1. За произвољне сигнале $x(t)$ и $y(t)$ и њихове спектре $X(j\omega)=\mathcal{F}\{x(t)\}$ и $Y(j\omega)=\mathcal{F}\{y(t)\}$ (а) доказати да важи

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)Y^*(j\omega)\cancel{\mathrm{d}t}\; d\omega \qquad (1)$$

На основу резултата из (а) одредити (б) енергију реалног сигнала $x(t)$ ако је познато $X(j\omega)$.

$$\boxed{G(j\omega) = Y^*(j\omega)}; \quad G(j\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{X\cdot G\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)G(j\omega)\underbrace{e^{j\omega t}}_{=1}d\omega = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad t=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)G(j\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\boxed{g(-\tau)}d\tau \qquad g(-\tau) = y^*(\tau)$$

$x(-t)$	$X(-j\omega)$

$$\Rightarrow g(-\tau) \xleftrightarrow{FT} G(-j\omega); \quad G(-j\omega) = Y^*(-j\omega)$$

$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$

$$\Rightarrow g(-t) \xleftrightarrow{FT} Y^*(-j\omega) \Rightarrow \boxed{g(-t) = y^*(t)}$$

$$\Rightarrow = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y^*(\tau)d\tau \quad (Х)$$

(б) $W_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 dt$

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int X(j\omega)\,Y^*(j\omega)\,d\omega = \boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega}$$

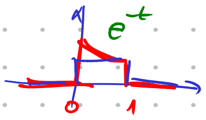
$X(j\omega)$ $y(t) = x(t)$, $Y(j\omega) = X(j\omega)$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)X^*(j\omega)d\omega \qquad z\cdot z^* = |z|^2$$

2. Применом таблице парова и одговарајућих особина одредити Фуријеову трансформацију следећих сигнала

(i) $x(t) = e^{-t}(u(t)-u(t-1))$ (ii) $x(t) = \mathrm{tri}(t)$ (iii) $x(t) = e^{-3|t|}\sin(2t)$

(i)



$$x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-(t-1)-1}u(t-1) = \underbrace{e^{-t}u(t)}_{x_1(t)} - \frac{1}{e}\underbrace{e^{-(t-1)}u(t-1)}_{x_1(t-1)}$$

$x(t-t_0)$	$X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

$$\Rightarrow X(j\omega) = X_1(j\omega) - \frac{1}{e}X_1(j\omega)e^{-j\omega}$$

$x_1(t) = e^{-t}u(t)$

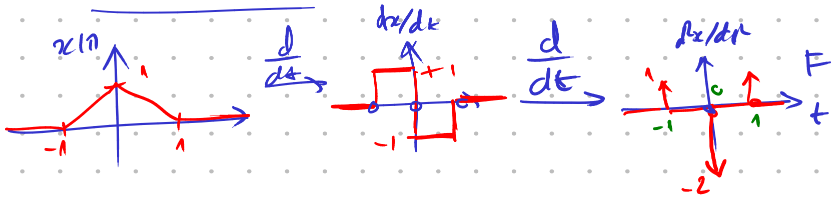
$e^{-at}u(t)$, $\mathrm{Re}\{a\}>0$	$\dfrac{1}{a+j\omega}$

$$\Rightarrow X_1(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} - \frac{e^{-j\omega}}{e}\frac{1}{1+j\omega} = \boxed{\frac{1-e^{-(j\omega+1)}}{1+j\omega}}$$

$\delta(t)$	1

(ii) $x(t) = \mathrm{tri}(t)$



$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = -2 + e^{-j\omega\cdot 1} + e^{+j\omega 1}$$

$$= -2\cdot e^{j\omega\frac{1}{2}}\cdot e^{-j\omega\frac{1}{2}} + e^{-j\omega\cdot} + e$$

$$= \Big(\underbrace{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}_{j2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\Big)^2 = (j2)^2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \to \times j\omega} \qquad \mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{\mathcal{F}\left\{\frac{dx}{dt}\right\}}{(j\omega)^2} = \frac{\cancel{j^2}\, 4 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\cancel{j^2}\,\omega^2} = \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2} = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

(iii)
$$x(t) = e^{-3|t|}\sin(2t) = \begin{cases} e^{-3t}\sin(2t), & t > 0 \\ e^{+3t}\sin(2t), & t < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x_1(t) = e^{-3t}\sin(2t)\,u(t)}$$
$$x_1(-t) = -e^{3t}\sin(2t)$$
НЕПАРНА!

