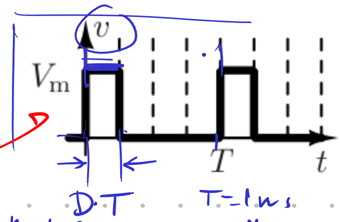
1. Дат је напонски сигнал $v = v(t)$ облика периодичне поворке униполарних правоугаоних импулса амплитуде $V_\mathrm{m} = 5\,\mathrm{V}$, као на слици. Фактор испуњености импулса је $D = 25\%$ а учестаност је $f = 1\,\mathrm{kHz}$. Одредити развој овог сигнала у Фуријеов ред, $V[k]$, на основном периоду T.



PWM сигнал

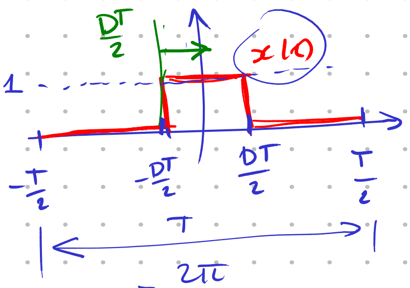
$f = \frac{\omega_0}{2\pi}$

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \int_0^T e^{jn\omega_0 t} \cdot e^{jm\omega_0 t}\, dt = \begin{cases} 0, & n+m \neq 0 \\ \neq 0, & n+m = 0 \end{cases}$$

$$v(t)\, e^{jm\omega_0 t} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{jm\omega_0 t} \,\Big|\, \int_0^T \Rightarrow \int_0^T v(t) e^{jm\omega_0 t} = \int_0^T c_k e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$m = -k$

$$\Rightarrow \int_0^T v(t) e^{jm\omega_0 t} = T c_k \Rightarrow \boxed{c_k = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt}$$



$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$X[k] = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-DT/2}^{DT/2} e^{-jk\omega_0 t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t=-DT/2}^{+DT/2} e^{-jk\omega_0 t}\, \frac{d(-jk\omega_0 t)}{-jk\omega_0} = \frac{1}{T(-)jk\omega_0}\, e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{t=-\frac{DT}{2}}^{\frac{DT}{2}}$$

$$\Rightarrow X[k] = \frac{1}{-jk\omega_0 T}\left(e^{-jk\omega_0 \frac{DT}{2}} - e^{+jk\omega_0 \frac{DT}{2}}\right) = \frac{1}{\cancel{+j}k\omega_0 T\frac{D}{2}}\,\frac{D}{\cancel{2}}\,(-)\,\cancel{j2}\,\sin\left(k\omega_0 \frac{DT}{2}\right)$$

$$e^{-jx} - e^{jx} = -j2\,\boxed{\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{j2}} = -j2\sin x$$

$$\Rightarrow X[k] = D\,\mathrm{sinc}\left(k\cancel{\omega_0 T}\frac{D}{\cancel{2}}\right) = D\,\mathrm{sinc}(k\pi D); \quad v(t) = V_m\, x\left(t - \frac{DT}{2}\right)$$

$$x(t) = \sum c_k e^{jk\omega_0 t}$$

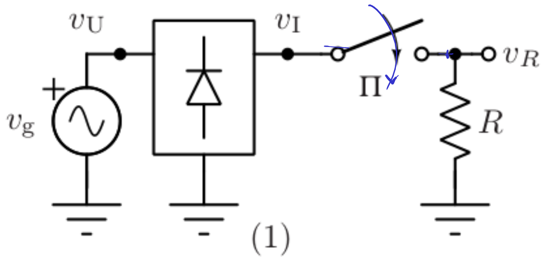
$$x(t-\tau) = \sum c_k e^{jk\omega_0 (t-\tau)} = \sum c_k e^{-jk\omega_0 \tau} \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$\boxed{V[k] = V_m \cdot D\,\mathrm{sinc}(k\pi D) \cdot e^{-jk\pi D}}$$

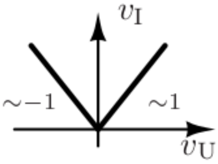
$$\mathrm{Sinc}\, x = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \rightarrow \mathrm{sinc}\, x = \frac{\sin(x)}{x}$$

2. У колу са слике (1) познат је напон побудног генератора $v_g = V_m \sin(\omega t)$ где су $V_m = 12\,\mathrm{V}$ и $\omega = 100\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, а прекидач је идеалан. Преносна карактеристика нелинеарног кола са диодама приказана је на слици (2). Прекидач се управља као што је приказано на слици (3) при чему је фактор испуне $0 < D < 1$ а T_0 је основни период напона v_I. Скицирати (а) напоне у тачкама v_U, v_I и v_R. Одредити (б) спектралне коефицијенте напона v_R, $V_R[k]$.

