1. Нека је континуалан LTI систем дефинисан диференцијалном једначином $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 3y = x}$, где су $x = x(t)$ и $y = y(t)$ улаз и излаз тог система редом. Користећи се Лапласовом трансформацијом, одредити сопствени и принудни одзив овог система за побуду $x(t) = (1 - \cos(3t))\,\mathrm{u}(t)$ ако је познато $2y(0^+) = \frac{\mathrm{d}y(0^+)}{\mathrm{d}t} = 2 \Rightarrow$ $y(0^+) = 1$, $y'(0^+) = 2$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = x\right\};\quad \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0^-)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-)$$

$$\boxed{y(0^-) = 1 \;\;\&\;\; y'(0^-) = 2}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - 1$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = s^2Y(s) - s - 2$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s),\quad \mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$$

$$Y(s)\underbrace{(s^2+4s+3)}_{P(s)} = -(s+2) + X(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{-(s+2)}{P(s)} + \frac{1}{P(s)}X(s) \Rightarrow$$

$$Y(s) = \underbrace{-(s+2)H(s)}_{\text{сопствени!}} + \underbrace{X(s)H(s)}_{\text{принудни!}},\quad H(s) = \frac{1}{P(s)}$$

$$Y_s(s) = -\frac{s+2}{s^2+4s+3} = -\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

$$y_s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_s(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}\right\};\quad \frac{-(s+2)}{\cancel{(s+1)}(s+3)} = \frac{A}{\boxed{s+1}} + \frac{B}{s+3}\Big/\cdot(s+1)$$

$s=-1$

$$2)\quad -\frac{s+2}{s+3} = A + \frac{s+1}{s+3}B \qquad \boxed{s=-1}\;! \qquad s \neq -1 \qquad \lim_{s\to -1}$$

$$\boxed{A = -\frac{s+2}{s+3}\Big|_{s=-1}}$$

$$A = -\frac{-1+2}{-1+3} = -\frac{1}{2}$$

$$B = -\frac{s+2}{s+1}\Big|_{s=-3} = -\frac{-3+2}{-3+1} = -\frac{+1}{+2} = -\frac{1}{2}$$

$\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t)$	$\frac{1}{s+a}$

$$\Rightarrow y_s(t) = -\frac{1}{2}\cdot e^{-t}u(t) + (-)\frac{1}{2}e^{-3t}u(t) \Rightarrow \boxed{y_s(t) = -\frac{e^{-t}+e^{-3t}}{2}u(t)}$$

$$x(t) = (1 - \cos 3t)u(t) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+9} = \frac{9}{s(s^2+9)}$$

$\cos(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\mathrm{u}(t)$	$\frac{1}{s}$

$$Y_p(s) = \frac{9}{s(s^2+9)(s+1)(s+3)}$$

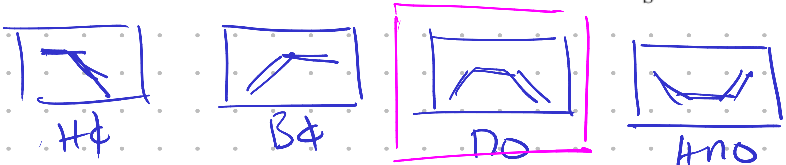
$$\boxed{Y_p(s) = \frac{9}{s(s+1)(s+3)(s+j3)(s-j3)}} \Rightarrow$$

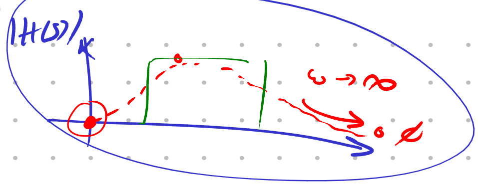
$$\Rightarrow Y_p(s) = \frac{1/3}{s} + \frac{-9/20}{s+1} + \frac{1/12}{s+3} + \underbrace{\frac{\frac{1}{60}-j\frac{1}{20}}{s+j3} + \frac{\frac{1}{60}+j\frac{1}{20}}{s-j3}}_{\frac{1}{30}\frac{s-6}{s^2+9}}$$

$$y_\mathrm{p}(t) = \left(\frac{1}{3} - \frac{9}{20}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{12}\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{30}\cos(3t) - \frac{1}{15}\sin(3t)\right)\mathrm{u}(t)$$

2. Фреквнецијска карактеристика филтра дата је изразом $H(s) = -\dfrac{s\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$. Одредити (а) коју филтарску функцију обавља овај систем. Одредити (б) учестаност ω_m на којој је модуо фреквенцијске карактеристике максималан и (в) ту максималну вредност. Ако је $a = \omega_0 = 10^3\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ одредити (г) устаљени одзив филтра на побуду $x(t) = A\big(10 + \mathrm{e}^{-\sigma t}\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\big)$ где су $\sigma = 10^4\,\text{s}^{-1}$, $\omega_1 = 10^4\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\omega_2 = 10^6\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ и $A = 100$.

