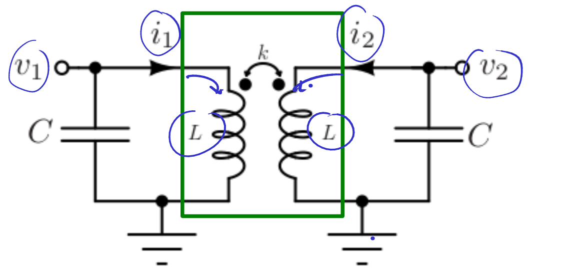
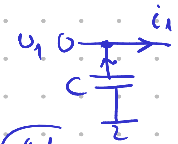
1. У колу са слике познати су L, C и коефицијент магнетске спреге $k \ll 1$. У почетном тренутку су познати $i_2(0) = v_1(0) = v_2(0) = 0$ и $i_1(0) = I_0$. Поставити (а) систем интегро-диференцијалних једначина кола по струјама i_1 и i_2. Помоћу Лапласове трансформације (б) одредити струју $i_1(t)$. Скицирати (в) временски дијаграм добијеног одзива $i_1(t)$ за $t > 0$.



$$L = L_1 = L_2$$
$$L_{12} = L_{21} = M = +k\sqrt{L_1 L_2} = kL \Rightarrow \frac{M}{L} = k$$

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt}$$
$$v_2 = L_{21}\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$$



$$v_1 = -\frac{1}{C}\int_0^t i_1\,dt + \cancel{v_1(0)}$$
$$v_2 = -\frac{1}{C}\int_0^t i_2\,dt + \cancel{v_2(0)}^{\,0}$$

$\div L$

$$\Rightarrow \begin{cases} L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i_1\,dt = 0 \\ M\frac{di_1}{dt} + L\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i_2\,dt = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{di_1}{dt} + k\frac{di_2}{dt} + \omega_0^2\int_0^t i_1\,dt = 0, \quad \omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &k\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \omega_0^2\int_0^t i_2\,dt = 0 \end{aligned}}$$

Diferenciranje	$\frac{d}{dt}f(t)$	$sF(s) - f(0^+)$
Integracija	$\int_{0^-}^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$

$i_1 \mapsto I_1(s)$ $\quad i_2 \mapsto I_2(s)$

$\frac{di_1}{dt} \mapsto sI_1(s) - I_0$ $\quad \int i_1\,dt \mapsto \frac{1}{s}I_1(s)$

$\frac{di_2}{dt} \mapsto sI_2(s)$ $\quad \int i_2\,dt \mapsto \frac{1}{s}I_2(s)$ $\quad I_1 = I_1(s)$, $I_2 = I_2(s)$

$$\left.\begin{aligned} &sI_1 - I_0 + ksI_2 + \frac{\omega_0^2}{s}I_1 = 0 \quad \cdot s \\ &ksI_1 - kI_0 + sI_2 + \frac{\omega_0^2}{s}I_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &I_1(s^2+\omega_0^2) + ks^2 I_2 = I_0 s \\ &ks^2 I_1 + I_2(s^2+\omega_0^2) = kI_0 s \end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{D_{I_1}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} I_0 s & ks^2 \\ kI_0 s & (s^2+\omega_0^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s^2+\omega_0^2) & ks^2 \\ ks^2 & (s^2+\omega_0^2) \end{vmatrix}} = \frac{I_0 s\cdot[(s^2+\omega_0^2) - k^2 s^2]}{(s^2+\omega_0^2)^2 - (ks^2)^2} = \frac{I_0 s\,(s^2(1-k^2)+\omega_0^2)}{(s^2(1-k)+\omega_0^2)(s^2(1+k)+\omega_0^2)}$$

$$= I_0 s\left[\frac{A}{s^2(1-k)+\omega_0^2} + \frac{B}{s^2(1+k)+\omega_0^2}\right]$$

$$= I_0 s\left[\frac{\frac{1-k}{2}}{s^2(1-k)+\omega_0^2} + \frac{\frac{1+k}{2}}{s^2(1+k)+\omega_0^2}\right]$$

$$= \frac{I_0 \cancel{s}}{2}\left[\frac{1\;s}{s^2+\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}\right)^2} + \frac{1\;s}{s^2+\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}\right)^2}\right]$$

$$s^2(1+k)A + \omega_0^2 A + s^2(1-k)B + \omega_0^2 B =$$
$$= s^2[(1+k)A + (1-k)B] + (A+B)\omega_0^2$$
$$= s^2[(A+B) + (A-B)k] + (A+B)\omega_0^2$$