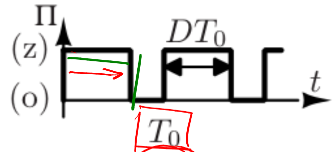
Скицирати (в) амплитуду другог хармоника напона v_R у зависности од фактора испуне D



(1)

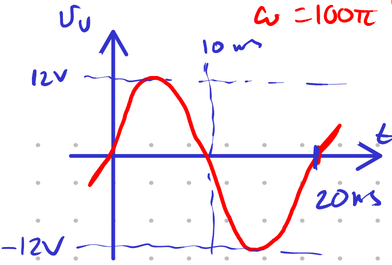


(2)



(3)

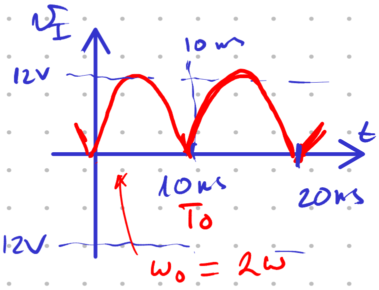
$\omega = 100\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 50\,\mathrm{Hz} \Rightarrow T = 20\,\mathrm{ms}$



$v_I = \begin{cases} v_U, & v_U > 0 \\ -v_U, & v_U < 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{v_I = |v_U|} \Rightarrow v_I = |v_U| = V_m|\sin\omega t|$

$v_R = \begin{cases} v_I, & \Pi \to (z) \\ 0, & \Pi \to (o) \end{cases}$

$V_R[k] = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} v_R(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$

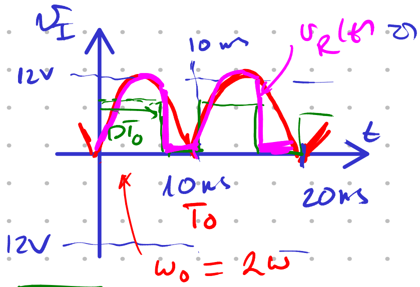


$\Rightarrow V_R[k] = \frac{1}{T_0}\int_0^{DT_0} V_m \sin(\omega t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$

$\phi = \omega t$

$d\phi = \omega\, dt$

$\omega_0 t = 2\omega t = 2\phi$



$V_R[k] = \frac{V_m}{\omega T_0}\int_0^{\omega T_0 D} \sin(\phi)\, e^{-jk2\phi}\, d\phi$

$\omega T_0 = \frac{\omega_0}{2} T_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$\underbrace{\int \sin\phi\, e^{-jk2\phi}\, d\phi}_{I} =$ DI method

	D	I
+	$e^{-jk2\phi}$	$\sin\phi$
−	$-jk2\, e^{-jk2\phi}$	$-\cos\phi$
+	$-4k^2 e^{-jk2\phi}$	$-\sin\phi$

$= e^{-jk2\phi}(-\cos\phi - jk2\sin\phi) + 4k^2 \underbrace{\int e^{-jk2\phi}\sin\phi\, d\phi}_{I}$

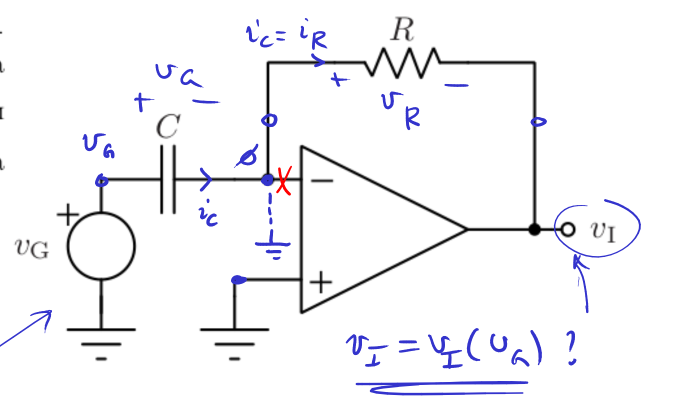
$$\boxed{I = \frac{e^{-jk2\phi}(\cos\phi + jk2\sin\phi)}{4k^2 - 1}}$$

$I(0) = \frac{1}{4k^2 - 1}$

$I(\pi D) = \frac{e^{-jk2\pi D}(\cos(\pi D) + jk2\sin(\pi D))}{4k^2 - 1} \to$

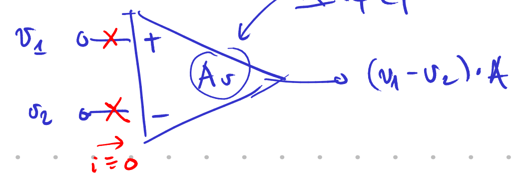
$$\boxed{V_R[k] = \frac{V_m}{\pi}\cdot\frac{e^{-jk2\pi D}(\cos(\pi D) + jk2\sin(\pi D)) - 1}{4k^2 - 1}}$$

3. У колу са слике познато је R и C а операциони појачавач је идеалан. Побудни напонски генератор је идеалан, а позната је и његова емс $v_G = \dfrac{\alpha \sin(\omega t) V_m}{1 - 2\alpha\cos(\omega t) + \alpha^2}$, где су V_m и α познате константе, при чему је $|\alpha| < 1$. Одредити спектралне коефицијенте излазног напона $V_I[k]$ у комплексном облику.

