (n+1)\,a^n\,\mathrm{u}[n]$,
g) $x[n] = a^{n-1}\,\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\,\mathrm{u}[n]$.

Rešenje:

a) Na osnovu teoreme o izvodu slike sleduje:

$$\mathcal{Z}\left\{n\,\mathrm{u}[n]\right\} = -z\,\frac{d}{dz}\,\mathcal{Z}\left\{\mathrm{u}[n]\right\} = -z\,\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z}{(z-1)^2},$$

$$\mathrm{ROC}: |z| > 1.$$

b) Na isti način se pokazuje: $X(z) = \frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3}$, ROC: $|z| > 1$.

c)

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{n\,(n-1)}{2}\,\mathrm{u}[n]\right\} = \frac{1}{2}\,\left(\mathcal{Z}\left\{n^2\,\mathrm{u}[n]\right\} - \mathcal{Z}\left\{n\,\mathrm{u}[n]\right\}\right) = \frac{z}{(z-1)^3}, \quad \mathrm{ROC}: |z| > 1$$

d) Primenom teoreme o pomeranju u vremenskom domenu $\mathcal{Z}\{f[n-k]\} = z^{-k}\,\mathcal{Z}\{f[n]\}$ dobija se

$$X(z) = \frac{z^{1-k}}{z-1}, \text{ROC} : |z| > 1.$$

e) Pošto je

$$x[n] = (n+1)^2\,\mathrm{u}[n] = (n+1)^2\,\mathrm{u}[n+1] = x_1[n+1],$$

gde je $x_1[n] = n^2\,\mathrm{u}[n]$. Na osnovu prethodnih transformacija i teoreme o pomeranju u vremenskom domenu je

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x_1[n+1]\} = z\,(X_1(z) - x_1[0]) = z\left(\frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3} - 0\right) = \frac{z^2\,(z+1)}{(z-1)^3}, \quad \text{ROC} : |z| > 1.$$

f)

$$X(z) = \mathcal{Z}\{n\,a^n\,\mathrm{u}[n]\} + \mathcal{Z}\{a^n\,\mathrm{u}[n]\} = \frac{az}{(z-a)^2} + \frac{z}{z-a} = \frac{z^2}{(z-a)^2}$$

$$\text{ROC} : r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x[n+1]}{x[n]}\right| = |a| \quad \Rightarrow \quad |z| > |a|$$

g) Na osnovu tablice dobija se

$$X(z) = \frac{1}{a}\,\frac{az\,\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{z^2 - 2az\,\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + a^2} = \frac{z}{z^2+a^2},$$

$$\text{ROC} : r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x[n+1]}{x[n]}\right| = |a| \quad \Rightarrow \quad |z| > |a|.$$

Zadatak 5.3.

Odrediti Z transformaciju i oblast konvergencije datih nizova ako je $\beta \in \mathbb{R}$:
a) $x_1[n] = \sin(\beta n)\,\mathrm{u}[n]$,
b) $x_2[n] = \cos(\beta n)\,\mathrm{u}[n]$,
c) $x_3[n] = \sinh(\beta n)\,\mathrm{u}[n]$,
d) $x_4[n] = \cosh(\beta n)\,\mathrm{u}[n]$.

Rešenje:

a), b) Pošto je $\mathcal{Z}\left\{\mathrm{e}^{j\beta n}\right\} = \frac{z}{1-\mathrm{e}^{j\beta}}$, na osnovu teoreme o linearnosti, dobija se da je:

$$\mathcal{Z}\left\{\mathrm{e}^{j\beta n}\right\} = \mathcal{Z}\{\cos(\beta n) + j\,\sin(\beta n)\} = \frac{z}{1-\mathrm{e}^{j\beta}} = \frac{z}{z-\cos(\beta) - j\,\sin(\beta)} = \frac{z\,(z-\cos(\beta)) + j\,z\,\sin(\beta)}{z^2 - 2z\,\cos(\beta)+1}.$$

Odavde je

$$\mathcal{Z}\{\cos(\beta n)\} = \frac{z\,(z-\cos(\beta))}{z^2 - 2z\,\cos(\beta)+1}$$

i

$$\mathcal{Z}\{\sin(\beta n)\} = \frac{z\,\sin(\beta)}{z^2 - 2z\,\cos(\beta)+1}.$$

O prstenu konvergencije ovih nizova ima smisla govoriti samo za konkretnu vrednost promenljive β jer su nizovi $x_1[n]$ i $x_2[n]$ u stvari funkcionalni nizovi po promenljivoj β:

$$x_1[n] = x_1[n,\beta], \quad x_2[n] = x_2[n,\beta].$$

Pošto za svaki par nizova $x_1[n]$ i $x_2[n]$ važi $|x_i[n]| < 1, i = 1, 2$, to će za svaki takav niz sigurno važiti da postoji njegova slika za $|z| > 1$, što se može pokazati primenom Košijevog kriterijuma konvergencije:

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_i[n]|} = 1, \quad i = 1, 2.$$

c), d) Lako se može pokazati da za nizove važi

$$\mathcal{Z}\left\{\cosh(\beta n)\right\} = \frac{z\,(z - \cosh(\beta))}{z^2 - 2z\,\cosh(\beta) + 1}$$

i

$$\mathcal{Z}\left\{\sinh(\beta n)\right\} = \frac{z\,\sinh(\beta)}{z^2 - 2z\,\cosh(\beta) + 1}.$$

U ovom kao i u prethodnom slučaju prsten konvergencije zavisi od konkretne vrednosti β.

$$\mathrm{ROC} : r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\mathrm{e}^{(n+1)\,\beta} \pm \mathrm{e}^{-(n+1)\,\beta}}{2}}{\frac{\mathrm{e}^{n\beta} \pm \mathrm{e}^{-n\beta}}{2}} \right| = |\mathrm{e}^{\beta}| = e^{\beta}$$

Zadatak 5.4.

Odrediti Z transformaciju i oblast konvergencije datih diskretnih signala:
a) $x[n] = \frac{1}{n+1}\,\mathrm{u}[n]$,
b) $x[n] = \frac{1}{n!}\,\mathrm{u}[n]$,
c) $x[n] = \frac{\sin(\beta n)}{n}\,\mathrm{u}[n], \quad \beta \in \mathbb{R}$,
d) $x[n] = (n-1)^2\,\mathrm{u}[n]$,
e) $x[n] = \frac{a^n + (-a)^n}{2}\,\mathrm{u}[n]$,
f) $x[n] = -a^{n-2}\,\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\,\mathrm{u}[n]$,
g) $x[n] = n\,\cos(n\theta)\,\mathrm{u}[n]$,
h) $x[n] = \frac{a^n}{n!}\,(1 + (-1)^n)\,\mathrm{u}[n]$.

Rešenje:

a) ROC: lako se pokazuje da je $r = 1$.

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{n+1}\,\mathrm{u}[n]\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{u}[n]}{n+1}\,z^{-n} = z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{u}[n]}{n+1}\,z^{-(n+1)} = z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{u}[n-1]}{n}\,z^{-n}$$

Na osnovu teoreme o integralu slike je $\mathcal{Z}\left\{\frac{x[n]}{n}\,\mathrm{u}[n-1]\right\} = \int\limits_{z}^{+\infty} \frac{X(s)-x[0]}{s}\,ds$, pa je u ovom slučaju

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{n+1}\,\mathrm{u}[n]\right\} = z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n\,\mathrm{u}[n]\,\mathrm{u}[n-1]}{n}\,z^{-n},$$

odnosno $x[n] = \mathrm{u}[n]$ i

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{n+1}\,\mathrm{u}[n]\right\} = z\int\limits_{z}^{\infty} \frac{\frac{s}{s-1} - 1}{s}\,ds = z\int\limits_{z}^{\infty}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right)ds = z\,\ln\left(\frac{s-1}{s}\right)\Bigg|_{z}^{\infty} = z\,\ln\left(\frac{z}{z-1}\right).$$

b) Na osnovu razvoja u Maklorenov red je

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{\mathrm{u}[n]}{n!}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}},$$

ROC: $z \in \mathbb{C}$.
c)

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{\sin(\beta n)}{n}\,\mathrm{u}[n-1]\right\} = \int\limits_z^{\infty} \frac{\mathcal{Z}\left\{\sin(\beta n)\,\mathrm{u}[n]\right\} - \sin(0)}{s}\,ds = \int\limits_z^{\infty} \frac{\sin(\beta)}{s^2 - 2s\,\cos(\beta) + 1}\,ds =$$

$$= \int\limits_z^{\infty} \frac{\sin(\beta)}{s^2 - 2s\,\cos(\beta) + \cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)}\,ds = \int\limits_z^{\infty} \frac{\sin(\beta)}{(s-\cos(\beta))^2 + \sin^2(\beta)}\,ds =$$

$$= \frac{1}{\sin(\beta)} \int\limits_z^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{s-\cos(\beta)}{\sin(\beta)}\right)^2 + 1}\,ds = \int\limits_{\frac{z-\cos(\beta)}{\sin(\beta)}}^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{atan}\left(\frac{z-\cos(\beta)}{\sin(\beta)}\right) = \mathrm{atan}\left(\frac{\sin(\beta)}{z-\cos(\beta)}\right).$$

Konačno je

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{\sin(\beta n)}{n}\,\mathrm{u}[n]\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{\sin(\beta n)}{n}\,\mathrm{u}[n-1]\right\} + x[0] = \mathrm{atan}\left(\frac{\sin(\beta)}{z-\cos(\beta)}\right) + \beta.$$

d) Na osnovu zadatka 5.2 je $\mathcal{Z}\left\{n^2\,\mathrm{u}[n]\right\} = \frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3}$. Na osnovu teoreme o pomeranju argumenta je

$$X(z) = z^{-1}\,\frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{z+1}{(z-1)^3}.$$

e)

$$X(z) = \frac{z}{2\,(z-a)} + \frac{z}{2\,(z+a)}$$

f)

$$X(z) = -a^{-2}\,\mathcal{Z}\left\{a^n\,\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\,\mathrm{u}[n]\right\} = -\frac{1}{a^2}\,\frac{z^2}{z^2+a^2}$$

g)

$$X(z) = -z\,\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2 - z\cos(\theta)}{z^2 - 2z\,\cos(\theta) + 1}\right) = -\frac{z^2 - \frac{2z}{\cos(\theta)} + 1}{(z^2 - 2z\,\cos(\theta) + 1)^2}$$

h)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n + (-a)^n}{n!}\,z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{z}\right)^n + \left(-\frac{a}{z}\right)^n}{n!} = \mathrm{e}^{\frac{a}{z}} + \mathrm{e}^{-\frac{a}{z}}$$

Zadatak 5.5.

Ako je poznata Z transformacija signala $x[n] = n^2\,\mathrm{u}[n]$, odrediti Z transformacije sledećih signala:
a) $y[n] = n^2\,a^n\,\mathrm{u}[n]$,
b) $y[n] = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2\,a^k$.

Rešenje:

a) Na osnovu teoreme o množenju sa eksponencijalnim članom $\mathcal{Z}\left\{a^n\,x[n]\right\} = X\left(\frac{z}{a}\right)$ dobija se:

$$Y(z) = \frac{\frac{z}{a}\,\left(\frac{z}{a}+1\right)}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^3} = \frac{az\,(z+a)}{(z-a)^3}.$$

b) Na osnovu teoreme o sumi niza se izvodi da je $\mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{n} x[k]\right\} = \frac{z}{z-1}\,X(z)$ i na osnovu tačke a) se dobija

$$Y(z) = \frac{a\,z^2\,(z+a)}{(z-1)\,(z-a)^3}.$$

Zadatak 5.6.

a) Ako je $x[n] = x[n,k] = \binom{n+k}{k}\,\mathrm{u}[n]$, dokazati da je $\mathcal{Z}\left\{x[n,k]\right\} = \left(\frac{z}{z-1}\right)^{k+1}$.
Na osnovu tačke a) odrediti Z transformacije i odrediti oblast konvergencije sledećih signala:
b) $y[n] = \binom{n+k}{k}\,a^n\,\mathrm{u}[n]$,
c) $y[n] = \binom{n}{k}\,\mathrm{u}[n]$,
d) $y[n] = \binom{n-1}{k}\,\mathrm{u}[n]$,
e) $y[n] = \binom{n+m}{k}\,\mathrm{u}[n]$.

Rešenje:

a) Prvi način: Na osnovu identiteta $\frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\alpha}{n} z^n$ je

$$\mathcal{Z}\left\{x[n,k]\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\,z^{-n} = \frac{1}{(1-z^{-1})^{k+1}} = \left(\frac{z}{z-1}\right)^{k+1}.$$

Drugi način: Korišćenjem konturne integracije.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma^+}\frac{z^{n-1}\,z^{k+1}}{(z-1)^{k+1}}\,dz = \frac{1}{k!}\lim_{z\to 1}\frac{d^k}{dt^k}z^{n-1}\,z^{k+1} = \frac{1}{k!}\lim_{z\to 1}\frac{d^k}{dt^k}z^{n+k} =$$

$$= \frac{(n+k)\,(n+k-1)\,\ldots\,(n+1)}{k!} = \binom{n+k}{k}.$$

Očigledno je ROC: $|z| > 1$.
b) Na osnovu tačke a) i teoreme o množenju eksponencijalnim članom je

$$Y(z) = \left(\frac{\frac{z}{a}}{\frac{z}{a}-1}\right)^{k+1} = \left(\frac{z}{z-a}\right)^{k+1},$$

$$\mathrm{ROC}: r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}\binom{n+1+k}{k}}{a^n\binom{n+k}{k}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}\,\frac{(n+k+1)!}{k!\,(n+1)!}}{a^n\,\frac{(n+k)!}{k!\,n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}|a|\,\frac{n+k+1}{n+1} = |a|.$$

c) $y[n] = x[n-k] \quad\Rightarrow\quad Y(z) = \dfrac{z}{(z-1)^{k+1}},\quad \mathrm{ROC}: |z| > 1$

d) $y[n] = x[n-k-1] \quad\Rightarrow\quad Y(z) = \dfrac{1}{(z-1)^{k+1}},\quad \mathrm{ROC}: |z| > 1$

e) $y[n] = x[n-k+m] \quad\Rightarrow\quad Y(z) = \dfrac{z^{m+1}}{(z-1)^{k+1}},\quad \mathrm{ROC}: |z| > 1$

Zadatak 5.7.

