1. Дат је дискретан сигнал $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \mathrm{u}[n+2]$. Одредити (а) његову Фуријеову трансформацију. Скицирати (б) његов амплитудски спектар помоћу рачунара.

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} u[n+2]$$

$$= 16 \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} u[n+2] = 16\, g[n+2]$$

$a^n\,\mathrm{u}[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}$
$x[n-n_0]$	$X(j\Omega)\,\mathrm{e}^{-j\Omega n_0}$

$$g[n] \triangleq \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \Rightarrow \boxed{G(j\Omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}} \Rightarrow \boxed{X(j\Omega) = \frac{16 e^{j2\Omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}} \text{ (a)}$$

(a):

$$\Rightarrow X(j\Omega) = \frac{64 e^{j2\Omega}}{4-e^{-j\Omega}}$$

(б) $$\lvert X(j\Omega)\rvert = \frac{64}{\lvert 4-e^{-j\Omega}\rvert};$$

$z = e^{j\Omega}$, $\lvert z\rvert = 1$

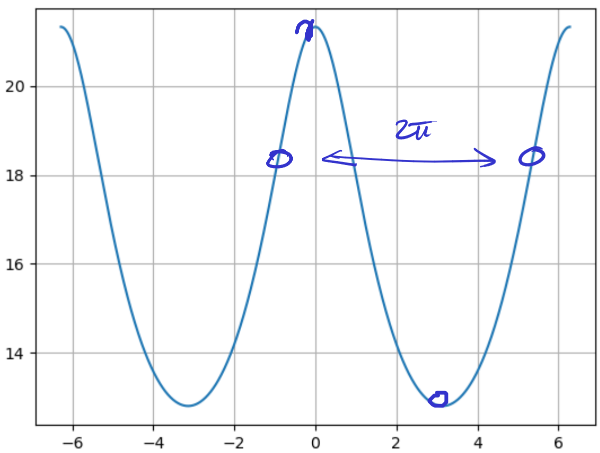
$z^* = e^{-j\Omega}$

$z \cdot z^* = \lvert z\rvert^2, \; z \in \mathbb{C}$

$z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\{z\}$

$$\Rightarrow \lvert X(j\Omega)\rvert = \frac{64}{\lvert 4-z^*\rvert} = \frac{64}{\sqrt{(4-z^*)(4-z^*)^*}} =$$

$$= \frac{64}{\sqrt{(4-z^*)(4-z)}} = \frac{64}{\sqrt{16-4(\underbrace{z+z^*}_{2\mathrm{Re}\{z\}})+\underbrace{z\cdot z^*}_{\lvert z\rvert^2=1}}} = \boxed{\frac{64}{\sqrt{17-8\cos\Omega}}}$$



z

z^*

$$\cos(\Omega n) = \cos((\Omega + 2\pi)n)$$

2. Систем је описан диференцном једначином $y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - x[n-1]$. Одредити (а) импулсни одзив тог система применом дискретне Фуријеове трансформације. Израчунати појачање амплитуде и померај фазе на учестаностима $\Omega \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right\}$.

$$\left(1+\frac{1}{4}D-\frac{1}{8}D^2\right)y[n] = (1-D)\,x[n] \quad \Big| \cdot E^2$$

$$\underbrace{\left(E^2+\frac{1}{4}E-\frac{1}{8}\right)}_{P(E)} y[n] = \underbrace{(E^2-E)}_{Q(E)}\, x[n]$$

$y[n] = H(E)\,x[n]$, $\quad H(E) = \dfrac{Q(E)}{P(E)}$

$x[n+n_0]$	$X(j\Omega)\,\mathrm{e}^{+j\Omega n_0}$

$E^{n_0}\cdot x$ $\quad = X(j\Omega)(e^{j\Omega})^{n_0}$

$E \mapsto \cdot\, e^{j\Omega}$

$$H(E) \to H(e^{j\Omega});$$

$H(\Omega)$

$H(j\Omega)$

$H(e^{j\Omega})$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j2\Omega}-e^{j\Omega}}{e^{j2\Omega}+\frac{1}{4}e^{j\Omega}-\frac{1}{8}}$$