(а) Филтри:





(б)

$$|H(s)| = -\frac{s\omega_0}{s^2+a^2+2as+\omega_0^2} = \frac{s\omega_0}{s^2+2\omega_0 s+2\omega_0^2} \;\; \div 2\omega_0^2 \;\; = \frac{s/2\omega_0}{\frac{s^2}{2\omega_0^2}+\frac{1}{\omega_0}s+1} \quad \text{min!}$$

$a = \omega_0$

$$\Rightarrow s = j\omega \Rightarrow \min\left|-\frac{\omega^2}{2\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0} + 1\right|^2 = \left(1-\frac{t^2}{2}\right)^2 + t^2 \Rightarrow$$

$s^2 = -\omega^2$

$s = j\omega, \quad |H(s)| = \ldots$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_m = \omega_0\sqrt{2}} \quad (б)$$

$$\boxed{|H(j\omega_m)| = \frac{1}{2}}$$

$x(t) = A\big(\cancel{10} + \mathrm{e}^{-\sigma t}\cos(\omega_1 t) + \boxed{\cos(\omega_2 t)}\big)$ где су $\sigma = 10^4\,\text{s}^{-1}$, $\omega_1 = 10^4\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\omega_2 = 10^6\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ и $A = 100$.

u(t)

$$x(t) = A\cos(\omega_2 t) \Rightarrow y(t) = A\,|H(j\omega_2)|\cos(\omega_2 t + \arg|H(j\omega_2)|)$$

$$\omega_0 = 10^3\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow \omega_2 = 10^6\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad H(j\omega_2) = \frac{j\omega_2\omega_0}{(j\omega_2)^2 + 2\omega_0 j\omega_2 + 2\omega_0^2} = \frac{j\omega_2\omega_0}{-\omega_2^2 + j2\omega_0\omega_2 + \cancel{2\omega_0^2}}$$

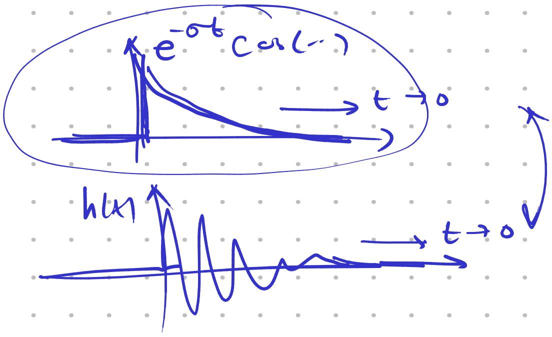
$\omega_2 >> \omega_0$

$$\approx \frac{j\omega_0\omega_2}{j2\omega_0\omega_2 - \omega_2^2} = \frac{j\omega_0}{j2\omega_0 - \omega_2} \approx \frac{j\omega_0}{\omega_2} \approx \frac{j}{10^3}$$

$\arg H = \pi/2$

$|H| = \frac{1}{10^3}$

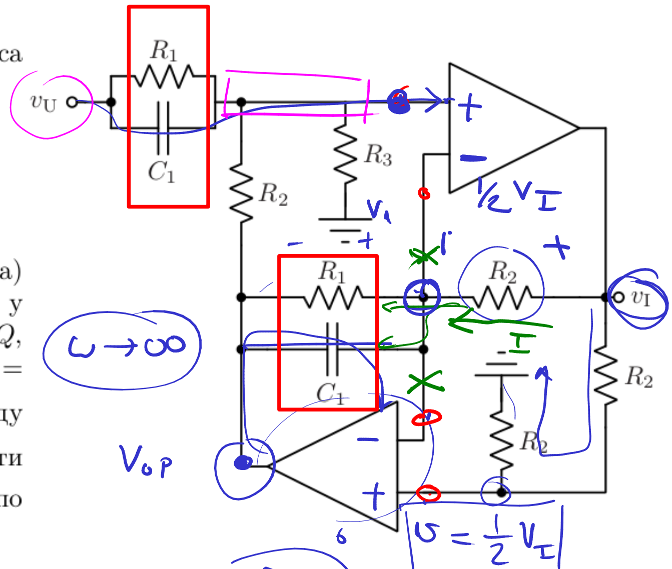
$$\Rightarrow \boxed{y_u = \frac{1}{10}\cos\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right)}$$