Naći inverznu Z transformaciju:
a) $X(z) = \frac{z+1}{(z-3)\,(z-1)}$,
b) $X(z) = \frac{(z+1)\,(z+2)}{(z-3)\,(z-2)^2}$,

c) $X(z) = \frac{z^4 - 2\,z^3 + 12\,z - 12}{z^2\,(z-2)\,(z-1)}$,
d) $X(z) = 2\,\frac{z^3 - 2\,z^2 + 6}{z^2\,(z-2)}$,
e) $X(z) = 2\,\frac{z^3 + 2\,z^2 + 6}{z^2\,(z-3)}$,
f) $X(z) = 2\,\frac{z^3 + 2\,z^2 + 6}{(z^2-1)\,(z-3)}$.

Rešenje:

a) Prvi način: Rastavljanjem na parcijalne razlomke
U većini racionalnih funkcija rastavljanje na parcijalne razlomke predstavlja jednostavniji postupak.

$$X(z) = \frac{2}{z-3} - \frac{1}{z-1} = z^{-1}\left(\frac{2\,z}{z-3} - \frac{z}{z-1}\right)$$

$$x[n] = (2 \cdot 3^{n-1} - 1)\,\mathrm{u}[n-1]$$

Drugi način: Na osnovu definicionog konturnog integrala
Za $n \geq 1$ isti su polovi funkcije $X(z)$ i $z^{n-1}\,X(z)$, tako da važi:

$$x[n] = \operatorname*{Res}_{z=3} \frac{z^{n-1}\,(z+1)}{(z-3)\,(z-1)} + \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z^{n-1}\,(z+1)}{(z-3)\,(z-1)} = 2 \cdot 3^{n-1} - 1.$$

Za $n = 0$ se pojavljuje još jedan pol u podintegralnoj funkciji $z^{n-1}\,X(z)$:

$$x[0] = \lim_{n\to 0}\left(\operatorname*{Res}_{z=3} \frac{z+1}{z\,(z-3)\,(z-1)} + \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z+1}{z\,(z-3)\,(z-1)} + \operatorname*{Res}_{z=3} \frac{z+1}{z\,(z-3)\,(z-1)}\right) = \frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 0,$$

što nije moralo da se računa jer je očigledno na osnovu teoreme o početnoj vrednosti:

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z) = 0.$$

Na osnovu toga finalni izraz glasi

$$x[n] = (2 \cdot 3^{n-1} - 1)\,\mathrm{u}[n-1].$$

b) Prvi način:

$$X(z) = \frac{20}{z-3} - \frac{19}{z-2} - \frac{12}{(z-2)^2} = z^{-1}\left(\frac{20\,z}{z-3} - \frac{19\,z}{z-2} - \frac{12\,z}{(z-2)^2}\right)$$

$$x[n] = (20 \cdot 3^{n-1} - 19 \cdot 2^{n-1} - 6\,(n-1)\,2^{n-1})\,\mathrm{u}[n-1] = (20 \cdot 3^{n-1} - 13 \cdot 2^{n-1} - 6\,n\,2^{n-1})\,\mathrm{u}[n-1]$$

Drugi način: Podintegralna funkcija $z^{n-1}\,X(z)$ ima pol u nuli za $n = 0$, ali definicioni integral inverzne Z transformacije nije potrebno računati jer je očigledno da je $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z) = 0$. Za $n \geq 1$ su polovi funkcije $z^{n-1}\,X(z)$ i $X(z)$ isti, tako da važi:

$$x[n] = \operatorname*{Res}_{z=3} \frac{z^{n-1}\,(z+1)\,(z+2)}{(z-3)\,(z-2)^2} + \operatorname*{Res}_{z=2} \frac{z^{n-1}\,(z+1)\,(z+2)}{(z-3)\,(z-2)^2} = 20 \cdot 3^{n-1} + \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz}\,\frac{z^{n+1} + 2\,z^n + 3\,z^{n-1}}{z-3} =$$

$$= 20{\cdot}3^{n-1} + \lim_{z\to 2} \frac{(n+1)\,z^n + 3n\,z^{n-1} + 2\,(n-1)\,z^{n-2} - (z^{n+1} + 2\,z^n + 3\,z^{n-1})}{(z-3)^2} = 20{\cdot}3^{n-1} - (6\,n + 13)\,2^{n-1},$$

$$x[n] = (20 \cdot 3^{n-1} - 13 \cdot 2^{n-1} - 6\,n\,2^{n-1})\,\mathrm{u}[n-1].$$

c) Prvi način:

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + 12\,z^{-3}\,\frac{z}{z-2}$$

$$x[n] = \mathrm{u}[n] + 12 \cdot 2^{n-3}\,\mathrm{u}[n-3]$$

Drugo rešenje:

$$x[n] = \underset{z=2}{\mathrm{Res}} z^{n-3} \frac{z^4 - 2\,z^3 + 12\,z - 12}{(z-2)\,(z-1)} + \underset{z=1}{\mathrm{Res}} z^{n-3} \frac{z^4 - 2\,z^3 + 12\,z - 12}{(z-2)\,(z-1)} = 1 + 3 \cdot 2^{n-1}, \quad n \geq 3$$

Za $n < 3$ je na osnovu prve granične teoreme

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z) = 1,$$

$$x[1] = \lim_{z \to \infty} z\,(X(z) - x[0]) = \lim_{z \to \infty} z \frac{z^3 - 2\,z^2 + 12\,z - 12}{z^4 - 3\,z^3 + 2\,z^2} = 1,$$

$$x[2] = \lim_{z \to \infty} z^2\,X(z) - z^2\,x[0] - z\,x[1] = \lim_{z \to \infty} z \frac{z^3 + 10\,z^2 - 12\,z}{z^4 - 3\,z^3 + 2\,z^2} = 1.$$

Prema tome je

$$x[n] = (1 + 3 \cdot 2^{n-1})\,\mathrm{u}[n-3] + \delta[0] + \delta[1] + \delta[2] = \mathrm{u}[n] + 12 \cdot 3^{n-3}\,\mathrm{u}[n-3].$$

d)

$$X(z) = 2 + \frac{12}{z^2\,(z-2)} = \frac{2}{z^2} + \frac{12\,z^{-3}\,z}{z-2}$$

$$x[n] = 2\,\delta[n] + 12 \cdot 2^{n-3}\,\mathrm{u}[n]$$

e)

$$X(z) = 2 + \frac{10}{z} + \frac{30}{z^2} + \frac{102\,z^{-3}\,z}{z-3}$$

$$x[n] = 2\,\delta[n] + 10\,\delta[n-1] + 30\,\delta[n-2] + 102 \cdot 3^{n-3}\,\mathrm{u}[n]$$

f)

$$X(z) = 2 + 2\,\frac{5\,z^2 + z + 3}{(z^2-1)\,(z-3)} = 2 - \frac{\frac{9}{2}\,z^{-1}}{z-3} + \frac{\frac{7}{4}\,z^{-1}}{z+1} + \frac{\frac{51}{4}\,z^{-1}}{z-3}$$

$$x[n] = 2\,\delta[n] + \left(-\frac{9}{2} + \frac{7}{4} \cdot (-1)^{n-1} + \frac{51}{4} \cdot 3^{n-1}\right)\,\mathrm{u}[n-1]$$

Zadatak 5.8.

Primenom Z transformacije odrediti sopstveni odziv sistema opisanog diferencnom jednačinom:
a) $x[n+2] - 5\,x[n+1] + 6\,x[n] = 0, \quad x[0] = x[1] = 1,$
b) $x[n+2] - 6\,x[n+1] + 9\,x[n] = 0, \quad x[0] = 1,\ x[1] = 0,$
c) $x[n+2] - 2\,x[n+1] + 4\,x[n] = 0, \quad x[0] = x[1] = 1.$

Rešenje:

U svim tačkama primenjuje se Z transformacija na levu i desnu stranu polazne jednačine.
a)

$$z^2\,X(z) - z^2\,x[0] - z\,x[1] - 5\,(z\,X(z) - z\,x[0]) + 6\,X(z) = 0,$$

$$(z^2 - 5z + 6)\,X(z) = z^2 - 4z$$

$$X(z) = \frac{z\,(z-4)}{z^2 - 5z + 6} = \frac{z\,(z-4)}{(z-2)\,(z-3)}$$

Prvi način: rastavljanje na parcijalne razlomke

$$X(z) = z\left(\frac{1}{z-2}\lim_{z\to 2}\frac{z-4}{z-3} + \frac{1}{z-3}\lim_{z\to 3}\frac{z-4}{z-2}\right) = \frac{2z}{z-2} - \frac{z}{z-3}$$

$$x[n] = (2\cdot 2^n - 3^n)\,\mathrm{u}[n]$$

Drugi način: račun ostatka

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{\Gamma^+} z^{n-1}\frac{z\,(z-4)}{(z-2)\,(z-3)} = \operatorname*{Res}_{z=2} z^{n-1}\frac{z\,(z-4)}{(z-2)\,(z-3)} + \operatorname*{Res}_{z=3} z^{n-1}\frac{z\,(z-4)}{(z-2)\,(z-3)}$$

$$x[n] = 2^{n-1}\cdot 4 + 3^{n-1}\cdot 3 = 2^{n+1} - 3^n, \quad n \geq 0$$

b)

$$z^2\,X(z) - z^2\,x[0] - z\,x[1] - 6\,(z\,X(z) - z\,x[0]) + 9\,X(z) = 0,$$

$$(z^2 - 6z + 9)\,X(z) = z^2$$

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-3)^2}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{\Gamma^+}\frac{z^{n+1}}{(z-3)^2} = \lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}\,z^{n+1} = (n+1)\,3^n, \quad n \geq 0$$

c)

$$z^2\,X(z) - z^2\,x[0] - z\,x[1] - 2\,(z\,X(z) - z\,x[0]) + 4\,X(z) = 0,$$

$$(z^2 - 2z + 4)\,X(z) = z^2 - z$$

$$X(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 - 2z + 4} = \frac{z\left(z - 2\,\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}{z^2 - 4\,\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4}$$

Na osnovu tablice je $x[n] = 2^n\,\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\,\mathrm{u}[n]$.

Zadatak 5.9.

Primenom Z transformacije odrediti potpuni odziv sistema opisanih diferencnim jednačinama:
a) $x[n+2] - 5\,x[n+1] + 6\,x[n] = n^2\,\mathrm{u}[n], \quad x[0] = 1,\ x[1] = 1,$
b) $x[n+2] - 7\,x[n+1] + 12\,x[n] = 7^n\,\mathrm{u}[n], \quad x[0] = x[1] = 0,$
c) $3\,x[n+2] - 4\,x[n+1] + x[n] = 3^n\,(n-1)\,\mathrm{u}[n], \quad x[0] = x[1] = 1.$

Rešenje:

a) Kako je

$$(z^2 - 5\,z + 6)\,X(z) = z^2 - 4\,z + \frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3},$$

$$X(z) = \frac{z^2 - 4\,z}{z^2 - 5\,z + 6} + \frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3\,(z^2 - 5\,z + 6)},$$

dobija se da je

$$x[n] = \underbrace{\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^2 - 4\,z}{z^2 - 5\,z + 6}\right\}}_{\text{sopstveni odziv}} + \underbrace{\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3\,(z^2 - 5\,z + 6)}\right\}}_{\text{prinudni odziv}}.$$

Sopstveni odziv je već određen u zadatku 5.8 pod a) i iznosi

$$x_s[n] = 2^{n+1} - 3^n.$$

Prinudni odziv zavisi od pobude i karakterističnog polinova i određuje se iz

$$X_p(z) = \frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3\,(z^2-5\,z+6)},$$

pa je

$$x_p[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{\Gamma^+} \frac{z^n\,(z+1)}{(z-1)^3\,(z-2)\,(z-3)} = -3\cdot 2^n + \frac{4\cdot 3^n}{8} + \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-1)^3\,\frac{z^n\,(z+1)}{(z-1)^3\,(z-2)\,(z-3)}\right) =$$

$$= -3\cdot 2^n + \frac{4\cdot 3^n}{8} + \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{(n+1)\,n\,z^{n-1} + n\,(n-1)\,z^{n-2}}{z^2-5\,z+6}$$

$$+\lim_{z\to 1}\left(\frac{((n+1)\,z^n + n\,z^{n-1})\,(-2z+5)}{(z^2-5\,z+6)^2} + (z^{n+1}+z^n)\,\frac{-2\,(z^2-5\,z+6)+2\,(2z-5)^2}{(z^2-5\,z+6)^3}\right) =$$

$$= -3\cdot 2^n + \frac{4\cdot 3^n}{8} + \frac{n^2+3\,n+5}{2}, \quad n \geq 0.$$

Potpuni odziv glasi

$$x[n] = 2^{n+1} - 3^n + \left(-3\cdot 2^n + \frac{4\cdot 3^n}{8} + \frac{n^2+3\,n+5}{2}\right)\mathrm{u}[n].$$

b) Kako su početni uslovi jednaki 0, diferencna jednačina nema sopstveni odziv. Potpuni odziv je jednak odzivu na pobudu. Zato je

$$X(z) = \frac{\frac{z}{z-7}}{z^2-7\,z+12} = \frac{z}{(z-7)\,(z-4)\,(z-3)} = \frac{z}{12\,(z-7)} + \frac{z}{4\,(z-3)} - \frac{z}{3\,(z-4)},$$

pa je

$$x[n] = \left(\frac{7^n}{12} + \frac{3^n}{4} - \frac{4^n}{3}\right)\mathrm{u}[n].$$

c) $X(z) = \dfrac{3\,z^4 - 19\,z^3 + 32\,z^2 - 3\,z}{(z-1)\,(3z-1)\,(z-3)^2}$

$$x[n] = \frac{3^{-n}}{128}\left(8n\,9^n - 29\cdot 9^n + 208\cdot 3^n - 51\right), \quad n \geq 0$$

Zadatak 5.10.

