1. Дат је дискретан сигнал $x[n] = \cos\left(\frac{6\pi n}{17} + \frac{\pi}{3}\right)$. Одредити развој овога сигнала у дискретан Фуријеов ред на основном периоду.

Основни период N? $x[n] = x[n+N] \Rightarrow \cos\left(\frac{6\pi n}{17} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{6\pi n}{17} + \underbrace{\frac{6\pi N}{17}}_{2m\pi} + \frac{\pi}{3}\right)$, $m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \frac{\cancel{6}^{3}\cancel{\pi} N}{17} = \cancel{2}\cancel{\pi} m \Rightarrow N = \frac{17m}{3}$, Најмање $m>0$ $\therefore N \in \mathbb{N}$ је $m=3 \Rightarrow \boxed{N = 17}$

Развој за $\Omega_0 = \frac{2\pi}{17}$; $\frac{6\pi}{17} = 3\Omega_0 \Rightarrow x[n] = \cos\left(3\Omega_0 n + \frac{\pi}{3}\right)$.

Даље користимо $\cos(\phi) = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2} \Rightarrow x[n] = \frac{e^{j(3\Omega_0 n + \frac{\pi}{3})} + e^{-j(3\Omega_0 n + \frac{\pi}{3})}}{2} =$

$= \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j3\Omega_0 n} + e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-j3\Omega_0 n}\right)$. Чланови $e^{jm\Omega_0 n}$ се развијају у $\delta[k-m]$ на $\Omega_F = \Omega_0$

$\Rightarrow \boxed{X[k] = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\delta[k-3] + e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta[k+3]\right)}$ По дефиницији!

2.[1] Одредити такав дискретан сигнал $x[n]$, са основним периодом $N = 6$ за који важе $\sum_{n=0}^{5} x[n] = 2$ и $\sum_{n=2}^{7}(-1)^n x[n] = 1$ такав да је његова средња снага минимална.

Како је $X[k] = \frac{1}{N_F}\sum_{n=\alpha}^{\alpha+N_F-1} x[n]\, e^{-jk\Omega_F n}$, $\Omega_F = \frac{2\pi}{N_F}$.

Приметимо да су дате суме у том облику за $N_F = 6$, даље приметимо

$X[0] = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n]\, \cancel{e^{-j0\Omega_F n}} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n] = \frac{1}{6}\cdot 2 \Rightarrow \boxed{X[0] = \frac{1}{3}}$

$X[3] = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n]\, e^{-j3\frac{2\pi}{6}n} = \frac{1}{6}\sum_{0}^{5}(-1)^n x[n]$.

Померање прозора израчунавања Ф.Т. утиче само на фазу коефицијента

$\Rightarrow |X[3]| = \frac{1}{6}\left|\sum_{n=2}^{7}(-1)^n x[n]\right| = \frac{1}{6}\cdot 1 \Rightarrow \boxed{|X[3]| = \frac{1}{6}}$

Према Парсеваловој теореми ср. снага $x[n]$ је

$P = \sum_{k=0}^{5}|X[k]|^2$. $\min P \Rightarrow \min|X[k]|$. Пошто су остају да се подесе $X[k] = 0$ за $k = 0..5$ осим $k=0$ и $k=3$

Одатле:

$x[n] = X[0] + X[3]\, e^{-j\pi n} \Rightarrow \boxed{x[n] = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-1)^n}$

3. Дати су спектри два дискретна сигнала, $x[n]$ и $y[n]$, једнаких периода $N = 4$, као $\mathcal{FS}\{x[n]\} = X[k] = \{1,2,2,1\}$ и $\mathcal{FS}\{y[n]\} = Y[k] = \{1,1,1,3\}$. Израчунати спектар сигнала $z[n] = x[n] \cdot y[n]$.

Примењује се својство

$x[n]\,y[n]$	$X[k] \circledast Y[k]$

кружна конволуција!

одакле је $Z[k] = X[k] \circledast Y[k] = \sum_{m=0}^{3} \tilde{X}[m]\,\tilde{Y}[k-m]$ где су $\tilde{X}[k]$ и $\tilde{Y}[k]$ периодично продужене секвенце од $X[k]$ и $Y[k]$.

		$X[0]$	$X[1]$	$X[2]$	$X[3]$
		1	2	2	1
$Y[0]$	1	1	2	2	1
$Y[1]$	1	1	2	2	1
$Y[2]$	1	1	2	2	1
$Y[3]$	3	3	6	6	3

резултат

$Z[0] = 10$

$Z[1] = 10$

$Z[2] = 8$

$Z[3] = 8$

Сабрати поља по бојама. Лако се види да се од почетног поља $X[0]Y[k]$ и „шета" кроз табелу

$X[m] \to X[m+1]$

$Y[k-m] \to Y[k-m-1]$

сабирањем

← Ефикасно рачунање кружне конволуције (!) ВАЖНО!

4. Дата су два дискретна сигнала $x[n]$ и $y[n]$ чији су основни периоди $N_x = 2$ и $N_y = 3$ редом. Познати су спектри $\mathcal{FS}\{x[n]\} = X[k]$ и $\mathcal{FS}\{y[n]\} = Y[k]$ на основним периодима тих сигнала. Одредити развој сигнала $z[n] = x[n] + y[n]$ у Фуријеов ред над периодом $N_\mathrm{F} = 6$.

Користимо $N_F = 3N_x$ и $N_F = 2N_y$.

Пошто су познати развоји $X[k]$ и $Y[k]$ користимо правило:

$x[n]$	$\left.\begin{cases} X\left[\frac{k}{m}\right], & \frac{k}{m} \in \mathbb{Z} \\ 0, & \frac{k}{m} \notin \mathbb{Z} \end{cases}\right\}$	$N_F = m\,N_0$

за $m = 3$, односно $m = 2$.

Развој $x[n]$ за $N_F = 6$ $\mapsto$ $X_1[k] = \begin{cases} X\left[\frac{k}{3}\right], & 3 \mid k, \\ 0, & 3 \nmid k \end{cases}$

Развој $y[n]$ за $N_F = 6$ $\mapsto$ $Y_1[k] = \begin{cases} Y[k/2], & 2 \mid k, \\ 0, & 2 \nmid k \end{cases}$

$ax[n] + by[n]$	$aX[k] + bY[k]$

за исто N_F!

Развој $x[n] + y[n]$ за $N_F = 6$ $\mapsto$ $X_1[k] + Y_1[k]$

k	0	1	2	3	4	5
X_1	$X[0]$	.	.	$X[1]$	.	.
Y_1	$Y[0]$	.	$Y[1]$		$Y[2]$	.

$Z[k] = X_1[k] + X_2[k]$

$= \{X[0]+Y[0],\ 0,\ Y[1],\ X[1],\ Y[2],\ 0\}$