$\boxed{A+B=1}$ $\quad (A-B)k = -k^2$

$A-B=-k \Rightarrow \boxed{B-A=k}$

$\Rightarrow 2B = 1+k \Rightarrow \boxed{B = \frac{1+k}{2}}$ $\boxed{A = \frac{1-k}{2}}$

$$\boxed{\Rightarrow i_1(t) = \frac{I_0}{2}\left(\cos\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{1-k}}\right) + \cos\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{1+k}}\right)\right)u(t)} \quad (t>0)$$

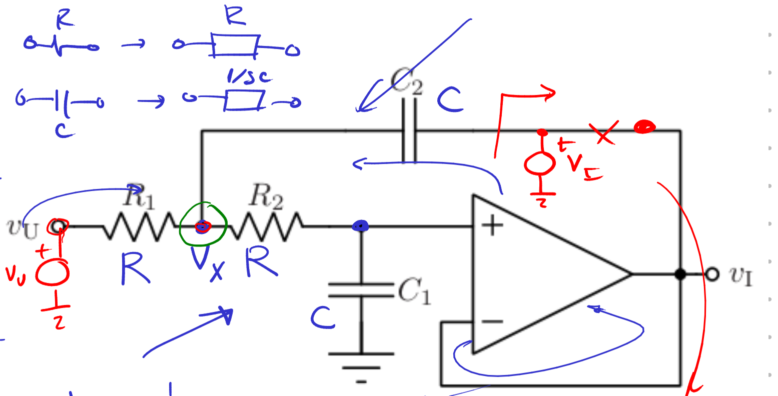
(б)

$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, $x \ll 1$

$\frac{1}{\sqrt{1-k}} = (1-k)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}(-k) = 1 + \frac{k}{2}$

$\sim \frac{1}{\sqrt{1+k}} \approx \left(1 - \frac{k}{2}\right)$

2. У колу са слике познато је $R_1 = R_2 = R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ и $C_1 = C_2 = C = 10\,\mathrm{nF}$. Улазна величина кола је напон v_U а излазна величина је напон v_I. Одредити (а) функцију преноса кола $H(s) = \frac{V_I(s)}{V_U(s)}$. Одредити (б) полове и нуле система и израчунати Q фактор функције преноса. Полазећи од функције преноса кола (в) нацртати блок дијаграм система помоћу интегратора, суматора и појачавача. Полазећи од нацртаног блок дијаграма, реализовати (г) систем помоћу идеалних операционих појачавача и линеарних пасивних компоненти.



$$V^+ = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC}+R} V_x = \frac{1}{1+sRC} V_x = V^- = V_I$$

$$Y = \frac{1}{R+\frac{1}{sC}} = \frac{sC}{1+sRC}$$

$$V_x\left(\frac{1}{R} + sC + \cancel{\frac{sC}{1+sRC}}\right) = \frac{v_U}{R} + \cancel{\frac{sC\,V_x}{1+sRC}} \Rightarrow V_x \frac{1+sRC}{\cancel{R}} = \frac{V_U}{\cancel{R}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_x = \frac{V_U}{1+sRC} \Rightarrow V_I = \frac{V_U}{(1+sRC)^2} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{(1+sRC)^2}, \quad RC = 1\,\mathrm{k\Omega}\cdot 10\,\mathrm{nF}$$

$$\boxed{\tau = 10\,\mu s}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{1}{(1+s\tau)^2}}$$

(б) $H(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$ ← нуле ~~×~~, ← полови $s_p = -\frac{1}{\tau}$, двоструки.