Primenom unilateralne Z transformacije rešiti sisteme diferencnih jednačina.

a)

$$x[n+2] - y[n] = 0 \qquad x[0] = y[0] = 1$$

$$y[n+2] + x[n] = 0 \qquad x[1] = \sqrt{2}, y[1] = 0$$

b)

$$a[n+1] = a[n] - b[n] + 3^n \qquad a[0] = 3$$

$$b[n+1] = -2a[n] - 3^n \qquad b[0] = 0$$

c)

$$x[n+2] + x[n] - y[n] - z[n] = 0 \qquad x[0] = y[0] = z[0] = 0$$

$$y[n+2] + y[n] - x[n] - z[n] = 0 \qquad x[1] = y[1] = z[1] = 1$$

$$z[n+2] + z[n] - x[n] - y[n] = 0$$

Rešenje:

a)

$$z^2\,X(z) - z^2 - z\sqrt{2} - Y(z) = 0$$

$$z^2\,Y(z) - z^2 + X(z) = 0$$

Rešenje ovog sistema je:

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - \sqrt{2}\,z + 1} = \sqrt{2}\,\frac{z\,z\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{z^2 - 2z\,\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1},$$
$$Y(z) = \frac{z^2 - \sqrt{2}\,z}{z^2 - \sqrt{2}\,z + 1} = \frac{z\,\left(z - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - z\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{z^2 - 2z\,\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1}.$$

Dobija se:

$$x[n] = \sqrt{2}\,\sin\left((n+1)\,\tfrac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{u}[n],$$

$$y[n] = \left(\cos\left(n\,\tfrac{\pi}{4}\right) - \sin\left(n\,\tfrac{\pi}{4}\right)\right)\,\mathrm{u}[n] = \sqrt{2}\,\cos\left((n+1)\,\tfrac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{u}[n].$$

b)

$$(z-1)\,A(z) + B(z) = \tfrac{z}{z-3} + 3z$$

$$z\,B(z) + 2\,A(z) = -\tfrac{z}{z-3}$$

Rešenje ovog sistema je:

$$A(z) = \frac{z^2}{(z-3)\,(z+1)\,(z-2)} + \frac{3z^2}{(z+1)\,(z-2)} + \frac{z}{(z-3)\,(z+1)\,(z-2)},$$
$$B(z) = -\frac{2z+1}{(z-3)\,(z+1)\,(z-2)} - \frac{3z}{(z+1)\,(z-2)} - \frac{1}{z-3}.$$

Dobija se:

$$a[n] = ((-1)^n + 2^n + 3^n)\,\mathrm{u}[n],$$

$$b[n] = (2\,(-1)^n - 2^n - 3^n)\,\mathrm{u}[n].$$

c)

$$\left.\begin{aligned} &(z^2+1)\,X(z)-Y(z)-Z(z)=0\\ &-X(z)+(z^2+1)\,Y(z)-Z(z)=0\\ &-X(z)-Y(z)+(z^2+1)\,Z(z)=0 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad X(z)=Y(z)=Z(z)=\frac{z}{(z+1)\,(z-1)}$$

$$x[n]=y[n]=z[n]=\frac{1-(-1)^n}{2},\quad n\geq 0$$

Zadatak 5.11.

Primenom unilateralne Z transformacije izračunati sledeće sume:

a) $s_n=\displaystyle\sum_{m=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n-m}{k}$,

b) $s_n=\displaystyle\sum_{v=0}^{n}\binom{v+m}{m}\binom{n+k-v}{v}$.

Rešenje:

a) Pošto se radi o konvolucionoj sumi, važi $s_n=s[n]=\mathcal{Z}^{-1}\left\{S(z)\right\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{X(z)\,Y(z)\right\}$, gde su

$$x[n]=\binom{n}{k}\,\mathrm{u}[n],\qquad y[n]=\binom{n}{k}\,\mathrm{u}[n].$$

$$S(z)=\frac{z}{(z-1)^{k+1}}\,\frac{z}{(z-1)^{k+1}}=\frac{z^2}{(z-1)^{2k+2}}=z\,\frac{z}{(z-1)^{(2k+1)+1}}$$

$$s[n]=\binom{n+1}{2k+1}\,\mathrm{u}[n]$$

b) Kako su $\mathcal{Z}\left\{\binom{n+m}{m}\right\}=\frac{z^{m+1}}{(z-1)^{m+1}}$ i $\mathcal{Z}\left\{\binom{n+k}{k}\right\}=\frac{z^{k+1}}{(z-1)^{k+1}}$, dobija se

$$S(z)=\frac{z\,z^{m+k+1}}{(z-1)^{m+k+1+1}},$$

$$s[n]=\binom{n+m+k+1}{m+k+1}\,\mathrm{u}[n].$$

Zadatak 5.12.

Primenom unilateralne Z transformacije izračunati sledeće sume:

a) $s_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\,a^k$,

b) $s_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\beta)$,

c) $s_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k-n)^2\,k^2$.

Rešenje:

a) Na osnovu zadatka 5.5 je

$$S(z) = \frac{z}{z-1}\,\frac{az\,(z+a)}{(z-a)^3} = a\,\frac{z^2\,(z+a)}{(z-1)\,(z-a)^3}.$$

Primenom inverzne Z transformacije se računa

$$s_n = \lim_{z\to 1} a\,\frac{z^{n+1}\,(z+a)}{(z-a)^3} + \frac{a}{2!}\lim_{z\to a}\frac{d^2}{dz^2}\,\frac{z^{n+1}\,(z+a)}{z-1} = \frac{a\,(a+1)}{(1-a)^3} + \frac{a}{2!}\lim_{z\to a}\frac{d^2}{dz^2}\,\frac{z^{n+1}\,(z+a)}{z-1}.$$

Pošto je

$$\frac{z^{n+1}\,(z+a)}{z-1} = \frac{z^{n+2}}{z-1} + \frac{aq,\,z^{n+1}}{z-1},$$

može se uvesti pomoćni niz

$$x[n] = \lim_{z\to a}\frac{d^2}{dz^2}\,\frac{z^{n+2}}{z-1} = \lim_{z\to a}\left(\frac{(n+1)\,(n+2)\,z^n}{z-1} - \frac{2\,(n+2)\,z^{n+1}}{(z-1)^2} + \frac{2\,z^{n+2}}{(z-1)^2}\right) =$$

$$= \frac{(n+1)\,(n+2)\,a^n}{(a-1)} - \frac{2\,(n+2)\,a^{n+1}}{(a-1)^2} + \frac{2\,a^{n+2}}{(a-1)^3}.$$

Sada je

$$s_n = \frac{a\,(a+1)}{(1-a)^3} + \frac{a\,x[n]}{2} + \frac{a^2\,x[n-1]}{2},$$

$$s_n = \frac{a\,(a+1)}{(1-a)^3} + \frac{(n+1)^2\,a^{n+1}}{a-1} - \frac{(2n+3)\,a^{n+2}}{(a-1)^2} + \frac{2\,a^{n+3}}{(a-1)^3}.$$

b) $\mathcal{Z}\{s_n\} = \dfrac{1}{z-1}\,\dfrac{z\,(z-\cos(\beta))}{z^2-2z\,\cos(\beta)+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{z-1} - \dfrac{z\,(z-2\,\cos(\beta)-1)}{z^2-2z\,\cos(\beta)+1}\right)$

Pošto je

$$\frac{z\,(z-2\,\cos(\beta)-1)}{z^2-2z\,\cos(\beta)+1} = \frac{z\,(z-\cos(\beta))}{z^2-2z\,\cos(\beta)+1} - \frac{z\,(1+\cos(\beta))}{z^2-2z\,\cos(\beta)+1} = \mathcal{Z}\left\{\cos(n\beta) - \frac{1+\cos(\beta)}{\sin(\beta)}\,\sin(n\beta)\right\},$$

dobija se

$$s_n = \frac{1}{2}\left(1-\cos(n\beta) + \frac{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\,\sin(n\beta)\right) = \frac{\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)\,\cos\left(\frac{(n-1)\,\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}.$$

b) $\mathcal{Z}\{s_n\} = \dfrac{z\,(z+1)}{(z-1)^3}\,\dfrac{z\,(z+1)}{(z-1)^3} = \dfrac{z^4+2\,z^3+z^2}{(z-1)^6}$

$$s_n = \frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{\Gamma^+}\frac{z^{n+3}+2\,z^{n+2}+z^{n+1}}{(z-1)^6} = \binom{n+3}{5} + 2\binom{n+2}{5} + \binom{n+1}{5} = \frac{n\,(n^4-1)}{30}$$

Zadatak 5.13.*

Primenom unilateralne Z transformacije rešiti sisteme diferencnih jednačina.

a) $s_n = \displaystyle\sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{x}{k}, \quad x > n, x\in\mathbb{N},$

b) $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{n-k}\binom{v}{k},$

c) $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} = (-1)^n\binom{v}{n-k}\binom{m+k}{k}.$

Rešenje:

a) Polazna suma se može napisati na sledeći način:

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^k\binom{x}{k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{x}{k}-\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{x}{k}.$$

Pošto je

$$\mathcal{Z}\left\{(-1)^n\binom{x}{n}\right\}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{x}{n}z^{-n}=\sum_{n=0}^{x}(-z)^n\binom{x}{n}=\left(1-\frac{1}{z}\right)^x=\left(\frac{z-1}{z}\right)^x.$$

Na osnovu teoreme o transformaciji konačne sume sleduje

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{x}{k}\right\}=\frac{z}{z-1}\left(\frac{z-1}{z}\right)^x=\left(\frac{z-1}{z}\right)^{x-1},$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{x}{k}=(-1)^n\binom{x-1}{n}.$$

Na isti način je $\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{x}{k}=(-1)^{m-1}\binom{x-1}{m-1}$. Sleduje da je

$$s_n=(-1)^n\binom{x-1}{n}-(-1)^{m-1}\binom{x-1}{m-1}=(-1)^n\binom{x-1}{n}+(-1)^m\binom{x-1}{m-1}.$$

b)

$$S(z)=\left(\frac{z+1}{z}\right)^m\left(\frac{z+1}{z}\right)^v=\left(\frac{z+1}{z}\right)^{m+v}$$

$$s_n=\binom{m+v}{n}$$

c)

$$S(z)=\left(\frac{z+1}{z}\right)^v\frac{(-z)^{m+1}}{(-z-1)^{m+1}}=\left(\frac{z+1}{z}\right)^{v-m-1}$$

$$s_n=\binom{v-m-1}{n}$$

Zadatak 5.14.

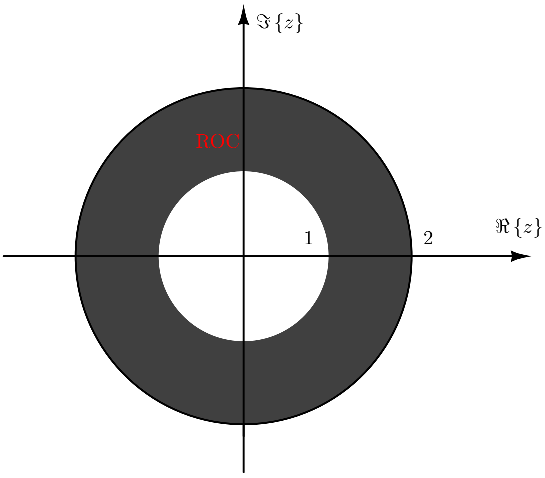
Neka je $x[n]=(-1)^n\,\mathrm{u}[n]+\alpha^n\,\mathrm{u}[-n-n_0]$. Odrediti ograničenja za vrednost kompleksnog broja α i celog broja n_0 ako je oblast Z transformacije $X(z)$ ROC: $1<|z|<2$.

Rešenje:

Signal $x[n]=(-1)^n\,\mathrm{u}[n]+\alpha^n\,\mathrm{u}[-n-n_0]$ nije ograničen i on se sastoji od jednog signala ograničenog sa unutrašnje strane i od jednog ograničenog sa spoljašnje strane formirajući prsten u Z ravni kao na slici 5.14.1.

Ako predstavimo signal $x[n]=x_1[n]+x_2[n]$, gde je $x_1[n]=(-1)^n\,\mathrm{u}[n]$, a $x_2[n]=\alpha^n\,\mathrm{u}[-n-n_0]$, vidi se da je $x_1[n]$ ograničen sa unutrašnje strane, a $x_2[n]$ sa spoljašnje strane.

Z transformacija signala $x_1[n]$ je $X_1(z)=\frac{z}{z+1}$. Ima pol $z_{p1}=-1$ i on se nalazi u unutrašnjosti ROC: $|z_{p1}|<|z|$.



Slika 5.14.1.

Za drugi signal važi

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-n_0} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \alpha^{-n} z^n = \frac{z^{n_0}\,\alpha^{-n_0}}{1-\alpha^{-1} z} = -\alpha\,\frac{\left(\frac{z}{\alpha}\right)^{n_0}}{z-\alpha}.$$

Pol drugog signala je $z_{p2} = \alpha$ i mora da se nalazi u spoljašnjosti ROC prstena, odnosno $|z_{p2}| = |\alpha| > 2$.

