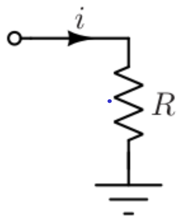
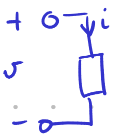
1.[1] У мрежи са слике позната је отпорност отпорника $R = 3\,\mathrm{k\Omega}$ и струја $i = \dfrac{0{,}75 I_0}{1{,}25 - \cos(\omega t)}$, где су $I_0 = 1\,\mathrm{mA}$ и $\omega = 10^3\,\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Израчунати средњу снагу губитака на отпорнику R.



$i = I_0 \cdot x(t)$



$p = v \cdot i \Rightarrow p = R i^2 = R I_0^2\, x^2(t)$

$\Rightarrow P_{sr} = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = R I_0^2 \cdot \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt$

$$\boxed{x = \frac{0{,}75}{1{,}25 - \cos(\omega t)}}$$

$$\frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos(\omega t) + a^2}$$

$x = \dfrac{0{,}75}{1 + 0{,}25 - 1\cos(\omega t)}$ $\quad a^2 = 0{,}25 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$; $\quad 1 = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ $\quad \boxed{a = \frac{1}{2}}$

$1 - a^2 = 1 - \frac{1}{4} = 0{,}75$

$$\frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos(\omega t) + a^2} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(k\omega t),$$

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T x^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X[k]|^2}$$

$C[0] = 1, \quad C[k] = 2a^k, \; k > 0$ $\qquad X[0] = 1$

Парсевалова т-ма.

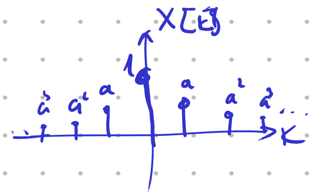
$\Rightarrow |X[0]| = 1$

x реалан сигнал $\Rightarrow X[-k] = X^*[k]$!

$|X[k]| = \frac{1}{2} C[k] = a^k, \; k > 0$

$X[k] = a^k, \; k > 0$

$X[-k] = a^k \quad k > 0$



$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |X[k]|^2 = |X[0]|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}|X[k]|^2 = 1 + 2\sum_1^{\infty}(a^k)^2 = 1 + 2\sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

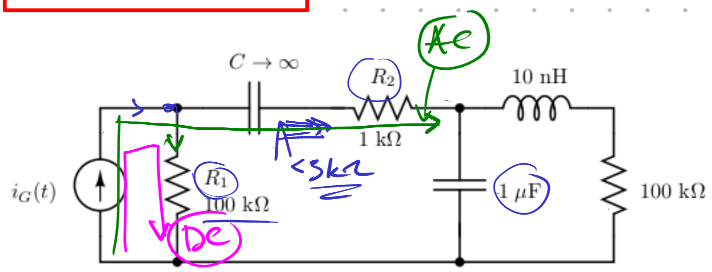
$(a^2)^k$

$$\Rightarrow \sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \sum_0^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}; \qquad \boxed{\frac{1}{T}\int_0^T x^2 dt = \frac{5}{3}}$$

$$P_{sr} = R I_0^2 \cdot \frac{5}{3} = \underbrace{3\,\mathrm{k\Omega}\,(1\,\mathrm{mA})^2}_{3\,\mathrm{mW}} \cdot \frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{P_R = 5\,\mathrm{mW}}$$

2.[2] У колу са слике позната је струја струјног генератора у дата облику $i_G(t) = I_m(1 + \cos(\omega t)\sin^2(\omega t))$, где су $I_m = 1\,\mathrm{mA}$ и $\omega = 200\pi\,\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Одредити развој струје i_G у Фуријеов ред на основном периоду. Израчунати средње снаге отпорника (б) R_1 и (в) R_2. У колу је успостављен сложенопериодичан режим.

