Сигнали и системи (13Е042СИС)
Вежбе (IV) – **Корекције**

25. март 2021.

3 Линеарни временски инваријантни (*LTI*) системи

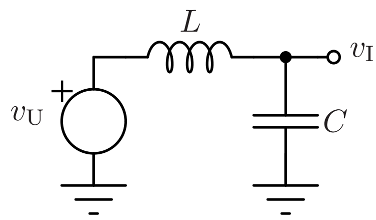
Задаци

1.[1] Континуалан систем је диференцијалном једначином у облику $a_0 y + a_1 \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_2 \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \cdots + a_n \dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} = x$, где су $x = x(t)$ и $y = y(t)$ побуда и одзив тога система, а a_j ($j \in \{1,2,\ldots,n\}$) су познате реалне константе. Одредити (а) одзив система на дате почетне услове $y(0^-)$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0^-), \ldots, \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}(0^-)$. (б) Уколико је побуда дата у неком од облика

(*i*) $x = C\mathrm{e}^{\sigma t}\,\mathrm{u}(t)$, (*ii*) $x = C\mathrm{u}(t)$ (*iii*) $x = C\cos(\omega_0 t)\,\mathrm{u}(t)$, (*iv*) $x = C\sin(\omega_0 t)\,\mathrm{u}(t)$,

где су $C, \sigma, \omega_0 \in \mathbb{R}$, дискутовати и **устаљени одзив** система.

2. У колу са слике познати су $L = 100\,\mu\mathrm{H}$ и $C = 1\,\mu\mathrm{F}$. У почетном тренутку у колу нема акумулисане енергије. Посматра се систем чији је улаз напон побудног генератора $v_\mathrm{U} = v_\mathrm{U}(t)$ а излаз напон у колу $v_\mathrm{I} = v_\mathrm{I}(t)$. Познато је $v_\mathrm{I}(t < 0) = 0$ а побуда је у облику $v_\mathrm{U}(t) = V_\mathrm{m}\sin(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$, где је $V_\mathrm{m} = 10\,\mathrm{mV}$. Одредити и скицирати напон на излазу система када је кружна учестаност побудног генератора (а) $\omega = 10^3\,\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ и (б) $\omega = 10^5\,\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. За учестаност из тачке б) скицирати и (в) дијаграм снаге коју улаже напонски генератор у колу $p_\mathrm{g} = p_\mathrm{g}(t)$.



3. Дати су сигнали $x = x(t)$ који се доводе на улаз система чији је импулсни одзив дат изразом $h = h(t)$. Одредити одзив на побуду у случајевима:

(а) $x(t) = \mathrm{u}(t)$, $h(t) = \delta(t - T)$, $T \in \mathbb{R}$

(б) $x(t) = \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t)$, $h(t) = \mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{u}(t)$, где су $a,b \in \mathbb{R}_0^+$ и $a \neq b$

(в) $x(t) = t^k\,\mathrm{u}(t)$, $h(t) = \mathrm{u}(t)$, где је $k \in \mathbb{Z}$.

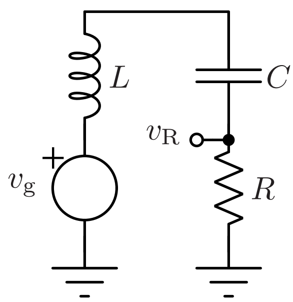
(г) $x(t) = u(t) - u(t - T)\,\mathrm{u}(t)$, $h(t) = x(t)$, где је $T \in \mathbb{R}^+$.

4. *LTI* системи дати су диференцијалним једначинама

(*i*) $(\mathrm{D}+1)(\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D} + 2)y = x$ (*ii*) $(\mathrm{D}+1)(\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D} + 2)y = \mathrm{D}x$

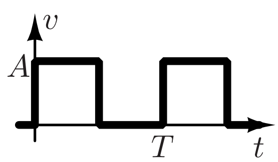
где су $x = x(t)$ и $y = y(t)$ улаз и излаз тих система редом. Одредити (а) импулсне одзиве и (б) испитати стабилност ових система.