Kako važi da je $|z| < 2$ i $|\alpha| > 2$, onda je $\left|\frac{z}{\alpha}\right| < 1$. To znači da je red konvergentan za bilo koji ceo broj n_0.

Zadatak 5.15.

Ako je impulsni odziv diskretnog sistema $h[n] = (n+1)\,a^{n+2}\,\mathrm{u}[n]$:
a) Opisati sistem diferencnom jednačinom.
b) Nacrtati blok dijagram sistema.
c) Naći potpuni odziv za $n > 0$ ako se sistem pobudi siganlom $x[n] = b^{n-2}\,\mathrm{u}[n-2]$, a početni uslovi su dati sa $y[0]$ i $y[1]$.

Rešenje:

a) Impulsni odziv može da se napiše u sledećem obliku $h[n] = a^2\, n\, a^n\,\mathrm{u}[n] + a^2\, a^n\,\mathrm{u}[n]$. Na osnovu toga se dobija funkcija prenosa u Z domenu:

$$H(z) = a^2\left(\frac{az}{(z-a)^2} + \frac{z}{z-a}\right) = \frac{a^2 z^2}{(z-a)^2} = \frac{a^2}{(1-a\,z^{-1})^2}.$$

Pošto je $Y(z) = H(z)\,X(z)$, važi da je

$$(1 - 2az^{-1} + a^2 z^{-2})\,Y(z) = a^2\,X(z),$$

$$y[n] - 2a\,y[n-1] + a^2\,y[n-2] = a^2\,x[n].$$

b) Kako je $y[n] = 2a\,y[n-1] - a^2\,y[n-2] + a^2\,x[n]$, crta se blok šema 5.15.1.
c) Da bi se odredio potpuni odziv sa postinicijalnim početnim uslovima:

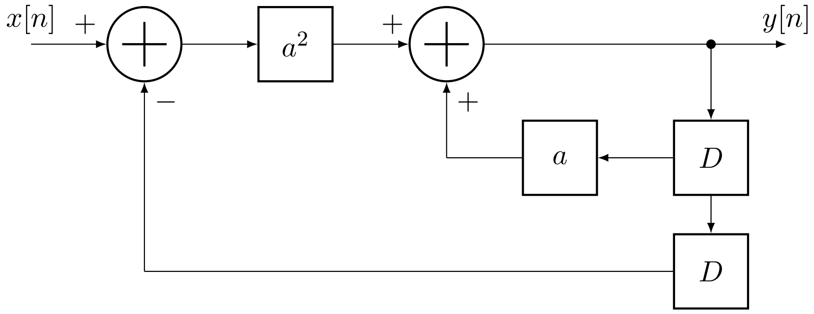
$$y[n] - 2a\,y[n-1] + a^2\,y[n-2] = a^2\,x[n+2],$$

odnosno kada se ta ista jednačina pomeri dva odbirka unapred:

$$y[n+2] - 2a\,y[n+1] + a^2\,y[n] = a^2\,x[n+2] = a^2\,b^n\,\mathrm{u}[n].$$

Primenom Z transformacije se dobija

$$z^2\,Y(z) - z^2\,y[0] - z\,y[1] - 2az\,Y(z) + 2az\,y[0] + a^2\,Y(z) = a^2\,(z^2\,X(z) - z^2\,x[0] - z\,x[1]),$$



Slika 5.15.1.

pri čemu je $x[0] = x[1] = 0$, pa je

$$Y(z) = \frac{z\,y[1] + (z^2 - 2a\,z)\,y[0]}{(z-a)^2} + \frac{a^2\,z^2}{(z-a)^2}\,z^{-2}\,\frac{z}{z-b} = \frac{z\,y[0]}{z-a} + \frac{z\,(y[1] - a\,y[0])}{(z-a)^2} + \frac{a^2\,z}{(z-a)^2\,(z-b)},$$

pa je

$$y[n] = y[0]\,a^n\,\mathrm{u}[n] + \frac{y[1] - a\,y[0]}{a}\,n\,a^n\,\mathrm{u}[n] + \left(\frac{a^2\,b^n}{(b-a)^2} + \frac{(n-1)\,a^{n+2} - b\,(n+2)\,a^{n+1}}{(b-a)^2}\right)\mathrm{u}[n].$$

Zadatak 5.16.

Ako je impulsni odziv diskretnog sistema $h[n] = (n+1)\,a^{-n}\,\mathrm{u}[n]$:
a) Opisati sistem diferencnom jednačinom.
b) Nacrtati blok dijagram sistema.
c) Naći potpuni odziv za $n > 0$ ako se sistem pobudi siganlom $x[n] = b^{n-2}\,\mathrm{u}[n-2]$, a početni uslovi su dati sa $y[0] = \frac{a}{b}$ i $y[1] = a$.

Rešenje:

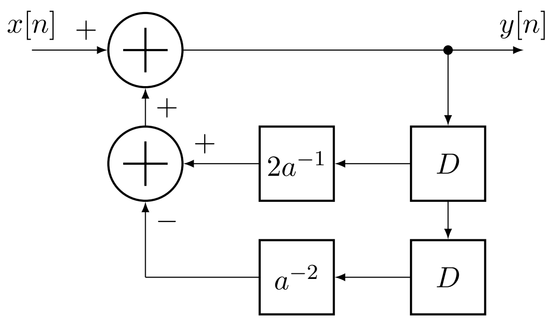
a) $h[n] = n\,a^{-n}\,\mathrm{u}[n] + a^{-n}\,\mathrm{u}[n]$

$$H(z) = \frac{az}{(az-1)^2} + \frac{az}{az-1} = \frac{a^2}{a^2 - 2az^{-1} + z^{-2}}$$

$$(a^2 - 2az^{-1} + z^{-2})\,Y(z) = a^2\,X(z)$$

$$y[n] - 2a^{-1}\,y[n-1] + a^{-2}\,y[n-2] = x[n]$$

b) Na osnovu $y[n] = 2a^{-1}\,y[n-1] - a^{-2}\,y[n-2] + x[n]$ se formira blok šema sa slike 5.16.1.



Slika 5.16.1.

c) $y[n+2] - 2a^{-1}\,y[n+1] + a^{-2}\,y[n] = x[n+2]$

$$z^2\,Y(z) - z^2\,y[0] - z\,y[1] - 2a^{-1}\,z\,Y(z) + 2a^{-1}\,z\,y[0] + a^{-2}\,Y_s(z) = z^2\,X(z) - z^2\,x[0] - z\,x[1]$$

$$y[n] = \frac{a^{-(n-1)}}{b}\,\mathrm{u}[n] + \left(a^2 - \frac{a}{b}\right)n\,a^{-n}\,\mathrm{u}[n] + \frac{a^2\,b^n}{(ab-1)^2}\,\mathrm{u}[n] + \frac{(n-1)\,a^{-n+2} - b\,n\,a^{-n+3}}{(ab-1)^2}\,\mathrm{u}[n]$$

Zadatak 5.17.

Kauzalni vremenski invarijantni sistem je opisan diferencnom jednačinom $2\,y[n+2]-y[n+1]-y[n]=x[n]$.
a) Primenom Z transformacije naći impulsni odziv sistema.
b) Ako su zadati uslovi $y[0]=1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y[n]=2$, primenom Z transformacije naći odziv na pobudu $x[n]=(-2)^{-n}\,\mathrm{u}[n]$.

Rešenje:

a) Impuslni odziv se dobija rešavanjem diferencne jednačine $2\,h[n+2]-h[n+1]-h[n]=\delta[n]$. Primenom Z transformacije dobija se funkcija prenosa:

$$H(z)=\frac{1}{2z^2-z-1}=\frac{1}{(2z+1)\,(z-1)}=\frac{z\,z^{-1}}{3\,(z-1)}-\frac{z\,z^{-1}}{3\,(z+1/2)}.$$

Na osnovu toga je

$$h[n]=\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\mathrm{u}[n-1]=\frac{1}{3}\left(1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right)\mathrm{u}[n-1].$$

b) $2\,(z^2\,Y(z)-z^2\,y[0]-z\,y[1])-(z\,Y(z)-z\,y[0])-Y(z)=\frac{2z}{2z+1}$
Pošto je $y[0]=1$, važi da je

$$Y(z)=\frac{2z}{(2z+1)^2\,(z-1)}+\frac{2z^2+z\,(2\,y[1]-1)}{(2z+1)\,(z-1)}.$$

Na osnovu teoreme o krajnjoj vrednosti

$$\lim_{n\to\infty} y[n]=\lim_{z\to1}(z-1)\,Y(z)=\frac{2}{9}+\frac{1+2\,y[1]}{3}=2,$$

$$y[1]=\frac{13}{6}.$$

$$Y(z)=\frac{2z}{(2z+1)^2\,(z-1)}+\frac{2z^2+z\,\frac{10}{3}}{(2z+1)\,(z-1)}$$

$$y[n]=\left(2-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{2n}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right)\mathrm{u}[n]$$

Zadatak 5.18.

Diskretni sistem sa dva izlaza je opisan sistemom diferencnih jednačina:

$$y_1[n]-y_2[n-2]=x[n]$$
$$y_2[n]-y_1[n-2]=0$$

a) Odrediti impulsni odziv primenom Z transformacije.
b) Odrediti ustaljeni odziv ako je $x[n]=3\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$.
c) Odrediti sopstveni odziv ako je $y_1[0]=y_2[1]=0$, $y_1[1]=y_2[0]=1$ pri nultoj pobudi. Potom odrediti i prinudni odziv za $x[n]=2^n\mathrm{u}[n]$.

Rešenje:

a)

$$Y_1(z)-z^{-2}Y_2(z)=X(z)$$

$$Y_2(z) - z^{-2}Y_1(z) = 0$$

Dobija se da je $H_1(z) = \frac{z^4}{z^4-1} = 1 + zz^{-1}\frac{1/4}{z-1} - zz^{-1}\frac{1/4}{z+1} - zz^{-1}\frac{1/2}{z^2+1}$, pa je:

$$h_1[n] = \delta[n] + \frac{1}{4}\mathrm{u}[n-1] - \frac{1}{4}(-1)^{n-1}\mathrm{u}[n-1] - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\mathrm{u}[n-1].$$

$$H_2(z) = z^{-2}H_1(z) = \frac{z^2}{z^4-1} = zz^{-1}\frac{1/4}{z-1} - zz^{-1}\frac{1/4}{z+1} + zz^{-1}\frac{1/2}{z^2+1}$$

$$h_2[n] = \frac{1}{4}\mathrm{u}[n-1] - \frac{1}{4}(-1)^{n-1}\mathrm{u}[n-1] + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\mathrm{u}[n-1]$$

b) Prostoperiodična pobuda daje prostoperiodičan ustaljeni odziv.

$y_{1us}[n] = 3\,\mathrm{Re}\left\{H_1\left(e^{j\frac{\pi}{6}}\right)\right\}\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) - 3\,\mathrm{Im}\left\{H_1\left(e^{j\frac{\pi}{6}}\right)\right\}\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

$y_{2us}[n] = 3\,\mathrm{Re}\left\{H_2\left(e^{j\frac{\pi}{6}}\right)\right\}\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) - 3\,\mathrm{Im}\left\{H_2\left(e^{j\frac{\pi}{6}}\right)\right\}\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

c) Sopstveni odziv se dobija na sledeći način.

$$y_1[n+2] - y_2[n] = 0$$
$$y_2[n+2] - y_1[n] = 0$$

Primenom Z transformacije dobija se

$$z^2Y_1(z) - z^2y_1[0] - zy_1[1] - Y_2(z) = 0,$$
$$z^2Y_2(z) - z^2y_2[0] - zy_2[1] - Y_1(z) = 0,$$

pa je

$$Y_{1S}(z) = \frac{z^3+z^2}{z^4-1} = \frac{z^2}{(z-1)(z^2+1)} = z\frac{A}{z-1} + z\frac{Bz+C}{z^2+1},$$

$A = \frac{1}{2}$, $Q = \frac{1-j}{2}$, $B = -C = -\frac{1}{2}$,

$y_{1S}[n] = \frac{1}{2}\mathrm{u}[n] + \frac{1}{2}\sin(n\pi/2)\mathrm{u}[n] - \frac{1}{2}\cos(n\pi/2)\mathrm{u}[n]$,

$$Y_{2S}(z) = \frac{z^4+z}{z^4-1} = z\frac{z^2-z+1}{(z-1)(z^2+1)} = z\frac{A}{z-1} + z\frac{Bz+C}{z^2+1},$$

$A = \frac{1}{2}$, $Q = \frac{-1+j}{2}$, $B = -C = \frac{1}{2}$,

$y_{2S}[n] = \frac{1}{2}\mathrm{u}[n] - \frac{1}{2}\sin(n\pi/2)\mathrm{u}[n] + \frac{1}{2}\cos(n\pi/2)\mathrm{u}[n]$.

Prinudni odziv se određuje konvolucijom impulsnog odziva i signala na ulazu.

$$Y_{1P}(z) = X(z)H_1(z) = \frac{z^5}{(z-2)(z^4-1)} = \frac{Az}{z-1} + \frac{Bz}{z+1} + \frac{Cz}{z-2} + z\frac{Dz+E}{z^2+1}$$

$$A = -\frac{1}{4}, B = \frac{1}{12}, C = \frac{16}{15}, Q = \frac{2+j}{10}, D = \frac{1}{10}, E = \frac{1}{5}$$

$$y_{1P}(t) = -\frac{1}{4}\mathrm{u}[n] + \frac{1}{12}(-1)^n\mathrm{u}[n] + \frac{16}{15}2^n\mathrm{u}[n] + \frac{1}{10}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{u}[n] + \frac{1}{5}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{u}[n]$$

$$Y_{2P}(z) = X(z)H_2(z) = \frac{z^3}{(z-2)(z^4-1)} = \frac{Az}{z-1} + \frac{Bz}{z+1} + \frac{Cz}{z-2} + z\frac{Dz+E}{z^2+1}$$

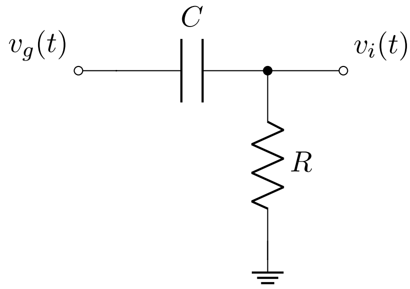
$$A = -\frac{1}{4}, B = \frac{1}{12}, C = \frac{4}{15}, Q = \frac{-2-j}{10}, D = -\frac{1}{10}, E = -\frac{1}{5}$$

$$y_{2P}(t) = -\frac{1}{4}\mathrm{u}[n] + \frac{1}{12}(-1)^n\mathrm{u}[n] + \frac{4}{15}2^n\mathrm{u}[n] - \frac{1}{10}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{u}[n] - \frac{1}{5}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{u}[n]$$

6.3.1 SC kola*

Zadatak 5.19.