4. У колу са слике познато је $R_2 = 10R_1 = \frac{1}{10}R_3$ Функција преноса кола, чији улаз је напон v_{U} а излаз напон v_{I} је облика

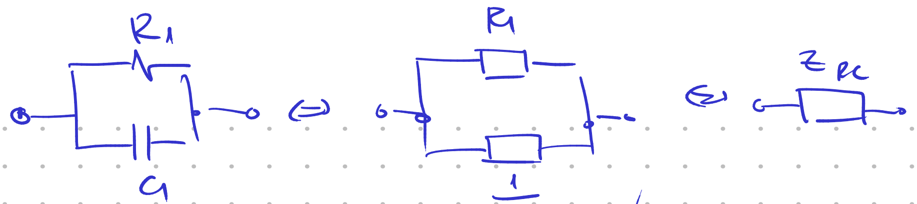
$$\boxed{H(s) = K\frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}.}$$

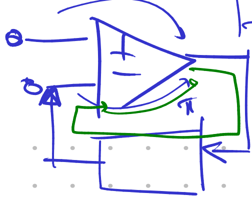
$H(0) = 0$



Објаснити (а) који тип филтра представља дато коло. Одредити (а) поларитете прикључака операционих појачавача тако да оба раде у режиму негативне повратне спреге. Израчунати (б) параметре K и Q, и вредности елемената кола R_1 и C_1 ако су познати $R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$ и $\omega_0 = 10^5\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Одредити (в) принудни и устаљени одзив филтра на побуду $v_{\mathrm{g}}(t) = V_0(5 + \mathrm{e}^{2t}\,\delta(t))\,\mathrm{u}(t-\tau)$, где су $V_0 = 1\,\mathrm{V}$ и $\tau = 2\,\mathrm{s}$. Израчунати (г) ефективну вредност одзива на побуду $v_{\mathrm{g}}^{(\mathrm{r})} = V_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{5}\right)$ по успостављању периодичног режима.

$\boxed{U = \frac{1}{2} V_I}$





$$\boxed{Z_{RC} = R_1 \| \frac{1}{sC_1} = \frac{\frac{R}{sC_1}}{R + \frac{1}{sC_1}} = \frac{R_1}{1 + sC_1R_1}}$$

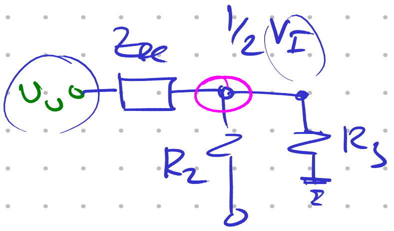
$$I = \frac{V_I}{2R_2} \qquad V_1 = I \cdot (Z_{RC}) \Rightarrow$$

$$Z_C = \frac{1}{sC_1}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{V_I}{2R_2} \cdot \frac{R_1}{1 + sR_1C_1} \Rightarrow V_{op} = \frac{1}{2}V_I - V_1$$

$$V_{op} = \frac{1}{2}V_I - \frac{V_I}{2R_2} \cdot \frac{R_1}{1 + sR_1C_1}$$

$$= \frac{V_I}{2}\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\frac{1}{1 + sR_1C_1}\right) = \frac{V_I}{2}\left(\frac{R_2(1 + sR_1C_1) - R_1}{R_2(1 + sC_1R_1)}\right)$$



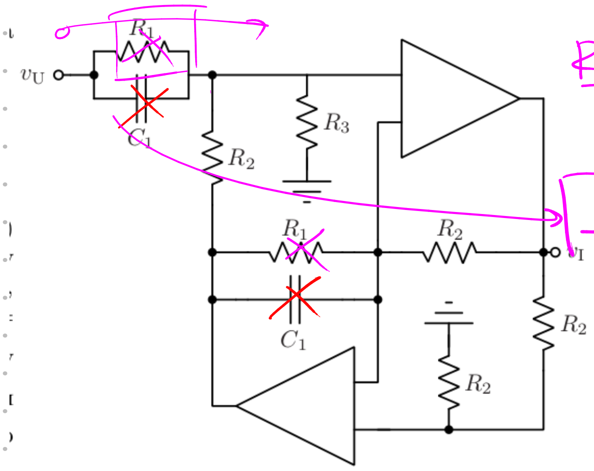
$$\frac{1}{2}V_I\left(\frac{1}{Z_{RC}} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = \frac{U_U}{Z_{RC}} + \frac{V_2}{R_2} \Rightarrow$$

$$V_2 = V_2(V_I)$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{V_I(s)}{V_U(s)} = 2\frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{R_2C}s + \left(\frac{1}{R_2C}\right)^2}$$

$$H(s) = K\frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}.$$

$\boxed{K = 2,}$ $\omega_0 = \frac{1}{R_2C}$ $\boxed{Q = 1}$ $\Rightarrow$ $\boxed{C_1 = 1\,\mathrm{nF}}$, $\boxed{R_1 = \infty}$



$R_1 \to \infty$

$\boxed{A = \varnothing}$

3. Одредити принудни одзив система чији је импулсни одзив $h(t) = e^{-2t}\,u(t)$ на побуду $x(t) = e^{t}\,u(t)$ применом Лапласове трансформације.

