1.[1] Континуалан систем је диференцијалном једначином у облику $a_0 y + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \cdots + a_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} = x$, где су $x = x(t)$ и $y = y(t)$ побуда и одзив тога система, а a_j $(j \in \{1,2,\ldots,n\})$ су познате реалне константе. Одредити (а) одзив система на дате почетне услове $y(0^-), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0^-), \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}(0^-)$. (б) Уколико је побуда дата у неком од облика

(*i*) $x = C\mathrm{e}^{\sigma t}\,\mathrm{u}(t)$, (*ii*) $x = C\mathrm{u}(t)$ (*iii*) $x = C\cos(\omega_0 t)\,\mathrm{u}(t)$, (*iv*) $x = C\sin(\omega_0 t)\,\mathrm{u}(t)$,

где су $C, \sigma, \omega_0 \in \mathbb{R}$, дискутовати и принудни одзив система.

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \cdots + a_n y^{(n)} = x \Rightarrow y = y_h + y_p$$

(I) y_h? $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$ $\quad a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \cdots + a_n y^{(n)} = 0$

- Сваком реалном јединствени корену λ одговара само $\mathrm{e}^{\lambda t}$;
- Сваком реалном k-струком корену λ одговарају $\{\mathrm{e}^{\lambda t}, t\mathrm{e}^{\lambda t}, \ldots, t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\}$;
- Сваком једноструком пару комплексно конјугованих коренова $\underline{\lambda} = \sigma \pm \mathrm{j}\omega$ одговарају $\{\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t), \mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t)\}$;
- Сваком k-strukom пару комплексно конјугованих коренова $\underline{\lambda} = \sigma \pm \mathrm{j}\omega$ одговарају

$$\{\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t), \mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t), t\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t), t\mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t), \ldots, t^{k-1}\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t), t^{k-1}\mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t).\}$$

$$y_h(t) = C_1 y_{h,1}(t) + C_2 y_{h,2}(t) + \cdots + C_n y_{h,n}(t) = \phi(C_1, C_2, \ldots, C_n; t)$$

$$y_h(t=0^-) = y(0^-) \qquad \frac{dy_h}{dt}(t=0^-) = y'(0^-) \;\ldots\; \frac{d^{n-1}y_h}{dt^{n-1}}(0^-) = y^{(n-1)}(0^-)$$

(II) y_p? $\quad P(D)\,y(t) = x(t) = Ce^{\lambda t} \leftarrow y_p(t) = Ke^{\lambda t}$

$$P(D)\,Ke^{\lambda t} = (a_0 + a_1 D + \cdots + a_n D^n)\,Ke^{\lambda t} = a_0 K e^{\lambda t} + a_1 K \lambda e^{\lambda t} + \cdots + a_n K \lambda^n e^{\lambda t}$$

$$= K P(\lambda)\cancel{e^{\lambda t}} = C\cancel{e^{\lambda t}} \Rightarrow \boxed{K = \frac{C}{P(\lambda)}} \qquad \boxed{y_p = \frac{Ce^{\lambda t}}{P(\lambda)}}$$

Ако $P(\lambda) \neq 0$

$\Rightarrow$ Ако је λ 1-ки корен

$$y_p = \frac{C\,t\,e^{\lambda t}}{P'(\lambda)} \;\ldots\; \text{уопштено} \quad \boxed{y_\mathrm{p}(t) = \frac{Ct^{k}\mathrm{e}^{\lambda t}}{P^{(k)}(\lambda)}}.$$

(i) $x = Ce^{\sigma t}u(t) \Rightarrow \boxed{y_p = \frac{Ce^{\sigma t}}{P(\sigma)}u(t)}$

(ii) $x = Cu(t) \Rightarrow x = Ce^{0t}u(t) \Rightarrow y_p = \frac{Ce^{0t}}{P(0)}u(t) = \boxed{\frac{C}{P(0)}u(t)}$

(iii) $x = C\cos(\omega_0 t)\,u(t)$; $\underline{x} = Ce^{j\omega_0 t}u(t) \to \underline{y} = \frac{Ce^{j\omega_0 t}}{P(j\omega_0)} \Rightarrow y = \mathrm{Re}\{\underline{y}\}$

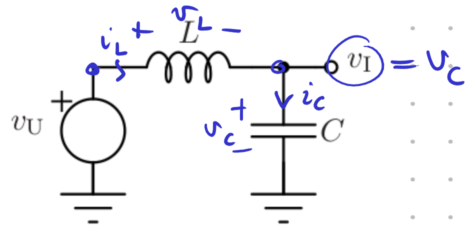
$$P(D)\underline{y} = \underline{x} \Rightarrow P(D)[y_r + jy_i] = [x_r + jx_i] \to P(D)y_r + jP(D)y_i = x_r + jx_i$$

$$\boxed{y_p = \mathrm{Re}\left\{\frac{Ce^{j\omega_0 t}}{P(j\omega_0)}\right\}u(t)}$$

(iv) $x = C\sin(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow \boxed{y_p = \mathrm{Im}\left\{\frac{Ce^{j\omega_0 t}}{P(j\omega_0)}\right\}u(t)}$$

2. У колу са слике познати су $L = 100\,\mu\mathrm{H}$ и $C = 1\,\mu\mathrm{F}$. У почетном тренутку у колу нема акумулисане енергије. Посматра се систем чији је улаз напон побудног генератора $v_\mathrm{U} = v_\mathrm{U}(t)$ а излаз напон у колу $v_\mathrm{I} = v_\mathrm{I}(t)$. Познато је $v_\mathrm{I}(t<0) = 0$ а побуда је у облику $v_\mathrm{U}(t) = V_\mathrm{m}\sin(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$, где је $V_\mathrm{m} = 10\,\mathrm{mV}$. Одредити и скицирати напон на излазу система када је кружна учестаност побудног генератора (а) $\omega = 10^3\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ и (б) $\omega = 10^5\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. За учестаност из тачке б) скицирати и (в) дијаграм снаге коју улаже напонски генератор у колу $p_\mathrm{g} = p_\mathrm{g}(t)$.



$$\boxed{\begin{aligned} i_C &= C\frac{dv_C}{dt} = i_L \\ v_L &= L\frac{di_L}{dt} = v_U - v_C \end{aligned}}$$

$$C\frac{d^2v_C}{dt^2} = \frac{di_L}{dt} \Rightarrow \boxed{LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + v_C = v_U}$$

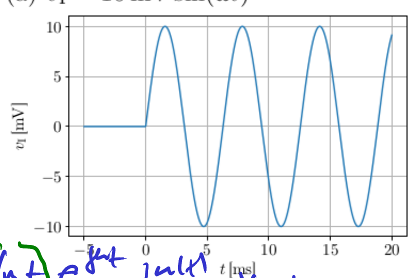
$$P(\lambda) = 1 + \lambda^2 LC = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \pm j\frac{1}{\sqrt{LC}} = \pm j\omega_0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^5\,\frac{rad}{s}$$

(a) $\omega \neq \omega_0$ $\quad v_{I,p} = \mathrm{Im}\left\{\frac{V_m e^{j\omega t}}{P(j\omega)}\right\} = \mathrm{Im}$ $\quad P(j\omega) = 1 + (j\omega)^2 LC = 1 - \omega^2 LC$

$$\Rightarrow v_{I,p} = \mathrm{Im}\left\{\frac{V_m e^{j\omega t}}{1-\omega^2LC}\right\}u(t) = \frac{V_m}{1-\omega^2LC}\sin(\omega t)\,u(t) = \boxed{\frac{V_m}{1-\underbrace{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}_{10^{-4}}}\sin(\omega t)}$$

$$\Rightarrow v_{I,p} \approx V_m \sin(\omega t)$$

(а) $v_\mathrm{I} \approx 10\,\mathrm{mV}\sin(\omega t)$



(б) $\omega = \omega_0$

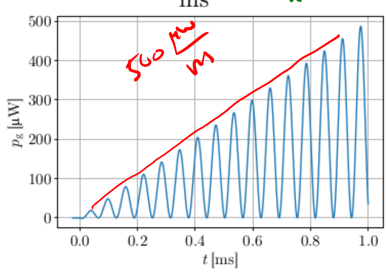
$$v_{I,p} = \mathrm{Im}\left\{\frac{V_m t e^{j\omega t}}{P'(j\omega)}\right\}u(t) = \mathrm{Im}\left\{\frac{V_m t e^{j\omega t}}{j2\omega LC}\right\}u(t) = \frac{V_m t}{2\omega LC}\mathrm{Im}\{\sin(\omega t) - j\cos(\omega t)\}u(t) =$$

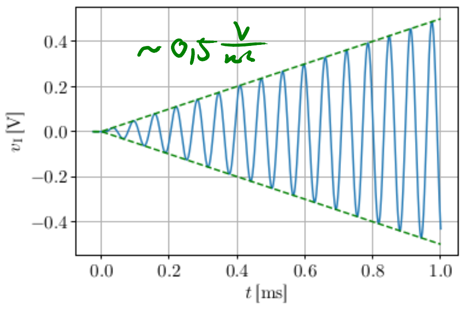
$$P'(\lambda) = 2\lambda LC; \quad P'(j\omega) = j2\omega LC$$

$$\boxed{v_{I,p} = \frac{-V_m t}{2\omega LC}\cos(\omega t)\,u(t)} = -0{,}5\,\frac{V}{ms}\,t\cos(\omega t)$$

(в) $p_g = v_g i_g = v_U \cdot i_C = \ldots$

(в) $p_\mathrm{g} = 250\,\frac{\mu\mathrm{W}}{\mathrm{ms}}\left(t\cos(2\omega t) + t + \cancel{10^{-5}\sin(2\omega t)}\right)$





3. Дати су сигнали $x = x(t)$ који се доводе на улаз система чији је импулсни одзив дат изразом $h = h(t)$. Одредити принудни одзив у случајевима:

(а) $x(t) = \mathrm{u}(t)$, $h(t) = \delta(t-T)$, $T \in \mathbb{R}$

(б) $x(t) = \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t)$, $h(t) = \mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{u}(t)$, где су $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ и $a \neq b$

(в) $x(t) = t^k\,\mathrm{u}(t)$, $h(t) = \mathrm{u}(t)$, где је $k \in \mathbb{Z}$.

(г) $x(t) = u(t) - u(t-T)\,\mathrm{u}(t)$, $h(t) = x(t)$, где је $T \in \mathbb{R}^+$.

$\delta(t) \to \boxed{\quad} \to h(t)$

$x(t) \to \boxed{\quad} \to y(t)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$$

$$O\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} O\{x(\tau)\delta(t-\tau)\}\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,O\{\delta(t-\tau)\}\,d\tau$$

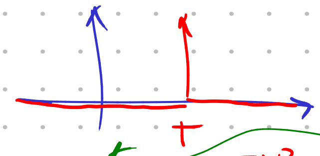
$$O\{\delta(t)\} = h(t) \Rightarrow \quad = h(t-\tau)$$

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau}$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

(a) $u(t) * \delta(t-T) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u(t)}_{u(t-T)}\,\delta(t-\tau-T)\,d\tau = \boxed{u(t-T)}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\tau-T)\,d\tau$ $\quad$ 1

$t - \tau - T = 0 \Rightarrow \tau = t - T$

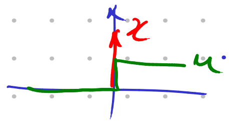


(б) $\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-a\tau}}\,\underbrace{u(\tau)}_{\tau>0}\cdot e^{-b(t-\tau)}\,\underbrace{u(t-\tau)}_{t-\tau>0}\,d\tau = \dfrac{\left(e^{at}-e^{bt}\right)e^{-t(a+b)}}{a-b}\,u(t)$

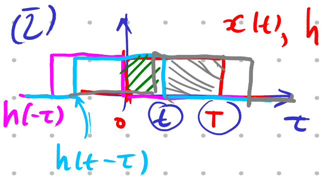
$\tau<t$

(в) $\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\tau^k u(\tau)}_{x(\tau)}\cdot \underbrace{u(t-\tau)}_{h(t-\tau)}\,d\tau = \int_0^t \tau^k\,d\tau = \boxed{\dfrac{t^{k+1}}{k+1}\,u(t)}$

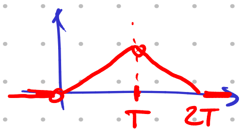
$\tau>0$, $\tau<t$



(г) $x(t),\ h(t)$



$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$



$y(t) = \mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}-1\right)$

4. *LTI* системи дати су диференцијалним једначинама
(i) $(\mathrm{D}+1)(\mathrm{D}^2+2\mathrm{D}+2)y = x$ (ii) $(\mathrm{D}+1)(\mathrm{D}^2+2\mathrm{D}+2)y = \mathrm{D}x$
где су $x = x(t)$ и $y = y(t)$ улаз и излаз тих система редом. Одредити (а) импулсне одзиве и (б) испитати стабилност ових система.

-1, $-1\pm j$

(i) $\underbrace{(D+1)(D^2+2D+2)}_{P(D)}y = x = \delta(t)$

1° $t>0 \Rightarrow \delta(t=0)$

$(D+1)(D^2+2D+2)y = 0$

$y = C_1 e^{-1\cdot t} + C_2 e^{-t}\cos(t) + C_3 e^{-t}\sin(t)$

3° $t\approx 0$ $\delta, \cancel{\delta}$ $\delta, \cancel{\delta}$

$a_0 y + a_1 y' + \dots + y^{(n-1)} + a_n y^{(n)} = \delta$ $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}$

2° $t<0$ $y=0,\ y'=0,\ \dots,\ y^{(n)}=0$

$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (\cancel{a_0 y} + \dots + a_n y^{(n)})\,dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)\,dt$

$a_n y^{(n-1)}(0^+) - \cancel{a_n y^{(n-1)}(0^-)} = 1 \Rightarrow \boxed{y^{(n-1)}(0^+) = \frac{1}{a_n}}$

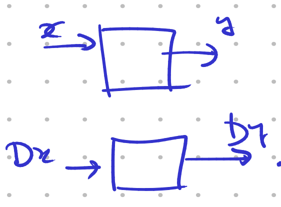
$y(0)=0$ $y'(0^+)=0$ $y''(0^+)=0$ осим!

$P(D) = 1D^3 + 3D^2 + 4D + 2$

$h''(0^+) = 1$
$h'(0^+) = 0$
$h(0^+) = 0$

$\boxed{h^{(i)}(t) = e^{-t}(1-\cos t)\,u(t)}$

(ii)



$h^{(ii)} = D\,h^{(i)} = \left(\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-1\right)e^{-t}\,u(t)$

(б) $h(t)$; $|y| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau\right| < \int_{-\infty}^{\infty} B_x|h(t-\tau)|\,d\tau = B_x\int_{-\infty}^{\infty}|h(t-\tau)|\,d\tau$

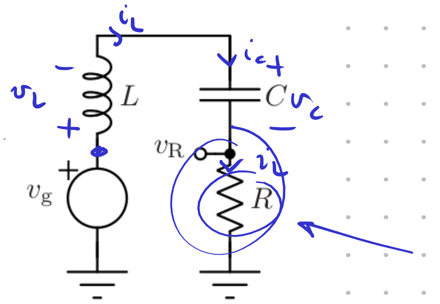
$|x(t)|<B_x \Rightarrow |y(t)|<B_y$

$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\,dt<\infty}$

$h(t) \longrightarrow e^{\lambda t},\ t^k e^{\lambda t},\ t^k e^{\sigma t}\sin(\omega t)\dots \Rightarrow$ Ако су сви коренови λ полинома $P(\lambda)$ такви да је $\mathrm{Re}\{\lambda\}<0$ онда је систем стабилан!

(б) Стабилни!

5. У колу са слике познато је $C = 4\,\mathrm{pF}$, $R = 100\,\Omega$ и $L = 10\,\mathrm{nH}$. Посматра се систем чији је улаз емс побудног напонског генератора $v_g = v_g(t)$ а излаз напон отпорника $v_R = v_R(t)$. Одредити (а) импулсни одзив овог система. На основу резултата претходне тачке одредити и (б) одскочни одзив система. Одредити и (в) одзив на побуду $v_g = V_0\,e^{\sigma t}\,u(t)$, где су $\sigma = -5\times 10^9\,\mathrm{s}^{-1}$ и $V_0 = 1\,\mathrm{mV}$.



$$\cancel{v_L} = L\frac{di_L}{dt} = v_g - v_C - i_L R$$

$$\cancel{i_C} = C\frac{dv_C}{dt} = i_L$$

$$L\frac{d^2 i_L}{dt^2} = \frac{dv_g}{dt} - \frac{dv_C}{dt} - R\frac{di_L}{dt}$$

$$h = C\frac{dh_1}{dt}$$

$$\Rightarrow L\frac{d^2 i_L}{dt^2} = \frac{dv_g}{dt} - \frac{1}{C}i_L - R\frac{di_L}{dt} \quad \cdot C$$

$$\boxed{i_L + RC\frac{di_L}{dt} + LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} = C\frac{dv_g}{dt}}$$

$$\boxed{i_L + RC\frac{di_L}{dt} + LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} = x(t)} \rightarrow h_1(t)$$

$$P(\lambda) = 1 + RC\lambda + LC\lambda^2 \Rightarrow \boxed{\lambda = -5\times 10^9\ \mathrm{s}^{-1}}$$

$$h_1'(0^+) = \frac{1}{a_2} = \frac{1}{LC}$$

$$h_1(0^+) = 0$$

$$h(t) = K_1 e^{\lambda t} + K_2 t e^{\lambda t} = (K_1 + K_2 t)e^{\lambda t}$$

$$h_1(t) = \frac{t e^{\lambda t}}{LC} \Rightarrow \boxed{h = C\frac{dh_1}{dt} = \frac{(\lambda t + 1)\,e^{\lambda t}}{L}u(t)}$$

u

$$s(t) = \int_0^t h(t)\,dt = \frac{t e^{\lambda t}}{L}u(t)$$

$$\boxed{h_{v_R} = R\cdot h}$$

$$v_{I,p}(t) = \left(\frac{RV_0\lambda t^2 e^{\lambda t}}{2L} + \frac{RV_0 t e^{\lambda t}}{L}\right)u(t)$$