Сигнали и системи (13Е042СИС)

Вежбе (IX) – Исправка решења

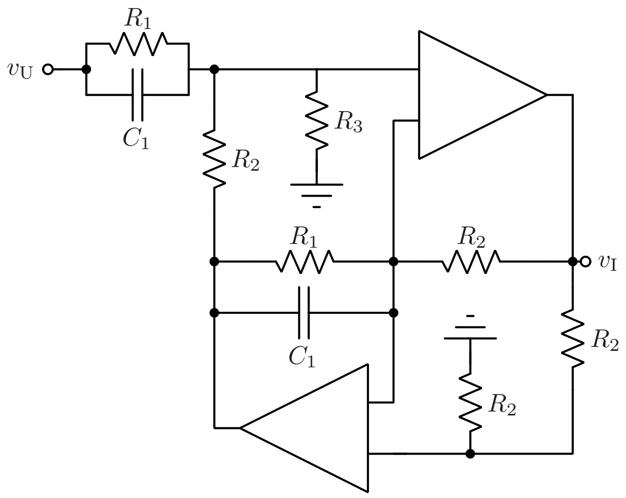
22. мај 2021.

9 Фреквенцијска анализа, Лапласова трансформација

Задаци

4. У колу са слике познато је $R_2 = 10R_1 = \frac{1}{10}R_3$. Функција преноса кола, чији је улаз је напон v_U а излаз напон v_I је облика

$$H(s) = K\frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}.$$



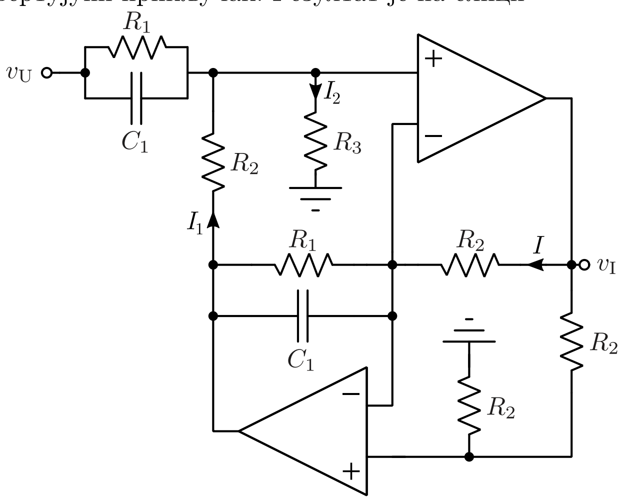
Објаснити (а) који тип филтра представља дато коло. Одредити (б) поларитете прикључака операционих појачавача тако да оба раде у режиму негативне повратне спреге. Израчунати (в) параметре K и Q, и вредности елемената кола R_1 и C_1 ако су познати $R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$ и $\omega_0 = 10^5\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Одредити (г) принудни и устаљени одзив филтра на побуду $v_\mathrm{g}(t) = V_0(5 + \mathrm{e}^{2t}\,\delta(t))\,\mathrm{u}(t-\tau)$, где су $V_0 = 1\,\mathrm{V}$ и $\tau = 2\,\mathrm{s}$. Израчунати (д) ефективну вредност одзива на побуду $v_\mathrm{g}^{(\mathrm{г})} = V_0\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{5}\right)$ по успостављању периодичног режима.

<u>**Решење**</u>: (а) Тип филтра се тумачи на основу облика функције преноса. Непосредно се има да су

$$H(0) = 0, \quad \text{и} \tag{1}$$
$$H(\infty) = K. \tag{2}$$

На основу овога има се да систем представља филтар пропусник високих учестаности.

(б) Негативна повратна спрега мора бити успостављена на свим учестаностима па тако и на $\omega \to \infty$. У том посматраном случају, кондензатори се могу еквивалентирати кратким спојевима. Тада је напон на улазу директно доведен на горњи прикључак горњег операционог појачавача, који услед тога мора неинвертујући прикључак; а излаз доњег операционог појачавача је директно доведен на горњи улазни прикључак, који услед тога мора бити инвертујући прикључак. Резултат је на слици



(в) Будући да је $H(0) = 0$, напонско појачање за константну компоненту (DC) једнако је нули, на основу чега мора бити $\boxed{R_1 \to \infty}$ (отворена веза). Када је $\omega \to \infty$ тада су $V^+ = V^- = V_\mathrm{U}$ за оба Операциона појачавача па је $V_\mathrm{I} = 2V_\mathrm{U} \Rightarrow \boxed{K = 2}$.