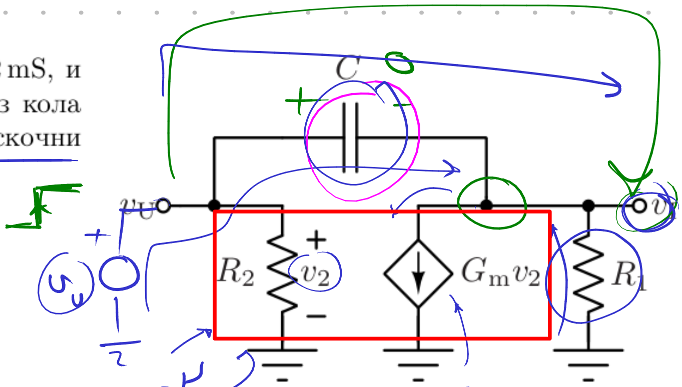
$X(s) \quad H(s) \qquad Y_p = X \cdot H = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$

$\Rightarrow Y_p = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2}; \quad A = \frac{1}{s+2}\Big|_{s=1} = \frac{1}{3}; \quad B = \frac{1}{s-1}\Big|_{s=-2} = \frac{-1}{3}$

$\mathcal{L}^{-1}\{$

$\Rightarrow \boxed{y_p(t) = \left(\frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t}\right)u(t)}$

5. У колу са слике познато је $C = 0{,}1\,\mu F$, $R_1 = 1\,k\Omega$, $G_m = 2\,mS$, и $R_2 = 25\,k\Omega$. Одредити (а) функцију преноса кола ако је улаз кола напон v_U а излаз кола напон v_I. Одредити и нацртати (б) одскочни одзив кола.



$\boxed{v_U = u(t)} \rightarrow \boxed{V_U = \frac{1}{s}}$

$v_2 = v_U$

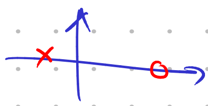
$v_I\left(\frac{1}{R_1} + sC\right) = sC v_U - G_m v_U$

$= v_U(sC - G_m)$

$H = \frac{V_I}{V_U} = \frac{sC - G_m}{\frac{1}{R_1} + sC} \Rightarrow \boxed{H = \frac{s - \frac{G_m}{C}}{s + \frac{1}{R_1 C}}}$

$\boxed{s_z = +\frac{G_m}{C}}$ Нула у десној полуравни (s)

$\boxed{s_p = -\frac{1}{R_1 C}}$



$s_z = 20 \times 10^3\ s^{-1}$

$s_p = -10 \times 10^3\ s^{-1}$

$step(t) \rightarrow step(s)$

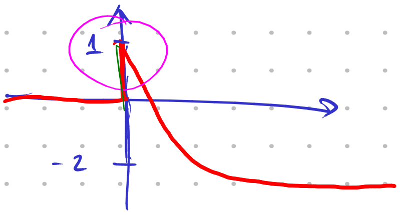
$step(s) = \frac{s - s_z}{s(s - s_p)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_p}; \quad A = \frac{s - s_z}{s - s_p}\Big|_{s=0} = \frac{s_z}{s_p} = -2$

$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$

$B = \frac{s - s_z}{s}\Big|_{s=s_p} = \frac{s_p - s_z}{s_p} = \frac{-10-20}{-10} = 3$

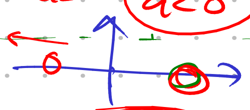
$\Rightarrow step(t) = -2u(t) + 3e^{+s_p t}u(t)$

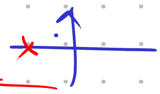
$= (3e^{s_p t} - 2)u(t) \qquad \boxed{s_p = -10 \times 10^3\ s^{-1}}$



$H(s) = K\frac{s+a}{s+b} \qquad s_z = -a \qquad a>0 \quad a<0$

$\boxed{s_p = -b} < 0 \qquad b>0$





$H(s \to 0) = K\frac{a}{b}$

$H(s \to \infty) = K$

$\boxed{sgn\, H(s \to 0) \neq sgn\, H(s \to \infty)}$