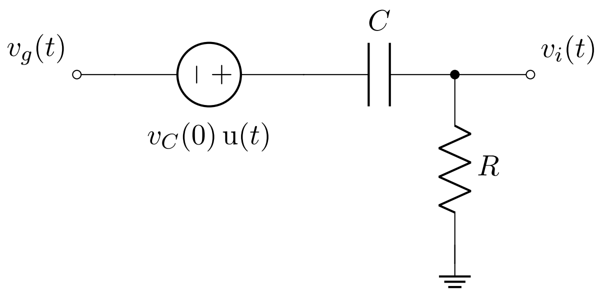
a) U funkciji od R i C odrediti prinudni odziv kola sa slike 5.19.1 ako je pobuda $v_g(t) = \mathrm{u}(t)$.
b) Ako se otpornik u kolu sa slike 5.19.1 zameni dvofaznim paralelno prekidačko kapacitivnim ekvivalentom, gde je učestanost prekidanja $\omega_S = \frac{10}{\tau}$, a τ vremenska konstanta kola, odrediti vrednost kondenzatora u prekidačko kapacitivnom otporniku.
c) Analizirajući stanja prekidača i protok naelektrisanja, formirati diferencnu jednačinu kola i odrediti prinudni odziv kola $v_i[n]$ ako je pobuda $v_g[n] = \mathrm{u}[n]$.
d) Dokazati da je signal $v_i[n]$ aproksimacija signala $v_i(t)$.



Slika 5.19.1.

Rešenje:

a) Kolo sa početnim uslovom $v_C(0)$ je prikazano na slici 5.19.2.



Slika 5.19.2.

Kako je $i_C(t) = \frac{v_i(t)}{R} = \frac{v_g(t) - v_C(0)\,\mathrm{u}(t) - v_C(t)}{R}$, određuje se diferencijalna jednačina:

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{v_g - v_C(0)\,\mathrm{u}(t)}{R},$$

pri čemu je za određivanje prinudnog odziva $v_C(0) = 0$. Nakon primene Laplasove transformacije

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right) V_C(s) = \frac{1}{sRC},$$

$$V_C(s) = \frac{1}{sRC\,\left(s + \frac{1}{RC}\right)},$$

pa je $V_i(s) = V_g(s) - V_C(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$, pa je

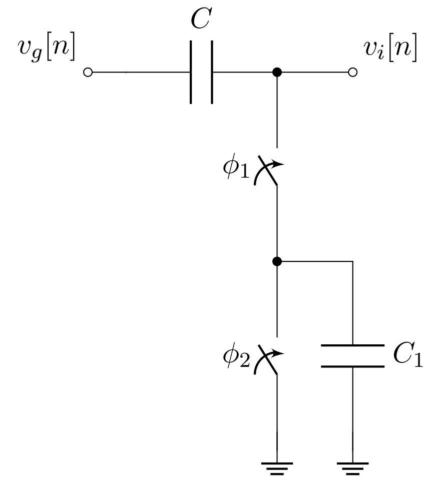
$$v_i(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\,\mathrm{u}(t), \quad \tau = RC.$$

b) Na slici 5.19.3 je prikazano kolo u kome je otpornik zamenjen prekidačima kontrolisanim signalima ϕ_1 i ϕ_2 i kondenzatorom C_1. Perioda prekidanja prekidača je data sa:

$$T_S = \frac{2\pi}{\frac{10}{\tau}} = \frac{\pi\,\tau}{5},$$

pa je odgovarajuća kapacitivnost:

$$C_1 = \frac{T_S}{R} = \frac{\pi\, C}{5}.$$



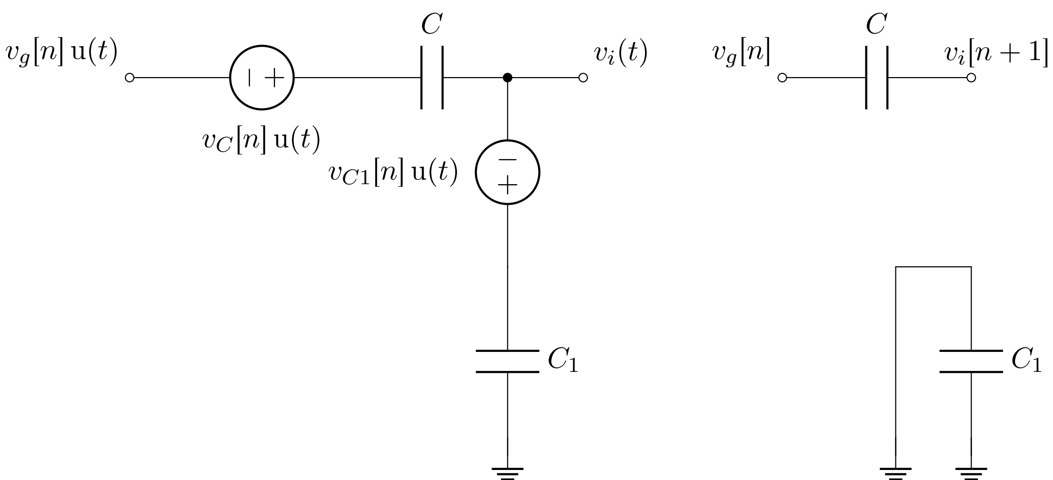
Slika 5.19.3.

c) U toku prve polovine periode T_S je uključen prekidač ϕ_1, a isključen ϕ_2, pa je odgovarajuće kolo kao na slici 5.19.4 levo. Vrednosti $v_g[n]$, $v_C[n]$ i $v_{C1}[n]$ su napon na ulazu i naponi na kondenzatorima na početku periode. Kada se primeni Laplasova transformacija dobija se da je

$$V_i^*(s) = \frac{\frac{1}{sC_1}}{\frac{1}{sC} + \frac{1}{sC_1}} \left(\frac{v_g[n] - v_C[n] - v_{C1}[n]}{s} \right) + \frac{v_{C1}[n]}{s},$$

$$V_i^*(s) = \frac{C}{C + C_1}\, \frac{v_g[n] - v_C[n]}{s} + \frac{C_1}{C + C_1}\, \frac{v_{C1}[n]}{s}.$$

$$v_i^*[n] = \frac{C}{C + C_1}\, (v_g[n] - v_C[n]) + \frac{C_1}{C + C_1}\, v_{C1}[n]$$



Slika 5.19.4.

Na slici 5.19.4 desno je prikazano kolo u drugoj polovini periode T_S kada je isključen prekidač ϕ_1, a uključen ϕ_2. Za vreme ove periode se kondenzator C_1 isprazni, pa je $v_{C1}[n+1] = 0$, a kako nema struje važi da je $v_i[n+1] = v_i^*$.

Na osnovu analize u drugoj polovini periode se vidi da važi da je $v_{C1}[n] = 0$ i $v_C[n] = v_g[n-1] - v_i[n]$. Dobija se

$$v_i[n+1] = a\, v_g[n] - a\, v_g[n-1] + a\, v_i[n], \quad a = \frac{C}{C + C_1}.$$

Primenom Z transformacije je

$$z\,V_i(z) - z\,v_i[0] - a\,V_i(z) = a\,(1 - z^{-1})\,V_g(z),$$

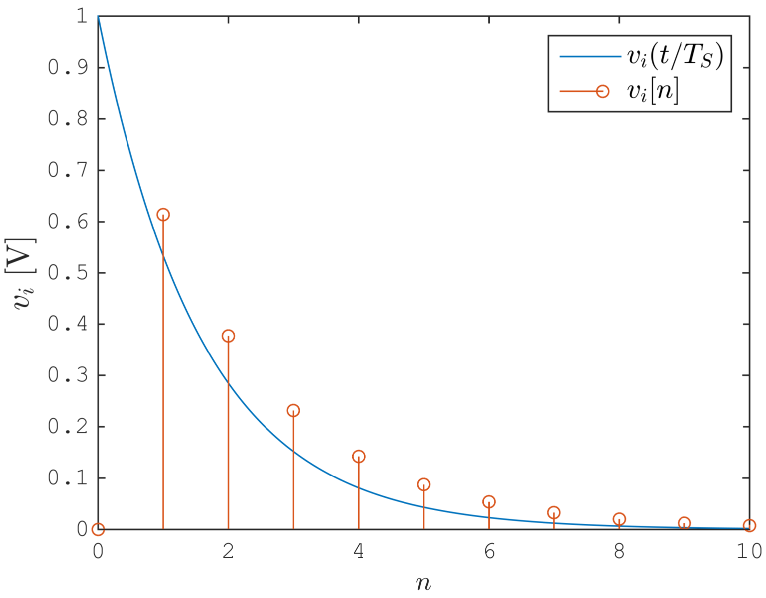
što za $v_i[0] = 0$ daje

$$(z-a)\,V_i(z) = a\,\frac{z-1}{z}\,\frac{z}{z-1} = a,$$

pa je $V_i(z) = \frac{a}{z-a}$, odnosno

$$v_i[n] = a\,a^{n-1}\,\mathrm{u}[n-1] = a^n\,\mathrm{u}[n-1].$$

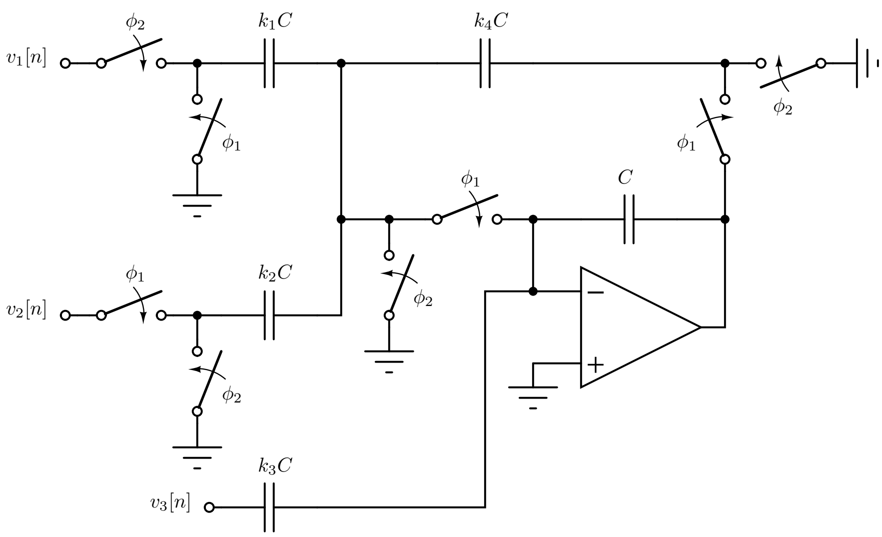
d) Na slici 5.19.5 su prikazani dijagrami $v_i(t/T_S)$ i $v_i[n]$. Vidi se da je $v_i[n]$ zaista aproksimacija $v_i(t)$.



Slika 5.19.5.

Zadatak 5.20.

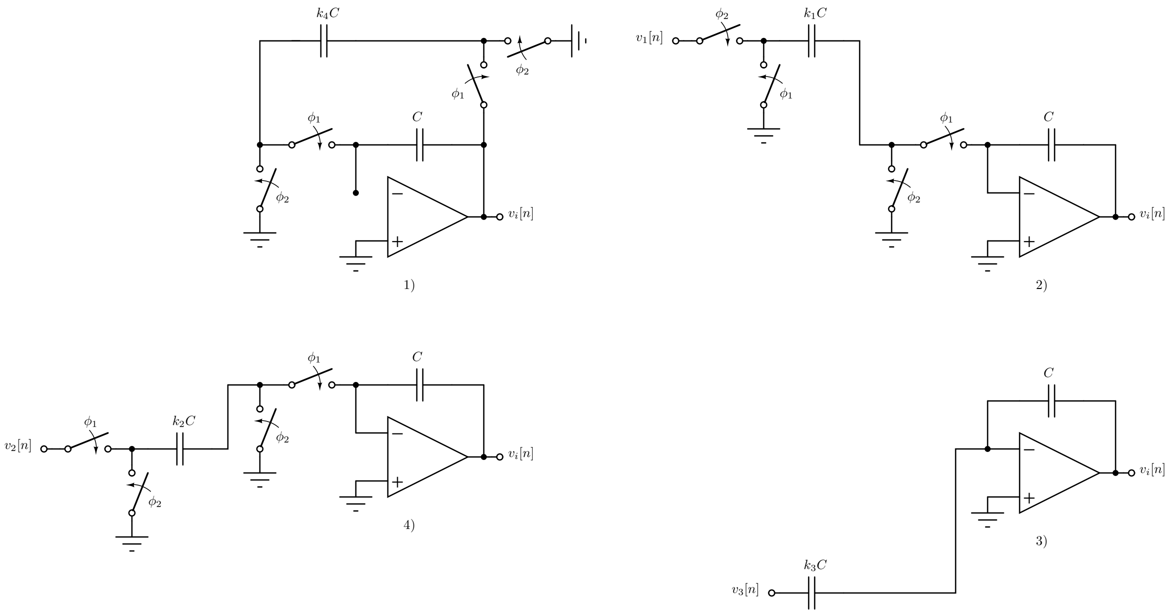
a) Za kolo sa slike 5.20.1 odrediti zavisnost izlaznog signala od ulaznih signala ako su početni uslovi jednaki nuli. Faze takta odabiranja su ϕ_1 i ϕ_2 kada su odgovarajući prekidači uključeni.
b) Odrediti odziv kola $v_i[n]$ ako su $v_1[n] = a^n\,\mathrm{u}[n]$, $v_2[n] = n\,\mathrm{u}[n]$ i $v_3[n] = \delta[n]$.



Slika 5.20.1.

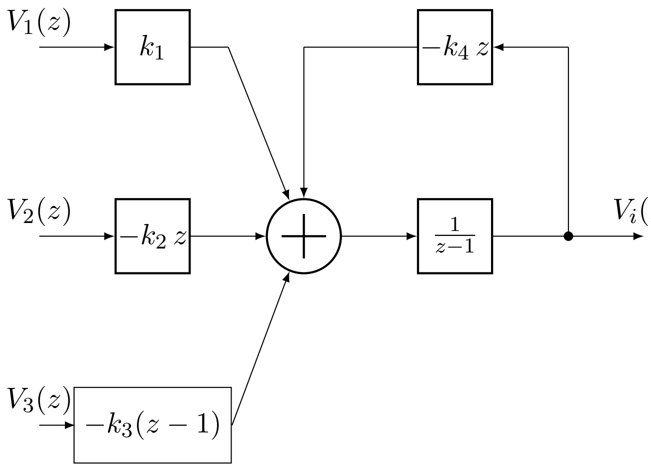
Rešenje:

a) Kolo sa slike 5.20.1 može da se rastavi na 4 kola koja imaju različite funkcije kao na slici 5.20.2. Na slici 5.20.2 je 1) prikazan invertujući integrator čija je funkcija $V_{i1}(z) = -k_4 \frac{z}{z-1} V_i(z)$, 2) je neinvertujući integrator $V_{i2}(z) = \frac{k_1}{z-1} V_1(z)$, 3) je invertujući integrator $V_{i3}(z) = -k_2 \frac{z}{z-1} V_2(z)$ i 4) je pojačavač $V_{i4}(z) = -k_3 V_3(z)$.



Slika 5.20.2.

Nakon primene superpoyicije dato kolo se može predstaviti blok dijagramom sa slike 5.20.3.



Slika 5.20.3.

Na osnovu dijagrama je:

$$V_i(z) = \frac{\frac{1}{z-1}}{1+\frac{k_4}{z-1}} \left(k_1 V_1(z) - k_2\, z\, V_2(z) - k_3\,(z-1)\, V_3(z)\right) = \frac{\alpha}{z-\alpha} \left(k_1 V_1(z) - k_2\, z\, V_2(z) - k_3\,(z-1)\, V_3(z)\right),$$

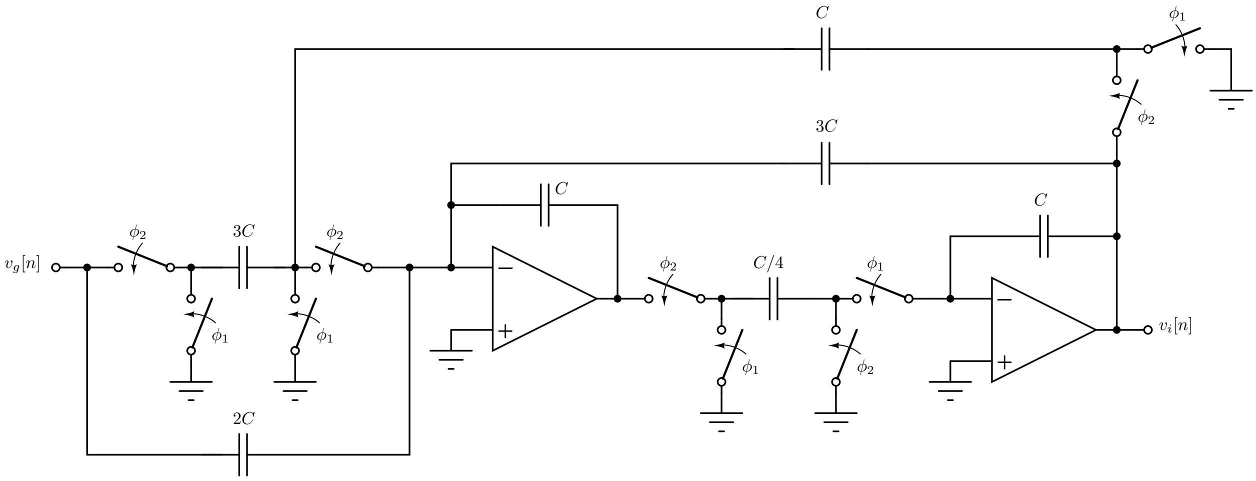
za $\alpha = \frac{1}{1+k_4}$.

$$V_i(z) = \alpha k_1 \frac{z}{(z-a)\,(z-\alpha)} - \alpha k_2 \frac{z^2}{(z-\alpha)\,(z-1)^2} - \alpha k_3 \frac{z-1}{z-\alpha}$$

$$v_i[n] = \left(k_1 \alpha \frac{a^n - \alpha^n}{a-\alpha} - k_2 \alpha \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} - k_3\, \alpha^{n+1}\right) \mathrm{u}[n] + k_3\, \alpha^n\, \mathrm{u}[n-1]$$

Zadatak 5.21.

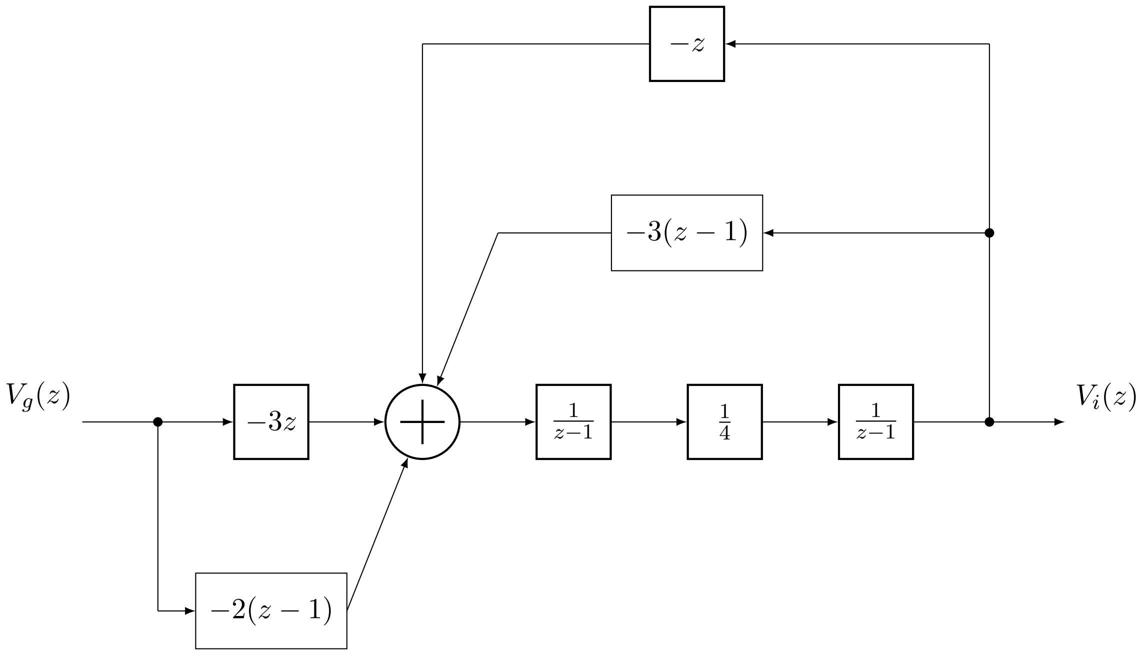
Za kolo sa slike 5.21.1:
a) Odrediti funkciju prenosa u Z domenu.
b) Odrediti prinudni odziv na pobudu $v_g[n] = (n-1)\, a^n \,\mathrm{u}[n-2]$.
Smatrati da su operacioni pojačavači idealni, ϕ_1 i ϕ_2 su faze takta signala odabiranja kada su odgovarajući prekidači uključeni.



Slika 5.21.1.

Rešenje:

a) Formira se blok dijagram sa slike 5.21.2.



Slika 5.21.2.

Na osnovu blok dijagrama funkcija prenosa glasi:

$$H(z) = -\frac{(3z + 2\,(z-1))\,\frac{1}{4\,(z-1)^2}}{1 + \frac{z}{4\,(z-1)^2} + \frac{3\,(z-1)}{4\,(z-1)^2}} = -\frac{5z-2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

b) $v_g[n] = a^2\, a^{n-2}\,((n-2)+1)\,\mathrm{u}[n-2]$

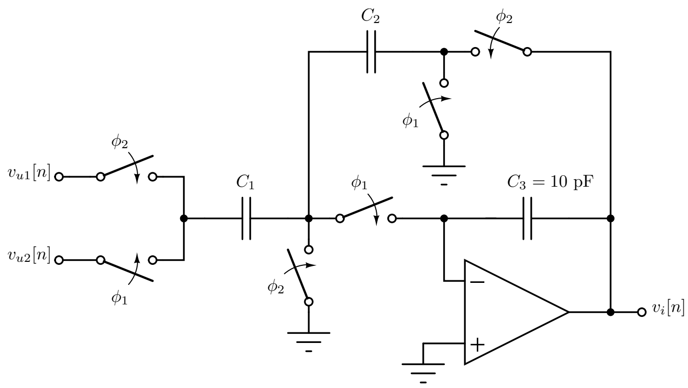
$$V_g(z) = a^2\, z^{-2}\left(\frac{az}{(z-a)^2} + \frac{z}{z-a}\right) = \frac{a^2}{(z-a)^2}$$

$$V_i(z) = -\frac{a^2}{4}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}-a\right)^2}\,\frac{1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{2}-5a}{\left(\frac{1}{2}-a\right)^3}\,\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{5a-2}{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}\,\frac{1}{z-a} + \frac{\frac{3}{2}-5a}{\left(a-\frac{1}{2}\right)^3}\,\frac{1}{(z-a)^2}\right) z\,z^{-1}$$

$$v_i[n] = -\frac{a^2}{4}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}-a\right)^2}\,2^{-(n-1)} + \frac{3-10a}{\left(\frac{1}{2}-a\right)^3}\,(n-1)\,2^{-(n-1)} + \frac{5a-2}{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}\,a^{n-1} + \frac{\frac{3}{2a}-5}{\left(a-\frac{1}{2}\right)^3}\,(n-1)\,a^{n-1}\right) \mathrm{u}[n-1]$$

Zadatak 5.22.

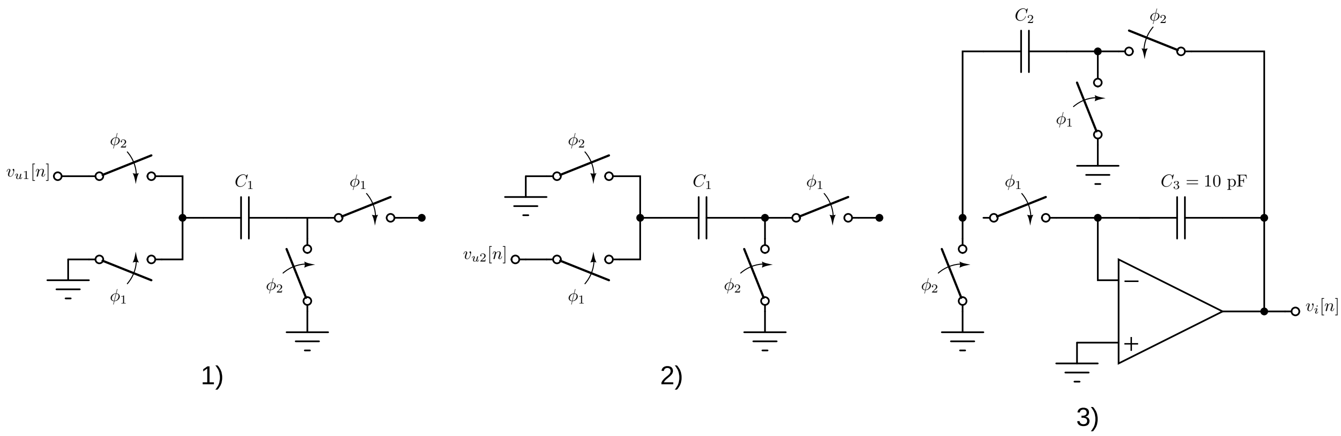
a) Za kolo sa slike 5.22.1 odrediti kapacitivnosti C_1 i C_2 tako da izlazni napon ima vrednost $V_i(z) = \frac{V_{u1}(z) - z\,V_{u2}(z)}{3\left(z-\frac{1}{3}\right)}$. Faze takta odabiranja kada se uključuju prekidači su označene sa ϕ_1 i ϕ_2.
b) Odrediti diferencnu jednačinu koja opisuje zavisnost izlaznog napona od oba ulaza.
c) Ako je $v_{u1}[n] = 0$ i $v_{u2}[n] = V_0\,(n-1)\,a^{n-2}\,\mathrm{u}[n-1]$, odrediti prinudni odziv kola.



Slika 5.22.1.

Rešenje:

a) Primenom superpozicije kolo se može razdvojiti na tri dela kao na slici 5.22.2.