Због једноставности, у наставку нека је $C = C_1$. На „+“ прикључку доњег операционог појачавача је, услед напонског разделника, напон $V^+ = \frac{V_\mathrm{I}}{2}$, што је и на „−“ прикључку, због НПС. Тиме је дефинисана струја кондензатора као $I = \frac{V_\mathrm{I} - \frac{V_\mathrm{I}}{2}}{R_2} = \frac{V_\mathrm{I}}{2R_2}$. Напон на излазу доњег операционог појачавача је $V_\mathrm{OP} = \frac{V_\mathrm{I}}{2} - \frac{I}{sC} = \frac{V_\mathrm{I}}{2}\left(1 - \frac{1}{sCR_2}\right)$. Струја кроз улазни кондензатор је једнака $I_\mathrm{U} = \left(V_\mathrm{U} - \frac{V_\mathrm{I}}{2}\right) sC$, одакле се има $V_\mathrm{U} = \frac{I_2 - I_1}{sC} + \frac{V_\mathrm{I}}{2} = \frac{V_\mathrm{I}}{2} \cdot \frac{1 + sCR_2 + (sCR_2)^2}{(sCR_2)^2}$. Сређивањем добија се преносна карактеристика $H(s) = 2\frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{R_2 C}s + \left(\frac{1}{R_2 C}\right)^2}$. Поређењем са обликом из поставке задатка непосредно се установљава да су $\boxed{Q = 1}$ и $\omega_0 = \frac{1}{R_2 C} \Rightarrow \boxed{C = 1\,\mathrm{nF}}$.

(г) Пошто је Хевисајдова функција померена, Делта импулс у нули се анулира, а одзив је исти као за побуду $v_\mathrm{g} = V_0 \mathrm{u}(t - \tau)$. Одскочни одзив система, $g(t)$, може се потражити применом Фуријеове трансформације ($s = \mathrm{j}\omega$)

$$G(s) = U(s)H(s) = \left(\frac{1}{s} + \pi\delta(\omega)\right) \cdot 2\frac{s^2}{s^2 + \omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{2s}{s^2 + 2s\frac{\omega_0}{2} + \frac{1}{4}\omega_0^2 + \frac{3}{4}\omega_0^2} + 2\pi \cdot 0 = \frac{As + B}{(s - \alpha)^2 + \beta^2},$$

где су $A = 2$, $B = 0$, $\alpha = -\frac{\omega_0}{2}$ и $\beta = \frac{\omega_0}{2}\sqrt{3}$. Применом одговарајуће табличне трансформације

$$\boxed{\mathcal{FT}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{j}\omega A + B}{(\mathrm{j}\omega + a)^2 + \omega_0^2}\right\} = \mathrm{e}^{-at}\left(A\cos(\omega_0 t) + \frac{B - aA}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right)\mathrm{u}(t)}$$

налази се резултат у временском домену $g(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta}\sin(\beta t)\right)\mathrm{u}(t)$, а скалирањем и померањем у времену се налази тражени одзив $v_\mathrm{I} = V_0 g(t - \tau)$ одакле је након сређивања

$$\boxed{v_{\mathrm{I,p}} = 5V_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{2}(t - \tau)\right)\left(2\cos\left(\frac{\omega_0\sqrt{3}}{2}(t - \tau)\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\omega_0\sqrt{3}}{2}(t - \tau)\right)\right)\mathrm{u}(t - \tau)}$$

(д) У устаљеном простопериодичном режиму, када се разматра снага сигнала, битни су учестаност и амплитуда простопериодичне побуде (али не и фаза). Појачање на учестаности побуде је $|H(\mathrm{j}\omega_0)| = KQ = 2$ одакле је амплитуда одзива $V_{g,\mathrm{m}} = 2V_0$ па је и ефективна вредност $V_{g,\mathrm{ef}} = V_0\sqrt{2}$.