5. У колу са слике познато је $C = 4\,\mathrm{pF}$, $R = 100\,\Omega$ и $L = 10\,\mathrm{nH}$. Посматра се систем чији је улаз емс побудног напонског генератора $v_\mathrm{g} = v_\mathrm{g}(t)$ а излаз напон отпорника $v_\mathrm{R} = v_\mathrm{R}(t)$. Одредити (а) импулсни одзив овог система. На основу резултата претходне тачке одредити и (б) одскочни одзив система. Одредити и (в) одзив на побуду $v_\mathrm{g} = V_0\,\mathrm{e}^{\sigma t}\,\mathrm{u}(t)$, где су $\sigma = -5 \times 10^9\,\mathrm{s}^{-1}$, $V_0 = 1\,\mathrm{mV}$.



6. Полазећи од дефиниције конволуције два континуална сигнала, $x = x(t)$ и $y = y(t)$, доказати да је $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(x * y)\,\mathrm{d}t = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} y\,\mathrm{d}t\right)$, под условом да оба интеграла са десне стране конвергирају.

7. За периодичне сигнале са основним периодом T може се дефинисати операција *периодичне конволуције* као $x \circledast y = \displaystyle\int_0^T x(\tau)y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Периодична поворка униполарних правоугаоних импулса $v = v(t)$ приказана је на слици. Одредити $v \circledast v$.



[1] Видети и задатке 2.41, 2.42, 2.43, 2.44, 2.49 из референтне збирке задатака.

Таблица за колоквијум и испит

Конволуција континуалних сигнала.

$x(t)$	$y(t)$	$x * y(t)$
$\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{u}(\mathrm{t})$	$\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{u}(\mathrm{t})$	$\frac{1}{2} t\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{u}(t)$
$t^N\,\mathrm{u}(t)$	$\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{u}(t)$	$\left(\frac{N!\mathrm{e}^{\lambda t}}{\lambda^{N+1}} - \sum_{k=0}^{N} \frac{N! t^{N-k}}{\lambda^{k+1}(N-k)!}\right)\mathrm{u}(t)$
$t^M\,\mathrm{u}(t)$	$t^N\,\mathrm{u}(t)$	$\frac{M!N!}{(N+M+1)!} t^{N+M+1}\,\mathrm{u}(t)$
$t\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\,\mathrm{u}(t)$	$\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\,\mathrm{u}(t)$	$\frac{\mathrm{e}^{\lambda_2 t} - \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + (\lambda_1 - \lambda_2) t\mathrm{e}^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}\,\mathrm{u}(t)$
$t^M\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{u}(t)$	$t^N\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{u}(t)$	$\frac{M!N!}{(N+M+1)!} t^{N+M+1}\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{u}(t)$
$\mathrm{e}^{-\sigma t}\cos(\omega t + \theta)\,\mathrm{u}(t)$	$\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{u}(t)$	$\frac{\cos(\theta - \phi)\mathrm{e}^{\lambda t} - \mathrm{e}^{-\sigma t}\cos(\omega t + \theta - \phi)}{\sqrt{\omega^2 + (\sigma + \lambda)^2}}\,\mathrm{u}(t)$ где је $\phi = \arg((\sigma + \lambda) + \mathrm{j}\omega)$

При чему су: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \omega, \theta, \sigma \in \mathbb{R}$; $\lambda_1 \neq \lambda_2$; $\mathrm{e} \approx 2{,}71\ldots$ је основа природног логаритма; $M, N \in \mathbb{N}$

Решења

1. Опште решње је збир хомогеног и партикуларног дела $y = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p}$.