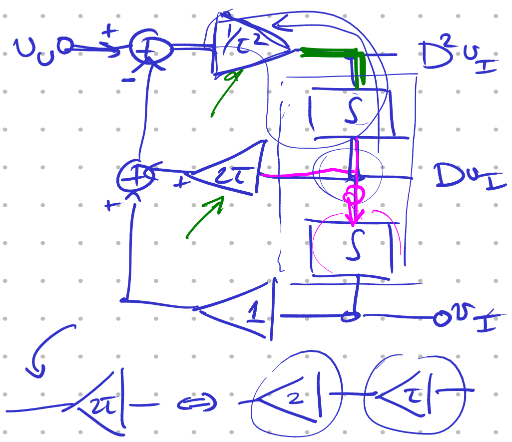
$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}; \quad \boxed{H(s) = \frac{1}{1+s^2\tau^2+2s\tau}} = \frac{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2}{s^2+\frac{2s}{\tau}+\left(\frac{1}{\tau}\right)^2}$$

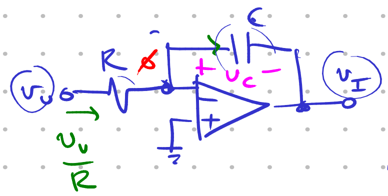
$\frac{1}{\tau} = \omega_0 \qquad 2 = \frac{1}{Q} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{2}}$

$$\frac{V_I}{V_U} = \frac{1}{1+s^2\tau^2+2s\tau} \Rightarrow V_I(1+s^2\tau^2+2s\tau) = V_U \qquad s \mapsto D$$

$$v_I(t)(1+\tau^2D^2+2\tau D) = v_U(t)$$

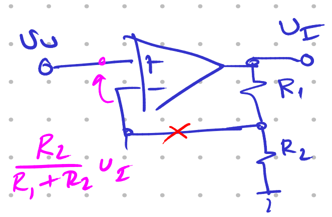
$$\Rightarrow v_I\cdot\tau^2D^2 = v_U - (1+2\tau D)v_I \Rightarrow D^2 v_I = \frac{1}{\tau^2}\left[v_U - (1+2\tau D)v_I\right]$$



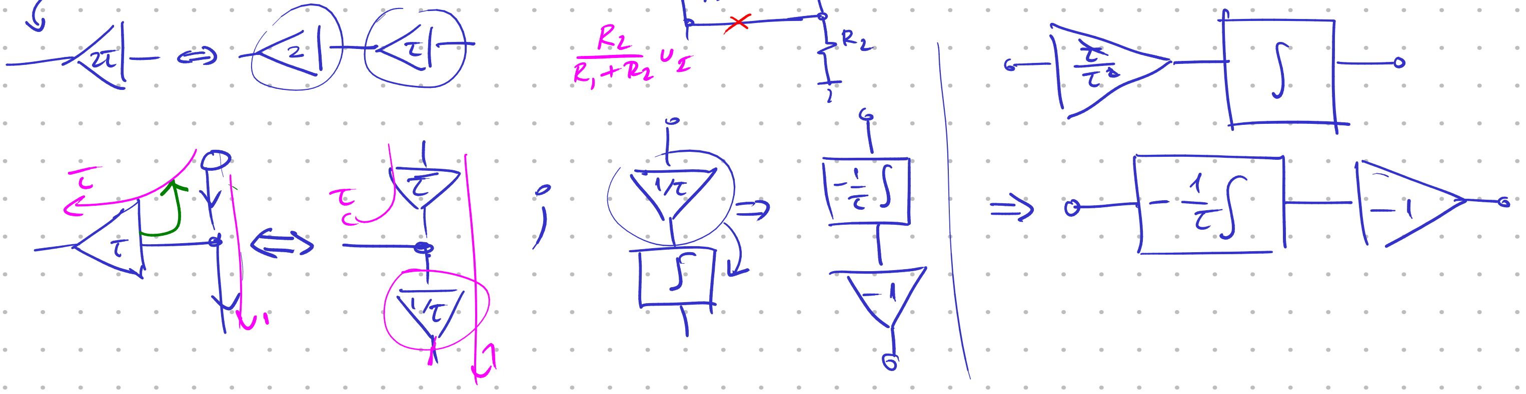


$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t \frac{v_U}{R}\,dt \Rightarrow v_I = \boxed{-\frac{1}{RC}}\int_0^t v_U\,dt$$