$x(t)$



$\cos(\omega t) = \dfrac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$ $\qquad z = e^{j\omega t}$ $\qquad \cos(\omega t) = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$ $\qquad \sin(\omega t) = \dfrac{z - z^{-1}}{j2}$

$\sin(\omega t) = \dfrac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{j2}$

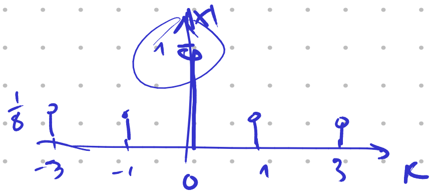
$\Rightarrow i_G(t) = I_m x(t) \Rightarrow x(t) = 1 + \dfrac{z + z^{-1}}{2} \cdot \dfrac{(z - z^{-1})^2}{-4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = 1 - \frac{1}{8}(z + z^{-1})(z^2 + z^{-2} - 2) =$

$= 1 - \frac{1}{8}(z^3 + z^{-1} - 2z + z + z^{-3} - 2z^{-1}) = 1 - \frac{1}{8}(z^3 + z^{-3} - z^{-1} - z), \qquad z^n = e^{jn\omega t}$

$\Rightarrow X[k] = \delta[k] - \dfrac{\delta[k-3] + \delta[k+3] - \delta[k+1] - \delta[k-1]}{8}$ $\qquad e^{jn\omega t} \overset{FS}{\longmapsto} \delta[k-n]$

$z^m \mapsto \delta[k-m]$



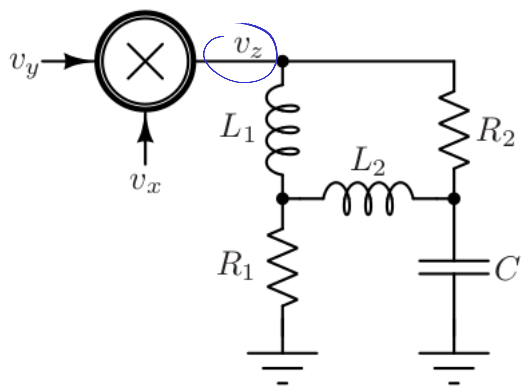
$|Z_C| = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{200\pi \cdot 1\,\mu\mathrm{F}} = \dfrac{1}{200\pi}\,\mathrm{M\Omega} = \dfrac{1000\,\mathrm{k\Omega}}{200\pi} = \dfrac{5}{\pi}\,\mathrm{k\Omega} < 2\,\mathrm{k\Omega}$ $\qquad 1 \mapsto \delta[k]$

$$P_{R1} = R_1 I_m^2 \cdot |X[0]|^2 = 100\,k\Omega \cdot (1\,mA)^2 \cdot 1 \Rightarrow \boxed{P_{R1} \approx 100\,mW}$$

$$P_{R2} = R_2 I_m^2 \left(|X[-3]|^2 + |X[-1]|^2 + |X[1]|^2 + |X[3]|^2\right)$$

$$= \underbrace{1\,k\Omega \cdot (1\,mA)^2}_{1\,mW} \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 1\,mW \cdot \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{64}\;16} \Rightarrow \boxed{P_{R2} \approx 16\,mW}$$

3.[3] У колу са слике познато је $L_1 = L_2 \to \infty$, $R_1 = 2R_2 = 100\,\Omega$ и $C \to \infty$. Употребљен је идеални множач (тзв. мешач), нелинеаран систем без меморије са два улаза и једим излазом, чија је карактеристика преноса одређена изразом $v_z = \frac{v_x \cdot v_y}{V_0}$, где је $V_0 = 1\,\mathrm{V}$. Познати су спектри улазних напона $V_x[k] = V_0\underbrace{(\mathrm{u}[k+2] - \mathrm{u}[k-3])}_{X[k]}$ и $V_y = V_0\underbrace{(\delta[k+2] + \delta[k-2])}_{Y[k]}$ чији су основни периоди једнаки. Израчунати средње снаге отпорника R_1 и R_2.

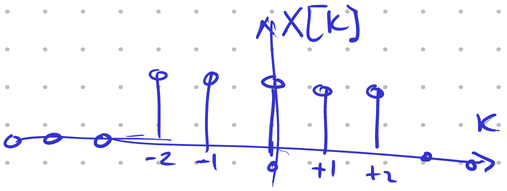


$$v_z = \frac{v_x \cdot v_y}{V_0}$$

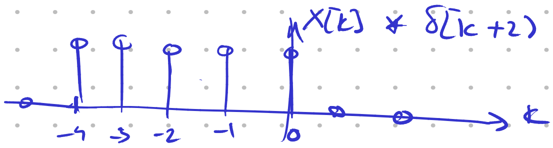
$$V_x = V_0 X[k]$$
$$V_y = V_0 Y[k]$$

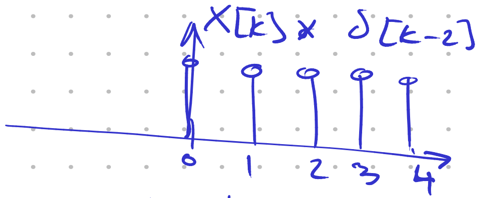
$$V_z = \frac{1}{V_0}(V_x * V_y) = \frac{1}{V_0}(V_0 X[k] * V_0 Y[k]) = V_0(X[k] * Y[k])$$

$$X[k] = u[k+2] - u[k-3]$$
$$Y[k] = \delta[k+2] + \delta[k-2]$$

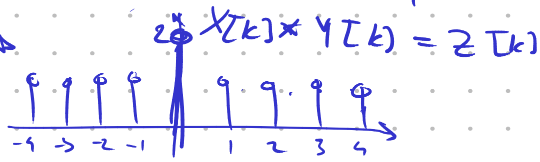


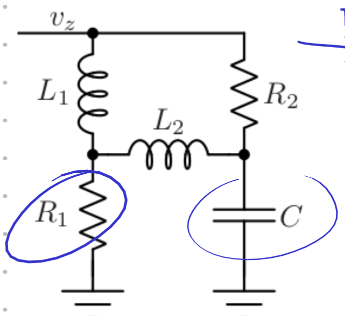
$$X[k] * Y[k] = X[k] * \delta[k+2] + X[k] * \delta[k-2]$$



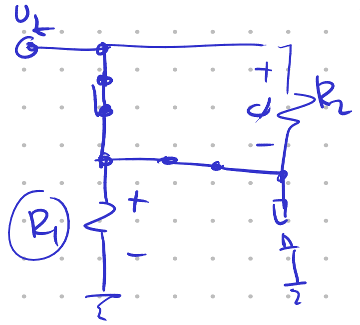


$$V_z[k] = V_0 Z[k]$$





DC



DC

$$P_{R1}^{DC} = \frac{|V_z[0]|^2}{R_1} = \frac{|Z[0]|^2 V_0^2}{R_1}$$

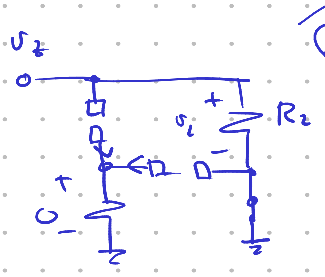
$$\Rightarrow P_{R1} = \frac{4 \cdot 1V^2}{100\,\Omega} = \frac{4}{100}\,W = \frac{40}{1000}\,W = 40\,mW$$

$$\boxed{P_{R2}^{DC} = 0}$$

DC

$$\boxed{P_{R1}^{AC} = 0}$$

AC

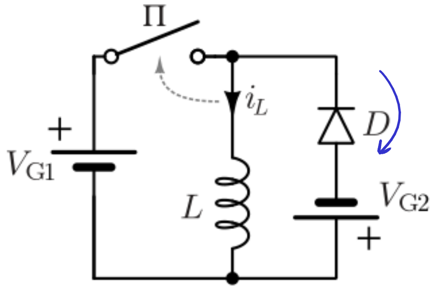


AC

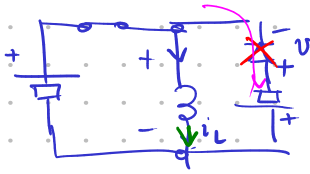
$$P_{R2}^{AC} = \frac{V_0^2}{R_2} \cdot \sum_{\substack{k=-4:4 \\ k \neq 0}} |Z[k]|^2 = \frac{8V_0^2}{R_2} = \frac{2 \cdot 8 V_0^2}{R_1} = \frac{16 V_0^2}{R_1} = \frac{4 \cdot 4 V_0^2}{R_1} = 160\,mW$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_{R1} &= 40\,mW \\ P_{R2} &= 160\,mW \end{aligned}}$$