$$x(t) = x_1(t) + x_1(-t) \Rightarrow X(j\omega) = X_1(j\omega) + X_1(-j\omega)$$

$e^{-at}\sin(\omega_0 t)\,u(t), \quad \Re\{a\} > 0$	$\dfrac{\omega_0}{(a+j\omega)^2 + \omega_0^2}$

$\omega_0 = 2$, $a = 3$

$$X_1(j\omega) = \frac{2}{4 + (3 + j\omega)^2}$$
$$X_1(-j\omega) = \frac{-2}{4 + (3 - j\omega)^2}$$
$$+ \quad = X(j\omega)$$

$$X(j\omega) = \frac{2}{4 + (3 + j\omega)^2} - \frac{2}{4 + (3 - j\omega)^2}$$

3.[1] Континуални LTI систем дат је диференцијалном једначином

$$(D + 1)(D + 2)(D + 3)y(t) = 2Dx(t).$$

Применом Фуријеове трансформације, одредити импулсни одзив тог система.

$$\frac{d}{dt} \xmapsto{FT} \times s \qquad S = j\omega$$

НУЛТИ ПОЧЕТНИ УСЛОВИ!

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 \xmapsto{FT} s^2$$

$$FT: \quad (s+1)(s+2)(s+3)\,Y(s) = 2s\,X(s)$$

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow \boxed{X(s) = 1} \Rightarrow H(s) = Y(s)$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{2s}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

COVER-UP METHOD

$$A = \left.\frac{2s}{(s+2)(s+3)}\right|_{\substack{s+1=0\\ s=-1}} = \frac{-2}{(-1+2)(-1+3)} = \frac{-2}{1\cdot 2} = \boxed{-1}$$

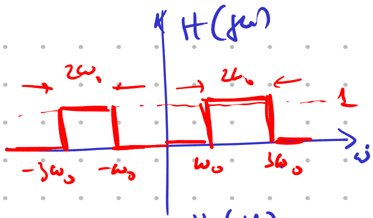
$$B = \left.\frac{2s}{(s+1)(s+3)}\right|_{\substack{s+2=0\\ s=-2}} = \frac{2(-2)}{(-2+1)(-2+3)} = \frac{-4}{(-1)(1)} = \boxed{+4}$$

$$C = \left.\frac{2s}{(s+1)(s+2)}\right|_{\substack{s+3=0\\ s=-3}} = \frac{2(-3)}{(-3+1)(-3+2)} = \frac{-6}{(-2)(-1)} = \boxed{-3}$$

$$\boxed{h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} = \left(-1\,e^{-t} + 4\,e^{-2t} - 3\,e^{-3t}\right)u(t)}$$

4. Фреквенцијска карактеристика идеалног филтра пропусника учестаности је $H(j\omega) = \begin{cases} 1, \omega_0 < |\omega| < 3\omega_0 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$. Одредити импулсни одзив оваквог система.

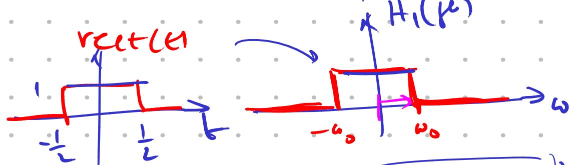
$$H(j\omega) = H_1(j(\omega - 2\omega_0)) + H_1(j(\omega + 2\omega_0))$$



$x(t)\, e^{j\alpha t}$	$X(j(\omega-\alpha))$

$$h(t) = h_1(t)\, e^{j2\omega_0 t} + h_1(t)\, e^{-j2\omega_0 t} =$$

$$= h_1(t)\, [\underbrace{e^{j2\omega_0 t} + e^{-j2\omega_0 t}}_{2\cos(2\omega_0 t)}]$$



$$H_1(j\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

$$A\,\mathrm{sinc}(at) \xrightarrow{FT} A\frac{1}{a}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right)$$

$a>0$

$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

$$\mathrm{sinc}(t) \mapsto \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

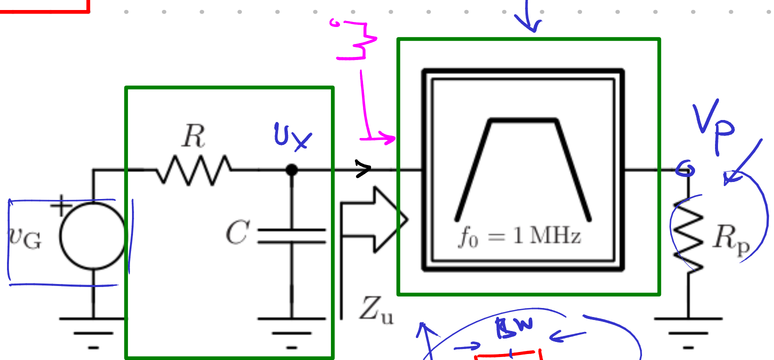
$2\omega_0 = 2\pi a \quad a = \frac{\omega_0}{\pi} \quad \frac{A}{a} = 1 \Rightarrow A = a = \frac{\omega_0}{\pi}$