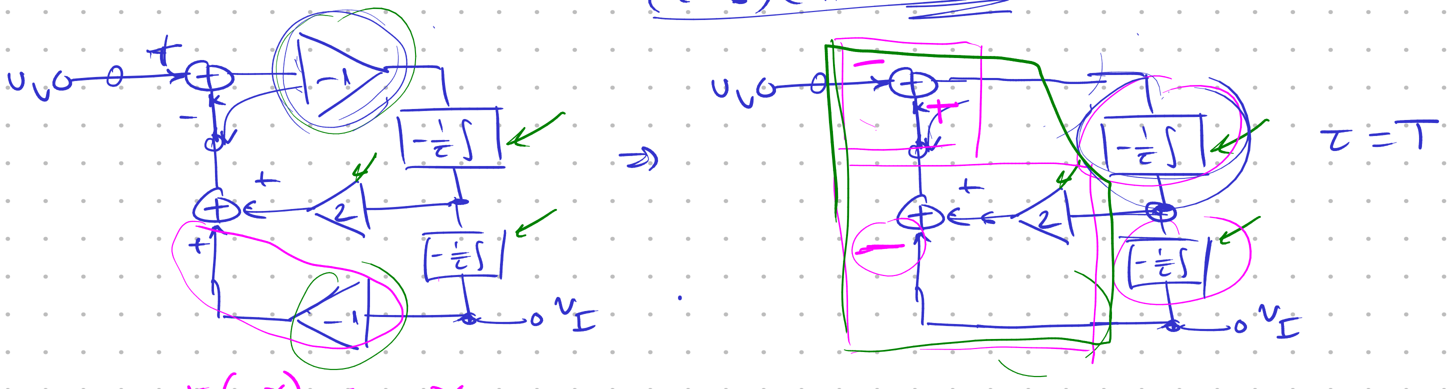
$$v_I = -\frac{1}{T}\int_0^t v_U\,dt, \quad T > 0$$



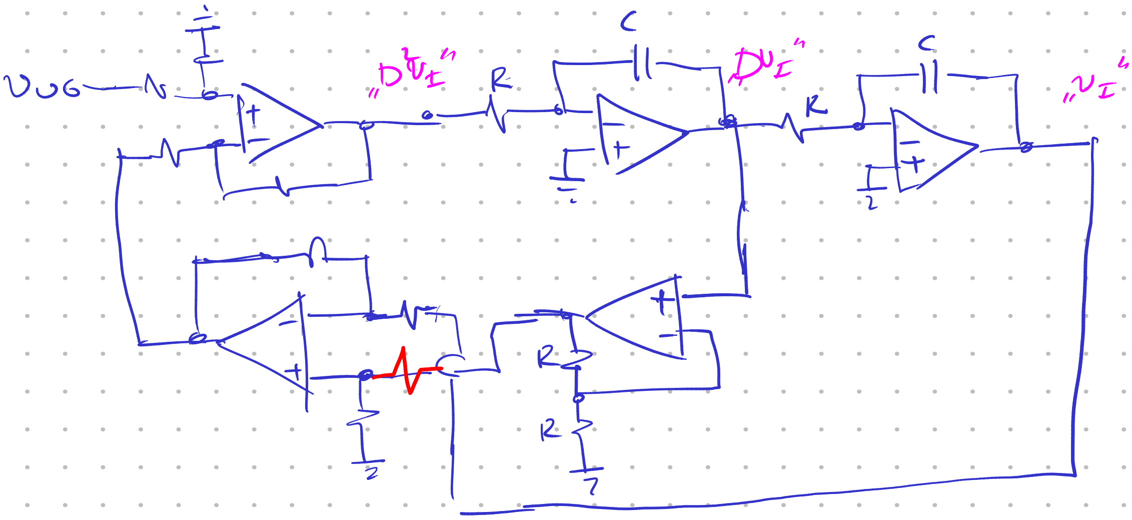
$$v_U = \frac{R_2}{R_1+R_2}v_I \Rightarrow v_I = \left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)v_U$$

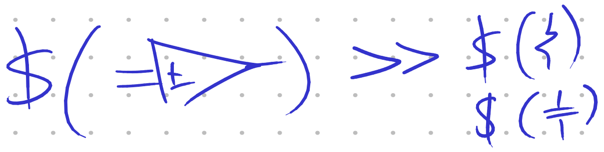


$(a-b)(-1) = b-a$



$+(-x) = -x$





Резултати симулације: