

## 5 Дискретни LTI системи, Стабилност

### Задачи

1. Каузални систем је описан диференцијалном једначином  $\nabla(\Delta - 2)^2 y[n] = Dx[n - 1]$ , где су  $D$ ,  $\nabla$  и  $\Delta$  оператори кашњења, диференце уназад и диференце унапред респективно. Одредити (а) импулсни одзив тога система и испитати (б) његову стабилност. Одредити његов сопствени одзив ако су за систем без побуде дати почетни (помоћни) услови  $y[0] = y[2] = 0$ ,  $y[1] = 1$ ;

2. Дискретни систем описан је диференцијалном једначином:

$$2y[n] + 11y[n - 1] + 17y[n - 2] + 6y[n - 3] = 2x[n] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n - k - 1]\delta[k - 1]$$

Нацртати (а) блок дијаграм система користећи суматоре, појачаваче и елементе за кашњење. Одредити (б) импулсни одзив система ако је познато да је он каузалан и да карактеристични полином има један корен који је  $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ .  
 (в) Испитати стабилност система.

3. Дискретни систем описан је диференцијалном једначином  $2y[n + 2] - y[n + 1] - y[n] = x[n]$ . Одредити (а) импулсни одзив овог система Одредити (б) одзив на побуду и (в) сопствени одзив одзив система ако су дати побуда и помоћни услови:

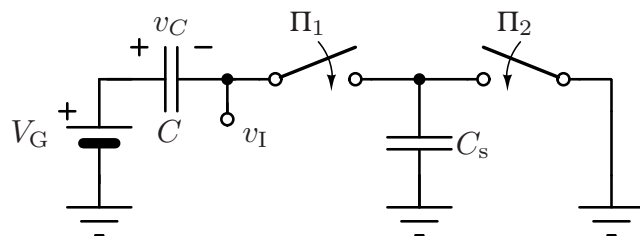
$$(i) \quad x[n] = (-2)^{-n} u[n], \\ y[1] = 1, y[0] = 0$$

$$(ii) \quad x[n] = (-2)^{-n} u[n - 3], \\ y[1] = 1, y[0] = 0$$

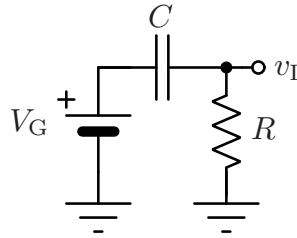
$$(iii) \quad x[n] = (-2)^{-n} u[n], \\ y[0] = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = 4$$

4. (а) Одредити и (б) скицирати одзив дискретног LTI система чији је импулсни одзив  $h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n - 2]$  на побуду  $x[n] = u[1 - n]$ .

5. У колу са слике познато је  $C = 100 \text{ pF}$  и  $C_s = 30 \text{ pF}$  а емс идеалног напонског генератора константне побуде је  $V_G = 1 \text{ V}$ . У тренутку  $t_0 = 0^-$  оба кондензатора су неоптерећена. Прекидачи су идеални и затварају се искључиво у појединим тренуцима, *крајкоштрајно*. Прекидач  $\Pi_1$  се укључује у тренуцима  $t = kT$ , а  $\Pi_2$  у тренуцима  $t = \left(k + \frac{1}{2}\right)T$ , где су  $\frac{1}{T} = f = 10 \text{ MHz}$  а  $k \in \mathbb{N}_0$ . Одредити (а) диференцијалну једначину за дискретни представник напона на кондензатору, као  $v_C^*[k] = v_C \left(\left(k + \frac{1}{4}\right)T\right)$  и (б) решити је. Скицирати (в) дијаграм напона на кондензатору. На основу резултата из претходне тачке, одредити и (г) дискретни представник излазног напона  $v_I^*[k] = v_I \left(\left(k + \frac{1}{4}\right)T\right)$  и (д) скицирати његов дијаграм.







Слика 1: Филтар пропусник високих учестаности

Приказано коло представља принцип за прекидачко-капацитивне (енг. *Switched Capacitor*) филтре. Коло се може упоредити са  $RC$  филтром пропусником високих учестаности приказаном на слици. Одзив напона на кондензатору (за иницијално празан кондензатор у колу) је дат изразом  $v_I = V_G \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$ . Уколико упоредимо овај израз са изразом у тачки (г) Задатка можемо уочити сличност. Уколико додатно приметимо да је  $n = \frac{t}{T}$  можемо да другачије напишемо добијено решење има се:

$$v_I^*[n] = V_G \left(\frac{C}{C + C_s}\right)^n = V_G \left(\frac{C}{C + C_s}\right)^{\frac{t}{T}} = V_G \exp\left(\ln\left(\frac{C}{C + C_s}\right) \frac{t}{T}\right). \quad (1)$$

Овај облик напона идентичан је облику из филтра уколико је задовољена веза  $\ln\left(\frac{C}{C + C_s}\right) \frac{1}{T} = -\frac{1}{RC}$ . Решавањем по  $C_s$  добија се резултат  $C_s = C \left(\exp\left(\frac{T}{RC}\right) - 1\right)$ . Уколико се усвоји довољно мали период тако да је  $\frac{T}{RC} \ll 1$  онда се може начинити апроксимација  $\exp\left(\frac{T}{RC}\right) \approx 1 + \frac{T}{RC}$ , одакле се заменом добија резултат  $C_s = \frac{T}{R}$ , ова веза се може записати и у облику  $R = \frac{1}{fC_s}$ . Добијени резултат је принципски значајан, он говори да је могуће помоћу прекидача и кондензатора направити **учестанашћу контролисан отпорник**. У интересаним CMOS колима могуће је реализовати квалитетне прекидаче што ову технику чини применљивом за реализацију програмабилних аналогних кола у интегрисаној техници.

Добре визуелизације овог принципа су припремљене у аплету Falstad Circuit Simulator:

- Принциписко коло са два прекидача који се ручно управљају [линк](#)
- Аутоматски прекидачи, прелазни режим, [линк](#)
- Аутоматски прекидачи, прелазни режим, поређење са  $RC$  колом, [линк](#)