8 Фреквенцијска анализа, Лапласова трансформација

Задаци

1. Нека је континуалан LTI систем дефинисан диференцијалном једначином $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 3y = x$, где су $x = x(t)$ и $y = y(t)$ улаз и излаз тог система редом. Користећи се Лапласовом трансформацијом, одредити сопствени и приндуни одзив овог система за побуду $x(t) = \big(1 - \cos(3t)\big)\,\mathrm{u}(t)$ ако је познато $2y(0^+) = \frac{\mathrm{d}y(0^+)}{\mathrm{d}t} = 2$

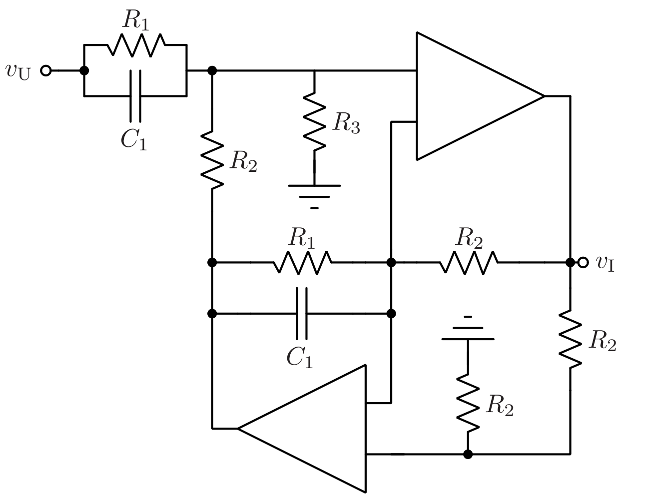
2. Фреквнецијска карактеристика филтра дата је изразом $H(s) = -\frac{s\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$. Одредити (а) коју филтарску функцију обавља овај систем. Одредити (б) учестаност ω_m на којој је модуо фреквенцијске карактеристике максималан и (в) ту максималну вредност. Ако је $a = \omega_0 = 10^3\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, одредити (г) устаљени одзив филтра на побуду $x(t) = A\big(10 + \mathrm{e}^{-\sigma t}\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\big)\,\mathrm{u}(t)$ где су $\sigma = 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$, $\omega_1 = 10^4\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, $\omega_2 = 10^6\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ и $A = 100$.

3. Одредити принудни одзив система чији је импулсни одзив $h(t) = \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{u}(t)$ на побуду $x(t) = \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{u}(t)$ применом Лапласове трансформације.

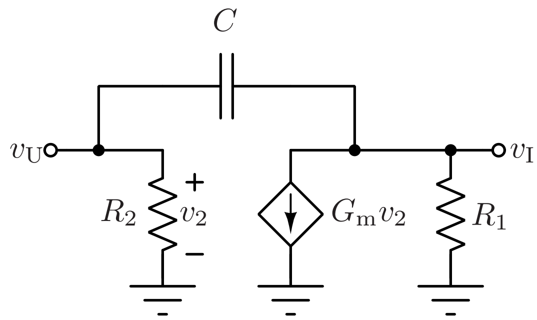
4. У колу са слике познато је $R_2 = 10R_1 = \frac{1}{10}R_3$ Функција преноса кола, чији улаз је напон v_U а излаз напон v_I је облика

$$H(s) = K\frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}.$$

Објаснити (а) који тип филтра представља дато коло. Одредити (а) поларитете прикључака операционих појачавача тако да оба раде у режиму негативне повратне спреге. Израчунати (б) параметре K и Q, и вредности елемената кола R_1 и C_1 ако су познати $R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$ и $\omega_0 = 10^5\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Одредити (в) принудни и устаљени одзив филтра на побуду $v_\mathrm{g}(t) = V_0(5 + \mathrm{e}^{2t}\,\delta(t))\,\mathrm{u}(t - \tau)$, где су $V_0 = 1\,\mathrm{V}$ и $\tau = 2\,\mathrm{s}$. Израчунати (г) ефективну вредност одзива на побуду $v_\mathrm{g}^{(\mathrm{г})} = V_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{5}\right)$ по успостављању периодичног режима.