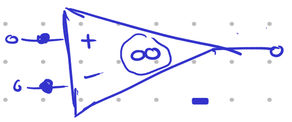


$v_I = v_I(v_G)$?

Диференц. појачавач (ОЕ)



$i_+ = 0$
$i_- = 0$
$v_+ = v_-$



$i_C = C\dfrac{dv_C}{dt} = C\cdot\dfrac{dv_G}{dt}$; $v_R = i_C R = RC\dfrac{dv_G}{dt}$

$$\boxed{v_I = -RC\frac{dv_G}{dt}}$$

$v_G \to \boxed{RC} \to \boxed{\frac{d}{dt}} \to v_I$

$V_G[k] \to \boxed{RC} \to \boxed{\times jk\omega_0} \to V_I[k]$

$$v_G(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} V_G[k]\, e^{jk\omega_0 t} \Big| \frac{d}{dt}$$

$$\frac{dv_G(t)}{dt} = \sum_{-\infty}^{\infty} jk\omega_0 V_G[k]\, e^{jk\omega_0 t}$$

$$v_G(t) = \frac{\alpha \sin(\omega t) V_m}{1 - 2\alpha\cos(\omega t) + \alpha^2}, \quad T = \frac{\omega}{2\pi}$$

Формални развој:

$z = e^{j\omega t}$, $z^k = e^{jk\omega t}$

$z^{-1} = e^{-j\omega t}$

$$\sin(\omega t) = \frac{z - z^{-1}}{j2} = \frac{z^2 - 1}{j2z}$$

$$\cos(\omega t) = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

$$v_G(t) = \frac{\alpha \frac{z^2-1}{j2z} V_m}{1 - \cancel{2}\alpha\frac{z^2+1}{\cancel{2}z} + \alpha^2}\Bigg|\cdot z = \frac{\alpha V_m}{j2}\frac{(z^2-1)}{\underbrace{z - \alpha z^2 - \alpha + \alpha^2 z}_{(1-\alpha z)(z-\alpha)}} = \frac{V_m}{j2}\frac{\alpha(z^2-1)}{(1-\alpha z)(z-\alpha)}$$

$$= \frac{V_m}{j2}\left(\frac{A}{1-\alpha z} + \frac{B}{z-\alpha}\right)$$

$$\frac{\alpha(z^2-1)}{(\cancel{1-\alpha z})(z-\alpha)} = \frac{A}{\cancel{1-\alpha z}} + \cancel{\frac{B(1-\alpha z)}{z-\alpha}}\Bigg|\cdot(1-\alpha z)$$

$$\frac{\alpha(z^2-1)}{(1-\alpha z)(z-\alpha)} = \frac{A}{1-\alpha z} + \frac{B}{z-\alpha}\Bigg|\cdot(z-\alpha)$$

$A = 1$

$$\boxed{z = \frac{1}{\alpha}} \quad A = \frac{\alpha\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 1\right)}{\frac{1}{\alpha} - \alpha} = \frac{\cancel{\frac{1}{\alpha} - \alpha}}{\cancel{\frac{1}{\alpha} - \alpha}} = 1 \Rightarrow \boxed{B = -z}$$

$$\boxed{A = 1} \Rightarrow v_G(t) = \frac{V_m}{j2}\left(\frac{1}{1-\alpha z} - \frac{z}{z-\alpha}\right)$$

$$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}} \quad |q| < 1$$

$|\alpha| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k z^k \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k z^{-k}$$

$$v_G(t) = V_m \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \boxed{\frac{z^k - z^{-k}}{j2}} \Rightarrow \boxed{v_G(t) = V_m \sum_{0}^{\infty} \alpha^k \sin(k\omega t)}$$

$\sin(k\omega t)$

$$\left| x(t) = \frac{1}{2}X_c[0] + \sum_{k=1}^{\infty} X_c[k]\cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=0}^{\infty} X_s[k]\sin(k\omega_0 t) \right|$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\, e^{jk\omega_0 t}$$

$$X[0] = X_c[0]$$

$$X[k] = \frac{X_c[k] - jX_s[k]}{2}, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

$$X[-k] = X^*[k] = \frac{X_c[k] + jX_s[k]}{2}, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

$$X_c[0] = 0, \quad X_s[k] = V_m\alpha^k$$

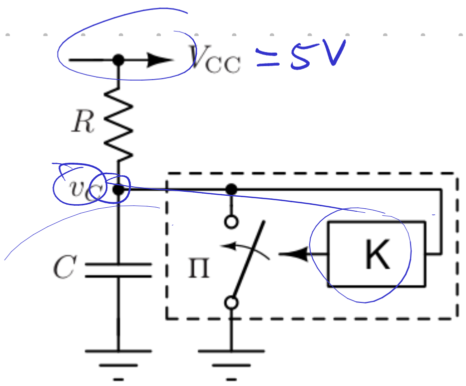
$$X[k>0] = -\frac{j}{2}V_m\alpha^k, \quad X[0] = 0, \quad X[k<0] = +\frac{j}{2}V_m\alpha^k$$

$$\Rightarrow \boxed{V_G[k] = -\frac{j}{2}V_m\alpha^k\,\mathrm{sgn}(k)} \Rightarrow V_I[k] = \cancel{-}\frac{\cancel{j}}{2}V_m\alpha^k\,\mathrm{sgn}(k)\,\cancel{j}k\omega$$

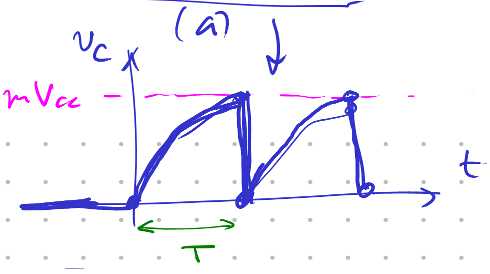
$$\Rightarrow \boxed{V_I[k] = \frac{1}{2}V_m k\alpha^k \omega RC\,\mathrm{sgn}(k)}$$

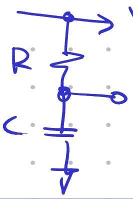
$V_{cc} = 5V$

4. У колу са слике познато је $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ и $C = 1\,\mu\mathrm{F}$. Систем „K“ управља идеалним прекидачем П на основу напона v_C. Прекидач П је иначе отворен, уколико напон v_C достигне вредност mV_{CC}, где је $0 \le m \le 1$ позната константа, контролни систем „K“ тренутно и краткотрајно затвара прекидач. У почетном тренутку је $v_C(0) = 0$. Одредити (а) напон на кондензатору у зависности од времена и (б) одредити спектралне коефицијенте устаљене периодичне компоненте тог напона на основном периоду.



(a)





$$v_C = V_{cc}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$\tau = RC$$

$$v_C(T) = m\cancel{V_{cc}} = \cancel{V}_{cc}\left(1 - e^{-T/\tau}\right)$$

$$e^{-T/\tau} = 1 - m \Rightarrow -\frac{T}{\tau} = \ln(1-m)$$

$$T = -\tau\ln(1-m) \Rightarrow \boxed{T = \tau\ln\frac{1}{1-m}}$$

$$x_1(t) = 1 \Rightarrow \boxed{X_1[k] = \delta[k]}$$

$$v_c(t) = V_{cc}\,x(t), \quad x(t) = 1 - e^{-t/\tau}$$

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

$$x_1(t) = 1 \qquad x_2(t) = e^{-t/\tau}$$

$$V_C[k] = V_{cc}\left(X_1[k] - X_2[k]\right)$$

$$x_2(t) = e^{\sigma t}, \quad \sigma = -\frac{1}{\tau}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$s \hat{=} \sigma - jk\omega_0$$

$$X_2[k] = \frac{1}{T}\int_0^T e^{\sigma t} \cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{\overbrace{(\sigma - jk\omega_0)}^{s} t}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{st}\, dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T e^{st}\, \frac{d(st)}{s} = \frac{1}{sT}\, e^{st}\Big|_{t=0}^{T} = \boxed{\frac{e^{sT} - 1}{sT}}.$$

$$sT = (\sigma - jk\omega_0) T = -\frac{1}{\cancel{T}} \cdot \cancel{T} \ln \frac{1}{1-m} - jk2\pi = \underline{\ln(1-m) - jk2\pi}$$

$$e^{sT} = e^{\ln(1-m) - j2\pi k}$$

$$\Rightarrow X_2[k] = \frac{\cancel{1} - m - \cancel{1}}{\ln(1-m) - j2\pi k} = \frac{m}{j2\pi k - \ln(1-m)}$$

$$= (1 - m) \cdot \cancel{e^{-j2\pi k}}\ 1$$

$$\boxed{V_c[k] = V_{cc}\left(\delta[k] - \frac{m}{j2\pi k - \ln(1-m)}\right)}$$