(а) Хомогени део~~, одзив на почетне услове,~~ се одређује на основу корена карактеристичног полинома диференцијалне једначине система $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$ **и описује прелазни режим (енг. *Transient*)**. У зависности од структуре скупа коренова овог полинома налазе се појединачна партикуларна решења хомогеног дела као:

- Сваком реалном јединствени корену λ одговара само $\mathrm{e}^{\lambda t}$;
- Сваком реалном k-струком корену λ одговарају $\{\mathrm{e}^{\lambda t}, t\mathrm{e}^{\lambda t}, \ldots, t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\}$;
- Сваком једноструком пару комплексно конјугованих коренова $\underline{\lambda} = \sigma \pm \mathrm{j}\omega$ одговарају $\{\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t), \mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t)\}$;
- Сваком k-strukom пару комплексно конјугованих коренова $\underline{\lambda} = \sigma \pm \mathrm{j}\omega$ одговарају

$$\{\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t), \mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t), t\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t), t\mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t), \ldots, t^{k-1}\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t), t^{k-1}\mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t).\}$$

Хомогени део налази се као линеарна комбинација ових решења која је одређена са n коефицијената. Коефицијенти се одређују на основу задатих почетних услова. Уколико су сви почетни услови равни нули, нпр. уколико нема енергије у колу, онда сопствени одзив система није побуђен и раван је нули

(б) Партикуларни део, **устаљени простопериодичан режим за периодичну побуду или константну компоненту за константну побуду**, се одређује разним методама. У случају експоненцијалне побуде $x(t) = C\mathrm{e}^{at}$, где a није корен $P(\lambda)$, се показује да је партикуларно решење $\boxed{y_\mathrm{p}(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{at}}{P(a)}}$. Уколико је a једноструки корен корен $P(\lambda)$ онда је партикуларно решење $\boxed{y_\mathrm{p}(t) = \dfrac{t\mathrm{e}^{at}}{P'(a)}}$. Уопштено, уколико је a k-тоструки корен $P(\lambda)$ онда је партикуларно решење $\boxed{y_\mathrm{p}(t) = \dfrac{t^k\mathrm{e}^{at}}{P^{(k)}(a)}}$.

Доказ опште форме овог правила излази ван оквира овог курса, али се може пронаћи, на пример, на *MIT* курсу *Differential Equations 18.03* који је слободно доступан на линку:
`https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-03sc-differential-equations-fall-2011/index.htm`
Полазећи од почетне странице треба ићи: *Unit II: Second Order Constant Coefficient Linear Equations* → *Linear Operators (Linear Time Invariance)* → *Proof of the Generalized Exponential Response Formula (PDF)*

У следећим тачкама је претпостављено да одговарајући чланови нису корени карактеристичног полинома. У случају да јесу, закључак се слично изводи.

(*i*) Партикуларни део за експоненцијалну побуду је непосредно дат изразима из претходне тачке. Односно, $y_\mathrm{p} = \dfrac{C\mathrm{e}^{\sigma t}}{P(\sigma)}\mathrm{u}(t)$

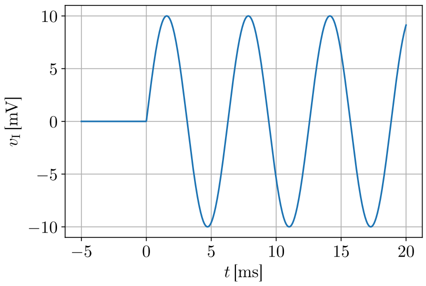
(*ii*) Pobuda $x(t) = C\mathrm{u}(t)$ se može predstaviti i kao $x(t) = C\mathrm{e}^{0t}\mathrm{u}(t)$ tako da je $y_\mathrm{p} = \dfrac{C}{P(0)}\mathrm{u}(t)$.

(*iii*) Одзив се може тражити на основу $x(t) = \mathbb{Re}\{C\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$. На основу линеарности је $y_\mathrm{p} = \mathbb{Re}\left\{\dfrac{C\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{P(\mathrm{j}\omega)}\right\}\mathrm{u}(t)$.