4. У колу са слике познато је $L = 100\,\mu\mathrm{H}$ и $V_{G1} = V_{G2} = 10\,\mathrm{V}$. Диода и прекидач су идеални. Прекидач се управља на основу тренутне вредности струје калема. Када струја калема достигне нулту вредност прекидач се затвара, а када струја калема достигне вредност $I_0 = 1\,\mathrm{A}$ прекидач се отвара. У колу је успостављен периодичан режим. Одредити (а) струју калема $i_L = i_L(t)$ и (б) скицирати њен дијаграм. Одредити (в) амплитудски спектар $|I_L[k]|$.

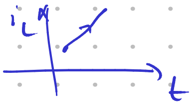


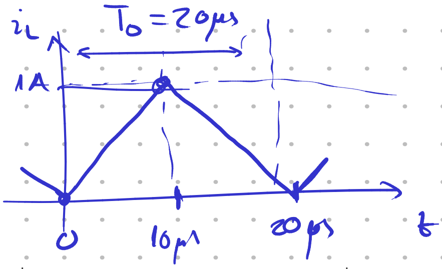
$\Pi \rightarrow (z)$



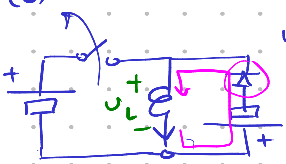
$v_D = -20\,\mathrm{V}$

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} \Rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{v_L}{L} = \frac{10\,\mathrm{V}}{100\,\mu\mathrm{H}} = \frac{1}{10}\frac{\mathrm{A}}{\mu\mathrm{s}} = 0{,}1\frac{\mathrm{A}}{\mu\mathrm{s}}$$



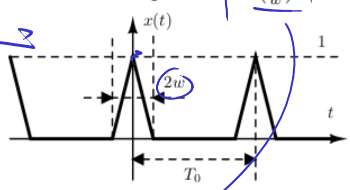


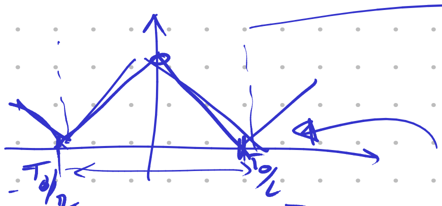
$\Pi \rightarrow (o)$



$$v_L = -V_G \Rightarrow \frac{di_L}{dt} = -0{,}1\frac{\mathrm{A}}{\mu\mathrm{s}}$$

Osnovna perioda $\mathrm{tri}\left(\frac{t}{w}\right)$	$\frac{w}{T_0}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k\,w}{T_0}\right)$	$T_F = T_0$





$$2w = T_0 \Rightarrow w = \frac{T_0}{2}$$

$$i_L(t) = 1\mathrm{A}\cdot \mathrm{tri}\left(\frac{2t}{T_0}\right),\ |t| < \frac{T_0}{2} \Rightarrow |I_L[k]| = \frac{\frac{T_0}{2}}{T_0}\,1\mathrm{A}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)$$

$$\frac{w}{T_0} = \frac{T_0}{2T_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{|I_L[k]| = \frac{1}{2}\mathrm{A}\ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)}$$

$\rightarrow \mathrm{Sinc}\,x = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

$\rightarrow \cancel{\mathrm{sinc}\,x = \frac{\sin x}{x}}$

$\boxed{\mathrm{sinc}\,x = \mathrm{Sinc}\,x}$