$z = e^{j\Omega}$

$z^{-1} = \frac{1}{z} = e^{-j\Omega}$

$$H(z)=\frac{z(z-1)}{z^2+\frac14 z-\frac18}=z\cdot\left[\frac{z-1}{(z+\frac12)(z-\frac14)}\right]=z\left[\frac{A}{z+\frac12}+\frac{B}{z-\frac14}\right]$$

$$A=\frac{-\frac12-1}{-\frac12-\frac14}=2$$

$$B=\frac{\frac14-1}{\frac14+\frac12}=-1$$

$z_0\in -\frac12, +\frac14$ "Cover-up method"

$$\Rightarrow H(z)=\frac{2z}{z+\frac12}+\frac{-z}{z-\frac14}=\frac{2}{1+\frac12 z^{-1}}-\frac{1}{1-\frac14 z^{-1}}$$

$a=-\frac12$, $a=\frac14$

$a^n\,\mathrm{u}[n],\quad \lvert a\rvert<1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$

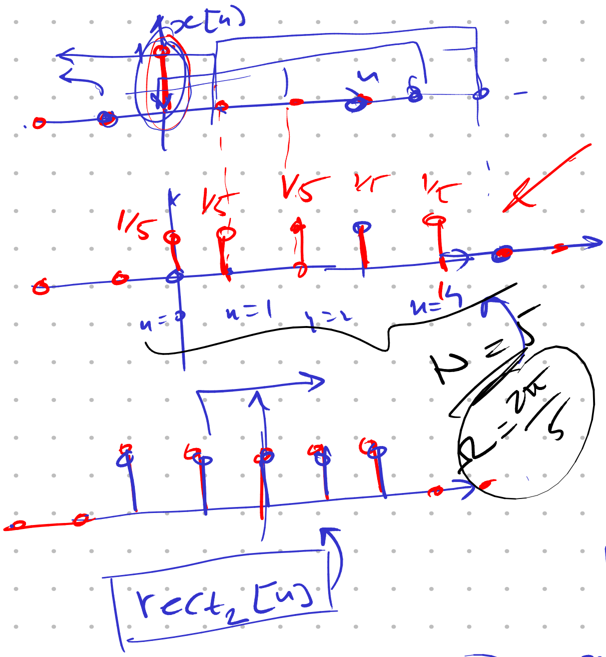
$$\boxed{h[n]=\left[2\left(-\frac12\right)^n-\left(\frac14\right)^n\right]u[n]}$$ (а)

(б) $\boxed{H(0)=0}$, $H(e^{j\frac{\pi}{4}})\approx 0{,}65\,e^{j1{,}22}$, $H(e^{-j\frac{\pi}{4}})\approx 0{,}65\,e^{-j1{,}22}$

$$H(e^{j\frac{9\pi}{4}})=0{,}65\,e^{j1{,}22}$$

$$\frac{9\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\frac{8\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2\pi$$

3. Дискретан филтар, познат под називом *moving average* филтар, се реализује тако што се за одређивање текућег члана одзива усредње текућа и прeђашњих четири вредности побуде. Скицирати (а) импулсни одзив овог филтра. Одредити (б) дискретне кружне учестаности Ω $(0\le\Omega\le\pi)$ које овај филтар у потпуности потискује (уклања). Скицирати (в) дијаграм амплитудске фреквенцијске карактеристике у опсегу $0\le\Omega<\pi$.



$$h[n]=\begin{cases}1/5, & 0\le n<5\\ 0, & \text{иначе!}\end{cases}$$

$$h[n]=\frac15\,\mathrm{rect}_2[n-2]$$

$\mathrm{rect}_{N_1}[n]$	$\dfrac{\sin(\Omega(N_1+0{,}5))}{\sin\left(\dfrac{\Omega}{2}\right)}$

$|H(j\Omega)|=0$?

$h[n]\rightarrow|H(j\Omega)|$

$h[n+2]\rightarrow|H(j\Omega)|$

$$H(j\Omega)=\frac{\sin(2{,}5\Omega)}{5\sin(\frac{\Omega}{2})}$$

$2{,}5\Omega=k\pi$

$\boxed{\Omega=\frac{2k\pi}{5}}$

$k=0\Rightarrow\Omega=0$ ЗА $k>0$

$$H(j\Omega)\xrightarrow{\Omega\to0}\frac{\sin(2{,}5\Omega)}{5\sin(\frac{\Omega}{2})}\xrightarrow{\sin x\approx x}\frac{2{,}5\Omega}{5\frac{\Omega}{2}}=1$$

$\boxed{|H(0)|=1}$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega=\frac{2\pi}{5},\ \frac{4\pi}{5}}$$