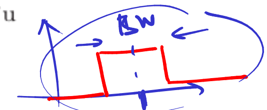
$$\boxed{h_1(t) = \frac{\omega_0}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_0}{\pi} t\right)}$$

$$\boxed{h(t) = 2\cos(2\omega_0 t) \cdot \frac{\omega_0}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_0}{\pi} t\right)}$$

5. У колу са слике познато је $R = 50\,\Omega$ и $C = \frac{10}{\pi}$ nF. Напон побудног генератора је $v_G = \Phi_0 Ш_T(t)$, где су $T = 100\,\mu s$ и $\Phi_0 = 1\,\mu Wb$. У колу је употребљен и идеалан филтар пропусник опсега учестаности чија су централна учестност $f_0 = 1\,MHz$, ширина пропусног опсега $BW = 10\,kHz$ и улазна импеданce $Z_u \to \infty$. Израчунати средњу снагу која се ослобађа на пријемнику отпорности $R_p = 50\,\Omega$.

Помоћ: $Ш_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$





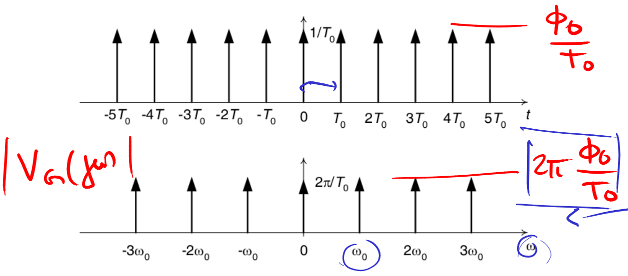
$$v_G = \Phi_0 Ш_T(t)$$

$\rightarrow \boxed{h_1(t)} \rightarrow \boxed{h_2(t)} \rightarrow \iff \rightarrow \boxed{h_1 * h_2} \rightarrow$

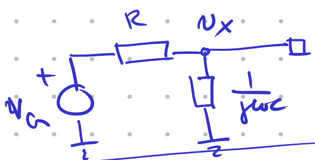
$\rightarrow \boxed{H_1} \rightarrow \boxed{H_2} \rightarrow \Rightarrow \rightarrow \boxed{H_1 \cdot H_2} \rightarrow$

$$F\left\{\mathrm{comb}\left(\frac{t}{T_0}\right)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{comb}\left(\frac{t}{T_0}\right) e^{-j\omega t} dt = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

Dakle, spektar periodične impulsne funkcije sa periodom T_0 je periodična impulsna funkcija u frekvencijskom domenu sa periodom $\omega_0 = 2\pi/T_0$, što je prikazano na slici 6.4.

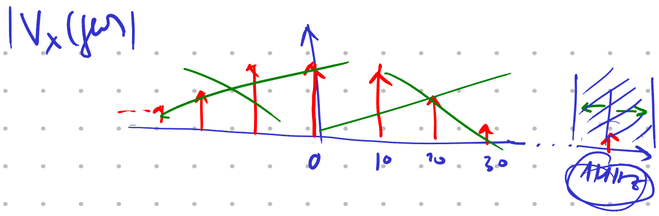


Sl. 6.4: Furijeova transformacija periodične impulsne funkcije.



$$V_x = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} V_G$$

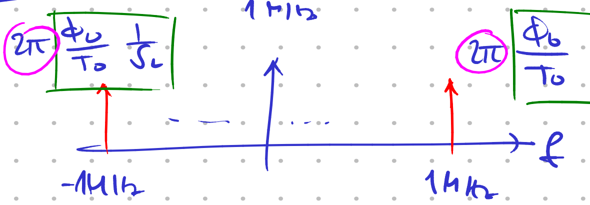
$$\Rightarrow \boxed{V_x = \underbrace{\frac{1}{1 + j\omega RC}}_{H_1(j\omega)} V_G}$$