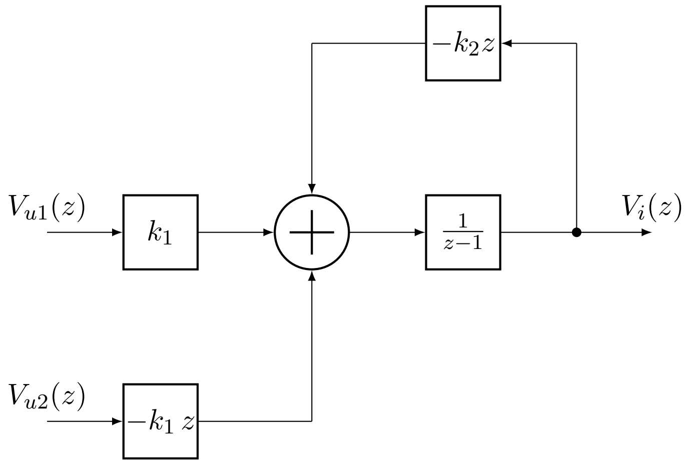
Slika 5.22.2.

Na osnovu pojedinačnih delova se može formirati blok dijagram kao na slici 5.22.3. Neka je $C_1 = k_1\,C$ i $C_2 = k_2\,C$. Odavde je

$$V_i(z) = k_1\left(V_{u1}(z) - z\,V_{u2}(z)\right)\frac{\frac{1}{z-1}}{1+\frac{k_2\,z}{z-1}} = \frac{k_1}{1+k_2}\left(V_{u1}(z) - z\,V_{u2}(z)\right)\frac{1}{z-\frac{1}{1+k_2}}.$$

Odavde je $1 + k_2 = 3$, odnosno $k_2 = 2$, pa je na osnovu jednakosti $\frac{k_1}{1+k_2} = \frac{1}{3}$ i $k_1 = 1$. Računa se $C_1 = k_1\,C = C = 10$ pF i $C_2 = k_2\,C = 20$ pF.
b)

$$(3z-1)\,V_i(z) = V_{u1}(z) - z\,V_{u2}(z)$$



Slika 5.22.3.

$$3\, v_i[n+1] - v_i[n] = v_{u1}[n] - v_{u2}[n+1]$$

c) Z transformacija ulaznog napona $v_{u2}[n]$ je

$$V_{u2}(z) = \frac{V_0}{az}\,\frac{az}{(z-a)^2} = \frac{V_0}{(z-a)^2},$$

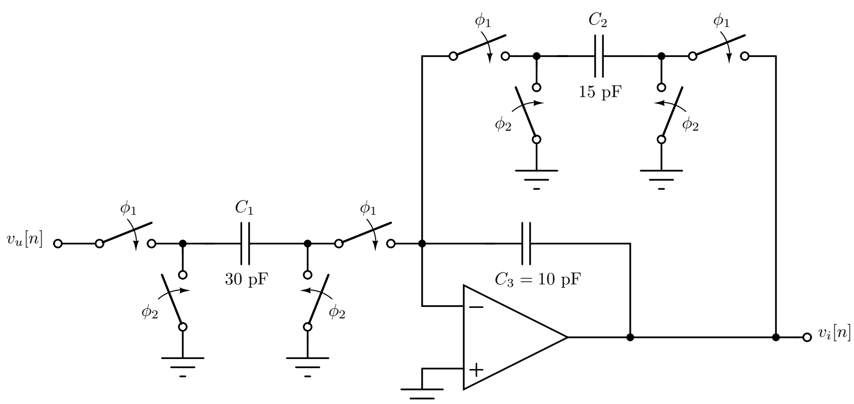
pa je

$$V_i(z) = -\frac{V_0\, z}{(z-a)^2\,\left(z-\frac{1}{3}\right)}.$$

$$v_i[n] = \frac{V_0}{3}\left(\frac{a^n - 3^{-n}}{\left(\frac{1}{3}-a\right)^2} + \frac{n\, a^{n-1}}{\frac{1}{3}-a}\right)$$

Zadatak 5.23.

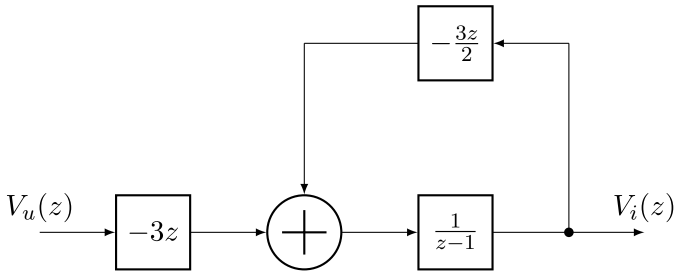
a) Za kolo sa slike 5.23.1 odrediti prenosnu funkciju $H(z) = \frac{V_i(z)}{V_u(z)}$ ako su ϕ_1 i ϕ_2 faze takta kada su odgovarajući prekidači uključeni.
b) Ako je $v_i[n] = V_0\,(n+1)\,3^{1-n}\,\mathrm{u}[n-2] + 2\,V_0\,\delta[n-1]$, primenom unilateralne Z transformacije odrediti $v_u[n]$.
c) Objasniti da li je rešenje b) jedinstveno.
d) Objasniti kako se može uprostiti kolo sa slike 5.23.1 bez promene njegove funkcije.



Slika 5.23.1.

Rešenje:

a) Kolo može da se predstavi blok dijagramom sa slike 5.23.2.



Slika 5.23.2.

Na osnovu blok dijagrama sa slike 5.23.2 dobija se prenosna funkcija:

$$H(z) = -3z \frac{\frac{1}{z-1}}{1+\frac{3}{2}\frac{z}{z-1}} = -\frac{6}{5}\frac{z}{z-\frac{2}{5}}.$$

b) Prvi način:

$$V_i(z) = V_u(z)\,H(z) \quad \Rightarrow \quad V_u(z) = \frac{V_i(z)}{H(z)}$$

$$V_i(z) = V_0\left(\frac{z}{\left(z-\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{3z}{z-\frac{1}{3}} - 3\right)$$

Dobija se da je

$$V_u(z) = -\frac{5\,V_0}{6}\left(\frac{z-\frac{2}{5}}{\left(z-\frac{1}{3}\right)^2} + 3\,\frac{z-\frac{2}{5}}{z-\frac{1}{3}} - 3\,\frac{z-\frac{2}{5}}{z}\right) = -\frac{V_0}{6}\left(\frac{5z-2}{\left(z-\frac{1}{3}\right)^2} + 3\,\frac{5z-2}{z-\frac{1}{3}}\right) + V_0\left(\frac{5}{2} - z^{-1}\right),$$

$$v_u[n] = \frac{V_0}{2}\left(-5\cdot 3^{-n} + n\cdot 3^{-n}\right)\mathrm{u}[n] + \frac{5V_0}{2}\,\delta[n] - V_0\,\delta[n-1] = \frac{V_0}{2}\,(n-5)\,3^{-n}\,\mathrm{u}[n-1] - V_0\,\delta[n-1].$$

Drugi način:

$$V_i(z) = H(z)\,V_u(z) \quad \Rightarrow \quad -\frac{5-2z^{-1}}{6}\,V_i(z) = V_u(z)$$

Na osnovu toga može da se napiše diferencna jednačina kojom se opisuje sistem:

$$-\frac{5}{6}\,v_i[n] + \frac{1}{3}\,v_i[n-1] = v_u[n],$$

$$v_u[n] = -\frac{5}{6}\,\left(V_0\,(n+1)\,3^{1-n}\,\mathrm{u}[n-2] + 2\,V_0\,\delta[n-1]\right) + \frac{1}{3}\,\left(V_0\,n\,3^{2-n}\,\mathrm{u}[n-3] + 2\,V_0\,\delta[n-2]\right),$$

$$v_u[n] = \frac{V_0}{2}\left(n\,3^{-n} - 5\cdot 3^{-n}\right)\mathrm{u}[n-1] - V_0\,\delta[n-1].$$

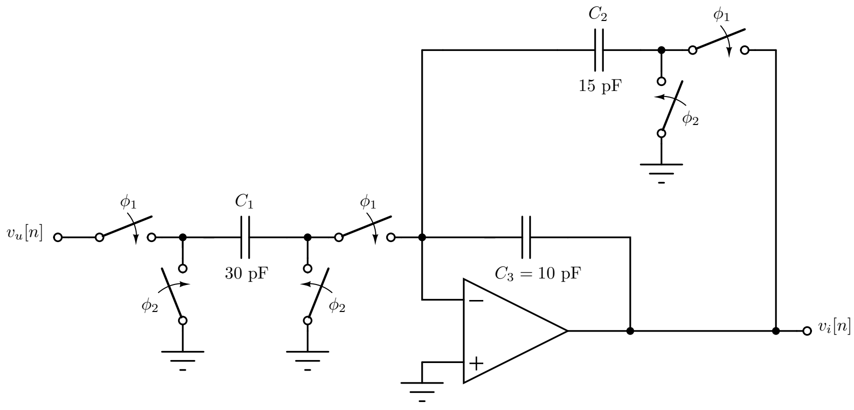
c) Sve pobude koje pored odziva iz prethodne tačke proizvode i član $C\,\delta[n]$, gde je $C \in \mathbb{R}$ konstanta, za $n > 0$ imaju isti oblik, pa mogu biti rešenja tačke b).

d) Pošto se i C_1 i C_2 u toku ϕ_1 povezuju na sumirajuću tačku pojačavača, a u toku ϕ_2 na masu, umesto 4, mogu da se koriste samo 2 prekidača kao na slici 5.23.3.

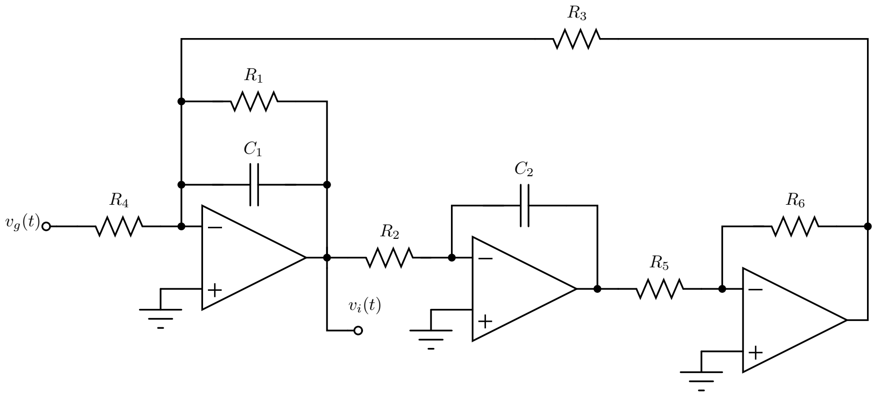
Zadatak 5.24.

a) Koristeći paralelni ekvivalent prekidačko-kapacitivnog otpornika, realizovati prekidačko kapacitivno kolo sa slike 5.24.1. Poznato je $R_1 = R_5 = R_6 = 10$ kΩ, $R_2 = R_3 = 1$ kΩ, $R_4 = 100$ Ω i $C_1 = C_2 = 1$ μF.
b) Odrediti vrednosti kondenzatora ako je učestanost odabiranja $\omega_S = 10^6$ $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.
c) Odrediti funkciju prenosa kola u Z domenu.
d) Odrediti prinudni prelazni i ustaljeni odziv kola ako je $v_g[n] = 5$ V $\mathrm{u}[n-3]$.

Rešenje:



Slika 5.23.3.

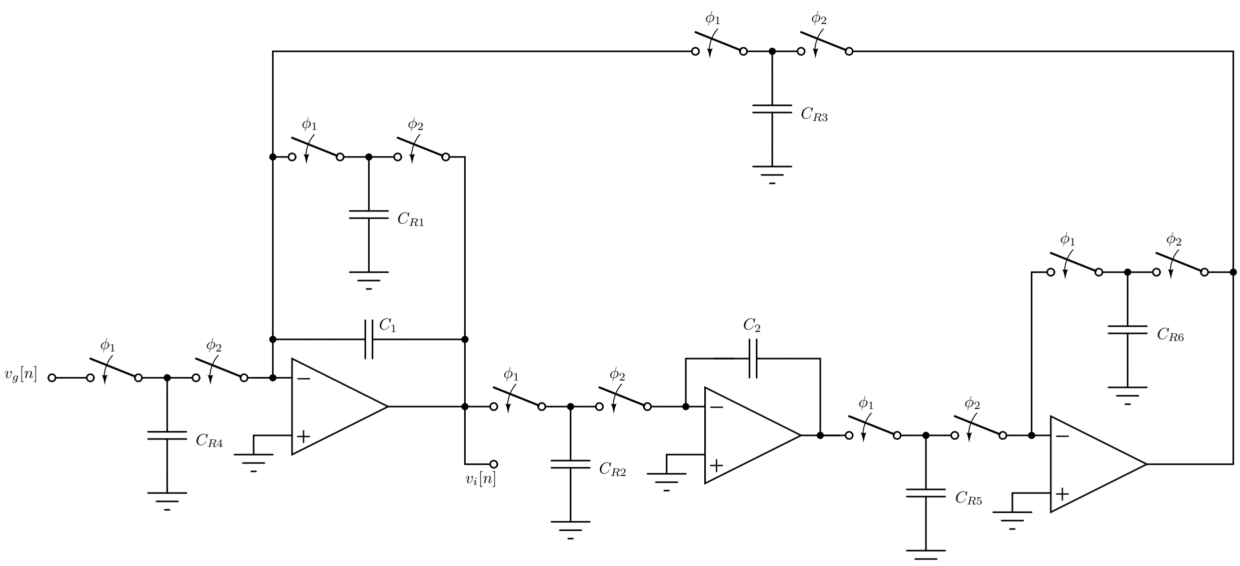


Slika 5.24.1.

a) Kolo sa slike 5.24.1 predstavlja propusnik opsega učestanosti čija je prenosna funkcija data sa:

$$H(s) = \frac{-\dfrac{s}{R_4\,C_1}}{s^2 + \dfrac{s}{R_1\,C_1} + \dfrac{R_6}{R_5\,R_2\,R_3\,C_1\,C_2}} = -\frac{10^4 \cdot s}{s^2 + 100\,s + 10^6}.$$

Zamenom otpornika njihovim paralelnim ekvivalentom dobija se kolo sa slike 5.24.2.



