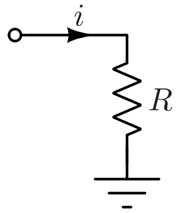
Сигнали и системи (13Е042СИС)
Вежбе (+) – Помоћни материјали 21. април 2021.

Алтернативно решење првог задатка са вежби VII

Ради комплетности задатак понављамо овде:

1. У мрежи са слике позната је отпорност отпорника $R = 3\,\mathrm{k\Omega}$ и струја $i = \dfrac{0{,}75\, I_0}{1{,}25 - \cos(\omega t)}$, где су $I_0 = 1\,\mathrm{mA}$ и $\omega = 10^3\,\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Израчунати средњу снагу губитака на отпорнику R.



<u>Решење</u>. На часу је показано да се решење налази израчунавањем израза $P_R = \dfrac{RI_0^2}{T}\displaystyle\int_0^T \left(\dfrac{0{,}75}{1{,}25 - \cos(\omega t)}\right)^2 \mathrm{d}t$. Ради једноставности, у добијеном интегралу се може увести смена која има смисао тренутне фазе, $\phi = \omega t$, након чега се има $P_R = \dfrac{RI_0^2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\dfrac{0{,}75}{1{,}25 - \cos(\phi)}\right)^2 \mathrm{d}\phi$. Добијени интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{0{,}75^2}{\big(1{,}25 - \cos(\phi)\big)^2}\,\mathrm{d}\phi \tag{1}$$

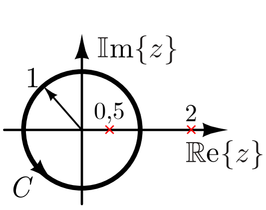
може се решити методама *комплексне анализе.*

Косинусна функција се пре свега изражава у експоненцијалној форми $\cos(\phi) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}}{2}$ и замењује у израз (1), након чега се сређује добијени израз и елиминишу негативни експоненти:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{0{,}75^2}{\left(1{,}25 - \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \frac{2{,}25\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\phi}}{(2{,}5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\phi} - 1)^2}\,\mathrm{d}\phi. \tag{2}$$

У добијеном изразу уводи се смена $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$, односно $\mathrm{d}z = \mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\mathrm{d}\phi$. Пошто су границе интеграције за ϕ од 0 до 2π то тачка z у комплексној равни описује контуру C јединичне кружнице у позитивном математичком смеру (слика 1). Трансформацијом бројиоца $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\phi}\,\mathrm{d}\phi = \dfrac{z\mathrm{d}z}{j}$ и сменом $\mathrm{e}^{jk\pi} = z^k$ $(k \in \mathbb{N})$ интеграл из (2) се може записати као

$$I = \underbrace{\frac{1}{\mathrm{j}}\oint_C \underbrace{\frac{2{,}25z}{(2{,}5z - z^2 - 1)^2}}_{f(z)}\,\mathrm{d}z}_{I'} \tag{3}$$



Слика 1: Контура и полови

Контурни интеграл I' се може решити израчунавањем резидуума полова подинтегралне функције, $f(z)$, који се налазе унутар контуре интеграције (Кошијева теорема о резидуумима):

$$I' = \mathrm{j}2\pi \sum_{z_{\mathrm{p}k} \in C} \operatorname*{Res}_{z = z_{\mathrm{p}k}} f(z). \tag{4}$$

Добијена функција $f(z)$ има полове који одговарају коренима полинома из имениоца $p(z) = (2{,}5z - z^2 - 1)^2 = (z - 0{,}5)^2(z-2)^2$. Полином има два двострука корена, 0,5 и 2, који представљају двоструке полове подинтегралне функције (Слика 1). Од ових полова, само двоструки пол у 0,5 је унутар контуре интеграције. Резидуум пола другог реда је у општем случају дат изразом $\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = \lim\limits_{z\to c} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-c)^2 f(z)$. Израчунавањем јединог потребног резидуума се налази

$$\operatorname*{Res}_{z=0{,}5} f(z) = \lim_{z\to 0{,}5} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{2{,}25z\cancel{(z-0{,}5)^2}}{\cancel{(z-0{,}5)^2}(z-2)^2}\right) = \lim_{z\to 0{,}5}\left(-\frac{2{,}25z + 4{,}5}{(z-2)^3}\right) = \frac{5}{3}. \tag{5}$$

Заменом добијеног резултата у (4) и (3) добија се $I = 2\pi\dfrac{5}{3}$ одакле се коначно заменом у израз за снагу добија $P_R = \dfrac{RI_0^2}{\cancel{2\pi}} \cdot \cancel{2\pi}\dfrac{5}{3} = 5\,\mathrm{mW}$.