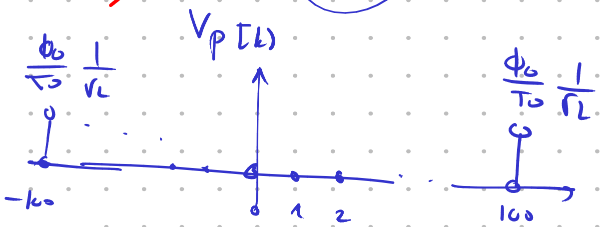


$T_0 = 100\,\mu s = 0.1\,ms \Rightarrow f_0 = 10\,kHz$

$$|H_1(j\,100\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (100\omega_0 RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$100\,\omega_0 RC = 2\pi \underbrace{100 f_0}_{1\,\mathrm{MHz}} \cdot k_C = \cancel{2\pi} \cdot 1\,\mathrm{MHz} \cdot 56\,\Omega \cdot \frac{16}{\cancel{\pi}}\,\mathrm{nF} = 1.$$





$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t}$$

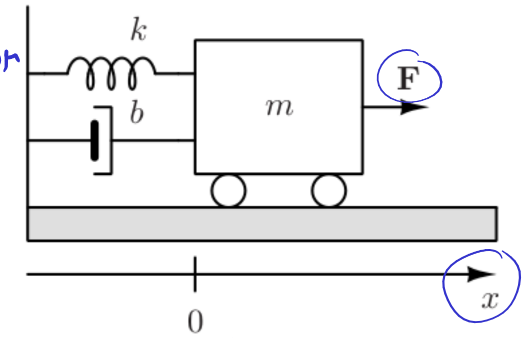
Парсевал:
$$P_P = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} |V_P[k]|^2}{R_P}$$

Odredimo sada Furijeovu transformaciju izraza (6.52).

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\omega_0 t}\right]e^{-j\omega t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\int_{-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_P = \frac{2\cdot\left(\frac{\Phi_0^2}{2T_0^2}\right)}{R_P}} = \frac{1}{R_P}\frac{(\Phi_0)^2}{T_0^2} = \frac{1}{50\,\Omega}\cdot\frac{(1\,\mu\mathrm{Wb})^2}{(100\,\mu\mathrm{s})^2} = \boxed{2\,\mu\mathrm{W}}$$

6. У механичком систему са слике колица масе m, са точковима занемарљиве масе, везана су за зид опругом коефицијента крутости k и амортизером коефицијента пригушења b. Побуда посматраног система је алгебарски интензитет принудне силе $F(t) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{i}_x$. Одзив система $x(t)$ је отклон колица у односу на равнотежни положај $x_0 = 0$. Одредити (а) функцију преноса овог система и (б) кружну учестаност ω простопериодичне побуде $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ тако да амплитуда осцилација колица буде максимална применом Фуријеове трансформације.



$F = -kx$

$F = -bv$

$F_{uk} = ma$

$F - kx - bv = ma \Rightarrow ma + bv + kx = F$

$$\Rightarrow \boxed{mx'' + bx' + kx = F} \Rightarrow m(j\omega)^2 X + bj\omega X + kX = F \Rightarrow H = \frac{X}{F} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{1}{(k - m\omega^2) + j\omega b}}$$

(б)

$\cos(\omega_0 t) \rightarrow \boxed{H(j\omega)} \rightarrow \boxed{|H(j\omega_0)|\cdot\cos(\omega_0 t + \arg H(j\omega_0))}$

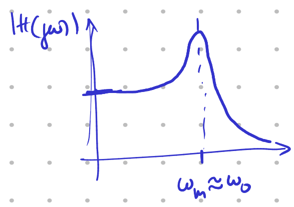
$|H(j\omega_0)| = H_0 e^{j\varepsilon}$

$e^{j\omega_0 t} \rightarrow \boxed{H(j\omega)} \rightarrow H(j\omega_0)\cdot e^{j\omega_0 t} = H_0 e^{j\omega_0 t + \theta}$

FT: $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ → $2\pi\delta(\omega-\omega_0)\,\boxed{H(j\omega_0)}$ IFT

$$\max |H| \Rightarrow \min \frac{1}{|H|}$$

$$\Rightarrow \min \frac{1}{|H|^2} = \min\left((k - m\omega^2)^2 + (\omega b)^2\right)$$



$$\frac{\partial}{\partial\omega} \rightarrow 2(k - m\omega^2)\cdot(-)\cancel{2\omega} m + \cancel{2\omega} b\cdot b = 0 \qquad \omega = 0$$

$$b^2 = 2(k - m\omega^2)m$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{2m} = k - m\omega^2 \Rightarrow m\omega^2 = k - \frac{b^2}{2m} \Rightarrow \boxed{\omega_{max} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}}} \approx \omega_0$$

ω_0