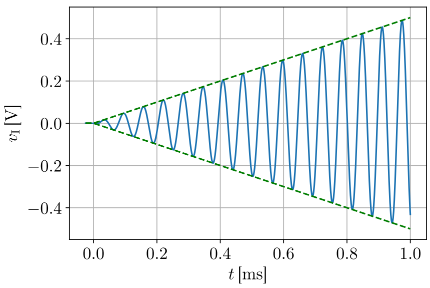
(*iv*) Одзив се може тражити на основу $x(t) = \mathbb{Im}\{C\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$. На основу линеарности је $y_\mathrm{p} = \mathbb{Im}\left\{\dfrac{C\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{P(\mathrm{j}\omega)}\right\}\mathrm{u}(t)$.

2.

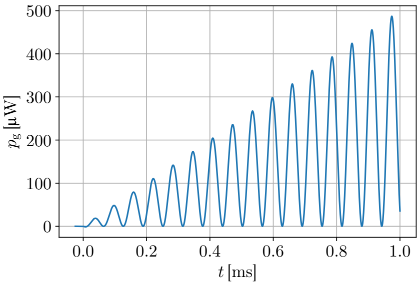
(а) $v_\mathrm{I} \approx 10\,\mathrm{mV}\sin(\omega t)$



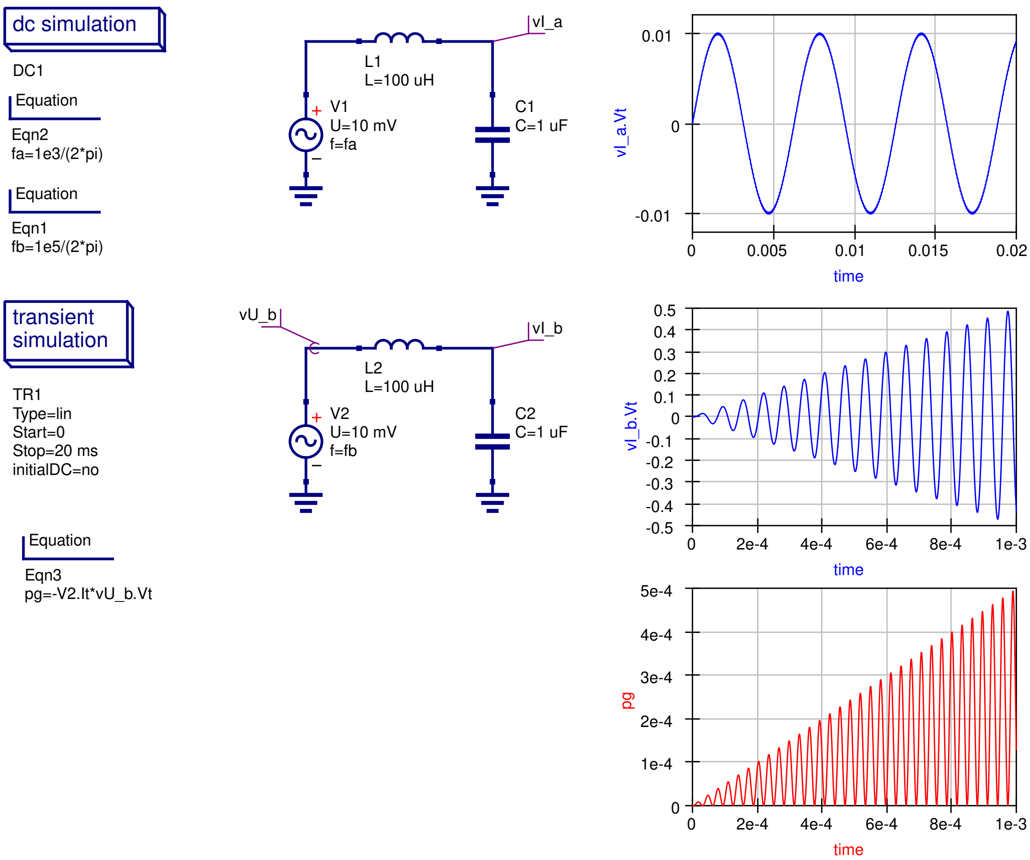
(б) $v_\mathrm{I} = -0{,}5\,\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{ms}}t\cos(\omega t)$