Slika 5.24.2.

Vrednosti upotrebljenih kondenzatora se određuju prema formuli $C_{Ri} = \dfrac{2\pi}{\omega_S\,R_i}$, gde je $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Računa se $C_{R1} = C_{R5} = C_{R6} = 628$ pF, $C_{R2} = C_{R3} = 6.28$ nF i $C_{R4} = 62.8$ nF.

b) Funkcija prenosa realizovanog kola je:

$$H(z) = -\frac{\frac{a\,(z-1)}{T}}{\frac{(z-1)^2}{T^2} + \frac{b\,(z-1)}{T} + c},$$

gde je $a = 10^4$, $b = 10^2$, $c = 10^6$, a $T = \frac{2\pi}{\omega_S}$.

c) $Y(z) = H(z)\,\frac{5\,z\,z^{-3}}{z-1} = -z^{-3}\,\dfrac{5aT\,z}{z^2 + z\,(b-2)\,T + (c-b+1)\,T^2} = A_1\,z^{-3}\,\dfrac{\alpha\,z\,\sin(\theta)}{z^2 - 2\alpha\,z\,\cos(\theta) + \alpha^2}$

$$Y(z) = -\frac{0.3142}{z^2 + 6.1575\cdot 10^{-4}\,z + 3.9475\cdot 10^{-5}}$$

Dobija se $\alpha = 0.0063$, $\cos(\theta) = -0.0490$, pa je $\theta = 92.8086^\circ$ i $A_1 = 50.4388$.

$$y[n] = A_1\,\alpha^{n-3}\,\sin[(n-3)\theta]\,\mathrm{u}[n-3]$$

Zadatak 5.25.*

Primenom Z transformacije izračunati verižni razlomak:

$$R_n = 3 - \left.\cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \frac{2}{\cdots}}}}\right\}\; n \text{ razlomačkih crta},$$

$R_0 = 3$.

Rešenje:

Pošto se razlomak sa jednom razlomačkom crtom dobija po formuli $R_{n+1} = 3 - \frac{2}{R_n}$, važi da je $R_{n+1}\,R_n - 3\,R_n + 2 = 0$. Dobijena realicija predstavlja nelinearnu diferencnu jednačinu. Opšti oblik takve jednačine glasi:

$$x[n+1]\,x[n] + b\,x[n+1] + c\,x[n] + d = 0.$$

Ako se uvede smena $x[n] = \frac{w[n+1]}{w[n]} - b$, dobija se jednačina

$$\left(\frac{w[n+2]}{w[n+1]} - b\right)\left(\frac{w[n+1]}{w[n]} - b\right) + b\left(\frac{w[n+2]}{w[n+1]} - b\right) + c\left(\frac{w[n+1]}{w[n]} - b\right) + d = 0.$$

Sređivanjem izraza dobija se jednačina:

$$w[n+2] + (c-b)\,w[n+1] + (d-bc)\,w[n] = 0,$$

što predstavlja linearnu diferencnu jednačinu.

U ovom zadatku je $b = 0$, $c = -3$ i $d = 2$, pa je

$$w[n+2] - 3\,w[n+1] + 2\,w[n] = 0,$$

što nakon primene Z transformacije daje:

$$z^2\,W(z) - z^2\,w[0] - z\,w[1] - 3z\,W(z) + 3z\,w[0] + 2\,W(z) = 0,$$

$$W(z) = \frac{(z^2 - 3z)\,w[0] + z\,w[1]}{z^2 - 3z + 2},$$

$$w[n] = 2^n\,(w[1] - w[0]) - (w[1] - 2\,w[0]).$$

Sada je potrebno odrediti početne uslove: $w[0] = 1$ i $w[1] = 3$, pa je

$$w[n] = 2^{n+1} - 1,$$

pa je $R_n = \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1}$.

Zadatak 5.26.*

Primenom unilateralne Z transformacije odrediti potpuni odziv vremenski promenljivih sistema opisanih diferencnim jednačinama:
a) $(n+2)\, x[n+1] + (n+1)\, x[n] = 2\,\mathrm{u}[n]$, $x[0] = 1$;
b) $(n+1)\, x[n+1] - 2\,(n+3)\, x[n] = 0$, $x[0] = 2$;
c) $(k-n)\, x[n+1] + a\,(n+1)\, x[n] = \binom{n+1}{k} a^{n+1}\,\mathrm{u}[n]$, $x[0] = 0$, $x[k+1] = (k+1)\, a^{k+1}$;
d) $(n^2 + 5n + 6)\, a[n+2] - 5\,(n^2 + 3n + 2)\, a[n+1] + 6\,(n^2 + n)\, a[n] = n\,\mathrm{u}[n]$, $a[1] = \frac{1}{2}$.

Rešenje:

a) Primenom Z transformacije na levu i desnu stranu polazne diferencne jednačine i uzimajući u obzir teoremu o diferenciranju slike u kompleksnom domenu, dobija se:

$$-z\frac{d}{dz}(z\,X(z) - z\,x[0]) + 2\,(z\,X(z) - z\,x[0]) - z\,\frac{d}{dz}X(z) + X(z) = \frac{2z}{z-1},$$

$$-z\,(z\,X'(z) + X(z) - 1) + 2z\,X(z) - 2z - z\,X'(z) + X(z) = \frac{2z}{z-1},$$

$$-X'(z)\,(z^2 + z) + X(z)\,(z+1) = z + \frac{2z}{z-1} = \frac{z^2+z}{z-1},$$

$$X'(z) - \frac{X(z)}{z} = -\frac{1}{z-1}.$$

Ako se uvede smena $Y(z) = \frac{X(z)}{z}$, dobija se da je

$$Y'(z) = \frac{z\,X'(z) - X(z)}{z^2} = \frac{X'(z) - \frac{X(z)}{z}}{z} = -\frac{1}{z\,(z-1)}.$$

pa je

$$Y(z) = C - \int \frac{1}{z\,(z-1)} = C + \ln\left(\frac{z}{z-1}\right),$$

$$X(z) = C\,z + z\,\ln\left(\frac{z}{z-1}\right).$$

Na osnovu tablice transformacija se dobija da je

$$x[n] = -n\,\delta[n]\,C + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Napomena: Do rešenja se moglo jednostavnije doći smenom $(n+1)\,x[n] = y[n]$.

b) $-z\dfrac{d}{dz}(z\,X(z) - z\,x[0]) + z\,X(z) - z\,x[0] + 2z\,\dfrac{d}{dz}X(z) - 6X(z) = 0$

$$X'(z)\,(-z^2 + 2z) - 6X(z) = 0$$

$$\frac{dX(z)}{X(z)} = -6\,\frac{dz}{z\,(z-2)} = 3\,\frac{dz}{z} - 3\,\frac{dz}{z-2}$$

$$\ln(X(z)) = \ln(C) + 3\,\ln\left(\frac{z}{z-2}\right)$$

$$X(z) = C\,\frac{z^3}{(z-1)^3}$$

$$x[n] = C\,(n+1)\,(n+2)\,2^n$$

Pošto je $x[0] = 2$, dobija se da je $C = 1$.

c) $k\,(z\,X(z) - z\,x[0]) + z\,\frac{d}{dz}(z\,X(z) - z\,x[0]) - az\,\frac{d}{dz}X(z) + a\,X(z) = \frac{a^k\,z^2}{(z-a)^{k+1}}$

$$X'(z)\,(z^2 - az) + X(z)\,((k+1)\,z + a) = \frac{a^k\,z^2}{(z-a)^{k+1}}$$

$$X'(z) + X(z)\left(\frac{k+1}{z-a} + \frac{a}{z\,(z-a)}\right) = \frac{a^k\,z}{(z-a)^{k+2}}$$

Dobijena diferencijalna jednačina je linearna diferencijalna jednačina prvog reda.

$$X(z) = \frac{z}{(z-a)^{k+2}}\,(C + \int a^k\,dz) = \frac{Cz}{(z-a)^{k+2}} + \frac{a^k\,z^2}{(z-a)^{k+2}}$$

$$x[n] = C\,\frac{n\,(n-1)\,\cdots\,(n-k)\,a^{n-k-1}}{(k+1)!} + a^k\,\frac{n\,(n-1)\,\cdots\,(n-k+1)\,a^{n-k}}{(k+1)!}$$

$$x[n] = C\,\frac{n!\,a^{n-k-1}}{(k+1)!\,(n-k-1)!} + a^k\,\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!} = a^{n-k-1}\binom{n}{k+1} + a^n\binom{n+1}{k+1}$$

Ako se posmatra diferencijalna jednačina za zadati početni uslov, može se zaključiti da je: $x[n] = 0$ za $k > n+1$. Na osnovu toga važi

$$(k-(k-1))\,x[k] + a\,k\,\underbrace{x[k-1]}_{0} = \binom{k}{k}\,a^k, \quad x[k] = a^k,$$

$$(k-k)\,x[k+1] + a\,(k+1)\,x[k] = \binom{k+1}{k}\,a^{k+1}.$$

Vidi se da se $x[k+1]$ ne može odrediti na osnovu $x[k]$, pa je $x[k+1]$ dato kao početni uslov:

$$x[k+1] = a^{k+1-k+1}\,C\binom{k+1}{k+1} + a^{k+1}\binom{k+2}{k+1} \quad \Rightarrow \quad (k+1)\,a^{k+1} = C\,a^2 + a^{k+1}\,(k+2),$$

$$(k+1)\,a^{k-1} = C + (k+2)\,a^{k-1}, \quad C = -a^{k-1}.$$

$$x[n] = a^n\left(\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k+1}\right) = a^n\binom{n}{k}$$

Napomena: Niz $y[n] = (n+1)\,a^{n+1}\,\mathrm{u}[n]$ nije rešenje jednačine. što bi se moglo pogrešno zaključiti na osnovu vrednosti $k+1$-og člana niza $x[k+1] = (k+1)\,a^{k+1}$.

d) Uvođenjem smene $x[n] = n\,(n+1)\,a[n]$, gde je $x[0] = 0$ i $x[1] = 1$, dobija se:

$$x[n+2] - 5x[n+1] + 6\,x[n] = n\,\mathrm{u}[n],$$

$$X(z)\,(z^2 - 5z + 6) = \frac{z}{(z-1)^2} + z,$$

$$x[n] = \frac{5\cdot 3^n - 2^{n+3} + 2n + 3}{4},$$

$$a[n] = \frac{5\cdot 3^n - 2^{n+3} + 2n + 3}{4\,n\,(n+1)}.$$

Zadatak 5.27.*

Primenom unilateralne Z transformacije naći koeficijente $a[n]$ razvoja u potencijalni red oblika $R = \sum_{n=0}^{+\infty} a[n]\, x^n$ funkcije $f(x) = \frac{1-4x}{1-4x+5x^2-2x^3}$.

Rešenje:

Pod pretpostavkom da se data funkcija može razviti u stepeni red, na osnovu definicije Z transformacije jednostavno je zaključiti da važe sledeće realacije na osnovu kojih se može odrediti niz koeficijenata $a[n]$

$$\mathcal{Z}\left\{a[n]\right\} = f\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$a[n] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{f\left(\frac{1}{z}\right)\right\}.$$

Pošto je

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z^3 - 4\,z^2}{(z-1)^2\,(z-2)},$$

niz $a[n]$ je jednak

$$a[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{\Gamma^+} z^{n+1}\, f\left(\frac{1}{z}\right)\, dz = -2^{n+2} + 3n + 5.$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (5 + 3n - 2^{n+2})\, x^n$$

Razvoj važi za $x < \frac{1}{2}$.

Napomena: Sve funkcije kod kojih je lako izračunati integral $\frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{\Gamma^+} z^{n+1}\, f\left(\frac{1}{z}\right)\, dz$ se ovom metodom mogu razviti u potencijalni red.

Dodatak A

Tablični integrali koji se često koriste za razvoj funkcija u Furijeov red i računanje Furijeove i Laplasove transformacije

1. $I_n = \int \mathrm{e}^{at} P_n(t)\, dt = C + \dfrac{\mathrm{e}^{at}}{a} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{a^k} \dfrac{d^k P_n(t)}{dt^k}$, gde je P_n polinom n-tog reda

   Specijalni slučajevi:

   - $P_0(t) = 1$, pa je $I_0 = C + \dfrac{\mathrm{e}^{at}}{a}$
   - $P_1(t) = t$, pa je $I_1 = C + \dfrac{\mathrm{e}^{at}}{a^2}\,(at - 1)$
   - $P_2(t) = t^2$, pa je $I_2 = C + \dfrac{\mathrm{e}^{at}}{a^3}\,(a^2\,t^2 - 2at + 1)$

2. $I = \int \mathrm{e}^{at} \cos(bt)\, dt = C + \dfrac{\mathrm{e}^{at}\,(a\, \cos(bt) + b\, \sin(bt))}{a^2 + b^2}$

3. $I = \int \mathrm{e}^{at} \sin(bt)\, dt = C + \dfrac{\mathrm{e}^{at}\,(-b\, \cos(bt) + a\, \sin(bt))}{a^2 + b^2}$

4. $I = \int \mathrm{e}^{at}\, b^t\, dt = C + \dfrac{b^t\, \mathrm{e}^{at}}{a + \ln(b)}$, $b > 0$, $a \neq -\ln(n)$

Dodatak B

Važni razvoji:

1. $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$

2. $\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$

3. $\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$

4. $\sinh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$

5. $\cosh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$

6. $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{a}{n} z^n$, $|z| < 1$, $z, a \in \mathbb{C}$

7. $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$, $z \in \mathbb{C}$