8 Фуријеова трансформација континуалних сигнала

Задаци

1. За произвољне сигнале $x(t)$ и $y(t)$ и њихове спектре $X(\mathrm{j}\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ и $Y(\mathrm{j}\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$ (а) доказати да важи

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\omega)Y^*(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{d}\omega. \tag{1}$$

На основу резултата из (а) одредити (б) енергију реалног сигнала $x(t)$ ако је познато $X(\mathrm{j}\omega)$.

2. Применом таблице парова и одговарајућих особина одредити Фуријеову трансформацију следећих сигнала

(*i*) $x(t) = \mathrm{e}^{-t}\big(\mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-1)\big)$ (*ii*) $x(t) = \mathrm{tri}(t)$ (*iii*) $x(t) = \mathrm{e}^{-3|t|}\sin(2t)$

3.[1] Континуални LTI систем дат је диференцијалном једначином

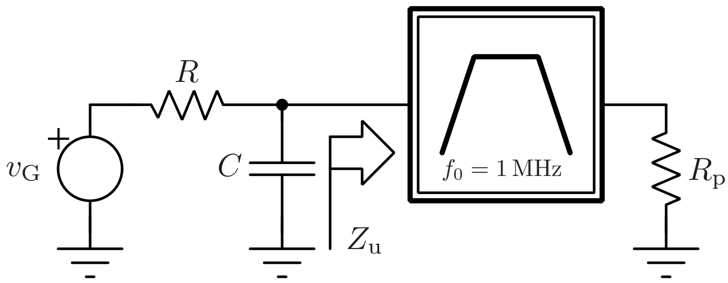
$$(\mathrm{D}+1)(\mathrm{D}+2)(\mathrm{D}+3)y(t) = 2\mathrm{D}x(t).$$

Применом Фуријеове трансформације, одредити импулсни одзив тог система.

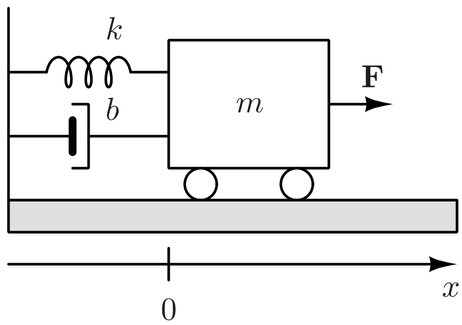
4. Фреквенцијска карактеристика идеалног филтра пропусника учестаности је $H(\mathrm{j}\omega) = \begin{cases} 1, \omega_0 < |\omega| < 3\omega_0 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$. Одредити импулсни одзив оваквог система.

5. У колу са слике познато је $R = 50\,\Omega$ и $C = \dfrac{10}{\pi}\,\mathrm{nF}$. Напон побудног генератора је $v_\mathrm{G} = \Phi_0\,Ш_T(t)$, где су $T = 100\,\mu\mathrm{s}$ и $\Phi_0 = 1\,\mu\mathrm{Wb}$. У колу је употребљен и идеалан филтар пропусник опсега учестаности чија су централна учестност $f_0 = 1\,\mathrm{MHz}$, ширина пропусног опсега $\mathrm{BW} = 10\,\mathrm{kHz}$ и улазна импедансе $Z_\mathrm{u} \to \infty$. Израчунати средњу снагу која се ослобађа на пријемнику отпорности $R_\mathrm{p} = 50\,\Omega$.

Помоћ: $Ш_T(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$



6. У механичком систему са слике колица масе m, са точковима занемарљиве масе, везана су за зид опругом коефицијента крутости k и амортизером коефицијента пригушења b. Побуда посмтраног система је алгебарски интензитет принудне силе $F(t) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{i}_\mathrm{x}$. Одзив система $x(t)$ је отклон колица у односу на равнотежни положај $x_0 = 0$. Одредити (а) функцију преноса овог система и (б) кружну учестаност ω простопериодичне побуде $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ тако да амплитуда осцилација колица буде максимална применом Фуријеове трансформације.



[1]Видети и задатак **3.36** из референтне збирке.

Таблице за испит.

Фуријеове трансформације континуалних сигнала.

$x(t)$	$X(\mathrm{j}\omega)$
1	$2\pi\,\delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega} + \pi\,\delta(\omega)$
$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$
$\mathrm{rect}(t)$	$\mathrm{sinc}\left(\dfrac{\omega}{2\pi}\right)$
$\mathrm{sinc}(t)$	$\mathrm{rect}\left(\dfrac{\omega}{2\pi}\right)$
$\mathrm{comb}(t)$	$\mathrm{comb}\left(\dfrac{\omega}{2\pi}\right)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\left(\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)\right)$
$\sin(\omega_0 t)$	$\mathrm{j}\pi\left(\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)\right)$
$\mathrm{sinc}^2(t)$	$\mathrm{tri}\left(\dfrac{\omega}{2\pi}\right)$
$\mathrm{tri}(t)$	$\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{\omega}{2\pi}\right)$
$\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t), \quad \mathbb{R}\mathrm{e}\{a\} > 0$	$\dfrac{1}{a+\mathrm{j}\omega}$
$\mathrm{e}^{-\pi t^2}$	$\mathrm{e}^{-\dfrac{\omega^2}{4\pi}}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t), \quad \mathbb{R}\mathrm{e}\{a\} > 0$	$\dfrac{1}{(a+\mathrm{j}\omega)^n}$
$\mathrm{e}^{-at}\,\cos(\omega_0 t)\,\mathrm{u}(t), \quad \mathbb{R}\mathrm{e}\{a\} > 0$	$\dfrac{a+\mathrm{j}\omega}{(a+\mathrm{j}\omega)^2+\omega_0^2}$
$\mathrm{e}^{-at}\,\sin(\omega_0 t)\,\mathrm{u}(t), \quad \mathbb{R}\mathrm{e}\{a\} > 0$	$\dfrac{\omega_0}{(a+\mathrm{j}\omega)^2+\omega_0^2}$

Решења

1. (а) Видети материјале за вежбе за шк. год. 2019/2020. (б) $W_x = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\mathrm{j}\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega$

2. (*i*) $X(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{j}\omega)}}{1+\mathrm{j}\omega}$, (*ii*) $X(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{\omega}{2\pi}\right)$, (*iii*) $X(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{2}{4+(3+\mathrm{j}\omega)^2} - \dfrac{2}{4+(3-\mathrm{j}\omega)^2}$

3. $h(t) = \left(-\mathrm{e}^{-t} + 4\mathrm{e}^{-2t} - 3\mathrm{e}^{-3t}\right)\mathrm{u}(t)$

4. $h(t) = \dfrac{2\cos(2\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)}{\pi t}$

5. $P_\mathrm{p} = 2\,\mu\mathrm{W}$.

6. (а) $H(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{X(\mathrm{j}\omega)}{F(\mathrm{j}\omega)} = \dfrac{1}{k-\omega^2 m + \mathrm{j}\omega b}$, (б) $\omega_{\max} = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{b^2}{2m^2}}$