5. У колу са слике познато је $C = 0{,}1\,\mathrm{\mu F}$, $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $G_\mathrm{m} = 2\,\mathrm{mS}$, и $R_2 = 25\,\mathrm{k\Omega}$. Одредити (а) функцију преноса кола ако је улаз кола напон v_U а излаз кола напон v_I. Одредити и нацртати (б) одскочни одзив кола.



Део таблица за испит

<u>Још један пар Фуријеове трансформације.</u>

$$\mathcal{FT}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{j}\omega A + B}{(\mathrm{j}\omega + a)^2 + \omega_0^2}\right\} = \mathrm{e}^{-at}\left(A\cos(\omega_0 t) + \frac{B - aA}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right)\mathrm{u}(t)$$

<u>Унилатерарне Лапласове трансформације.</u>

$x(t)$	$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$
$\delta(t)$	1
$\mathrm{u}(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{u}(t)$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,\mathrm{u}(t)$	$s^{-\frac{3}{2}}$
$\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{u}(t), \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-at}}{(n-1)!}\,\mathrm{u}(t), \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$\cos(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$\sinh(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$\frac{t}{2\omega}\,\sin(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\frac{\sin(\omega t) - \omega t\,\cos(\omega t)}{2\omega}\,\mathrm{u}(t)$	$\frac{\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

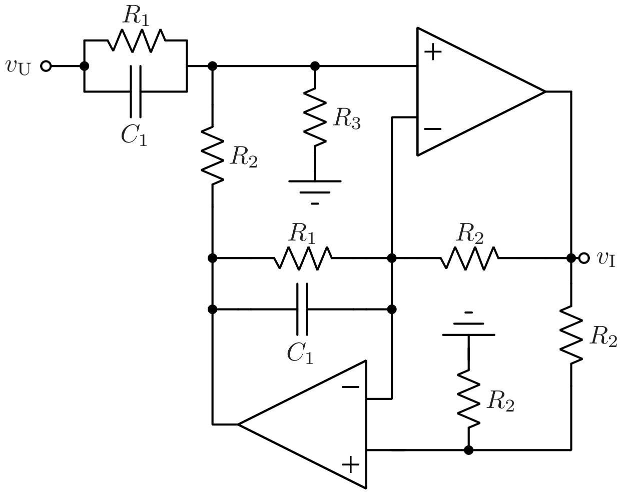
Решења

1. $y_s(t) = -\frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t})\,u(t), \quad y_p(t) = \left(\frac{1}{3} - \frac{9}{20}e^{-t} + \frac{1}{12}e^{-3t} + \frac{1}{30}\cos(3t) - \frac{1}{15}\sin(3t)\right) u(t)$

2. (а) Филтар пропусник опсега учестаности, (б) $\omega_m = \omega_0\sqrt{2}$, (в) $|H(j\omega_m)| = \frac{1}{2}$,
(г) $y_p(t) = -A|H(j\omega_2)|\cos(\omega_2 t + \arg H(j\omega_2)) \approx \frac{1}{10}\cos\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right)$.

3. $y_p = \frac{e^{t} - e^{-2t}}{3}\,u(t)$.

4.
(а) Филтар пропусник високих учестаности (б) Поларитет (в) $K = 2$, $Q = 1$, $C_1 = 1\,\mathrm{nF}$
је као на слици



(г) $v_{I,p} = 5V_0 e^{-\frac{\omega_0}{2}(t-\tau)}\left(2\cos\left(\frac{\omega_0\sqrt{3}}{2}(t-\tau)\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\omega_0\sqrt{3}}{2}(t-\tau)\right)\right) u(t-\tau)$, (д) $v_{I,ef} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{V}$.

5. $H(s) = \frac{s-\omega_z}{s-\omega_p}$, где су $\omega_z = 20\times10^3\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ и $\omega_p = -10\times10^3\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, (б) $s(t) = (3e^{\sigma t} - 2)\,u(t)$, где је $\sigma = -10\times10^3\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$