(в) $p_{\mathrm{g}} = 250\,\dfrac{\mu\mathrm{W}}{\mathrm{ms}}\left(t\cos(2\omega t) + t + 10^{-5}\sin(2\omega t)\right)$



На слици су приказани и резултати добијени симулатором *QUCS*.

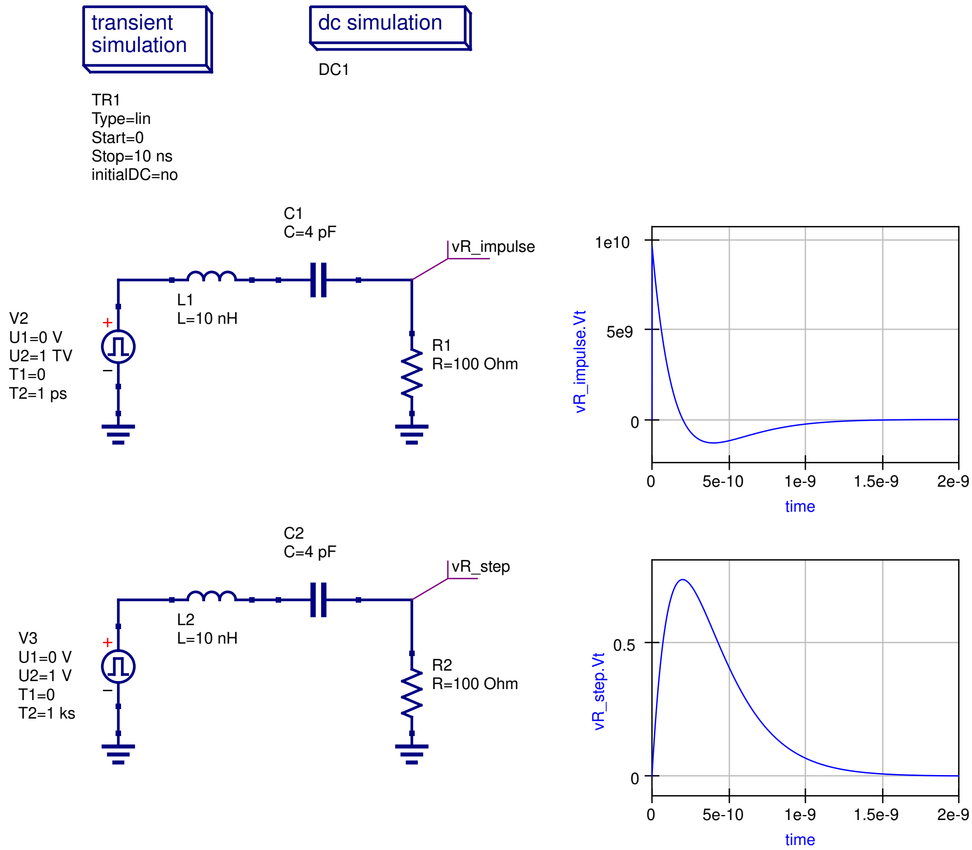


3. (а) $y_{\mathrm{p}}(t) = \mathrm{u}(t-T)$, (б) $y_{\mathrm{p}}(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-bt} - \mathrm{e}^{-at}}{a-b}\,\mathrm{u}(t)$, (в) $y_{\mathrm{p}}(t) = \dfrac{t^{k+1}}{k+1}\,\mathrm{u}(t)$ (г) $y_{\mathrm{p}}(t) = \mathrm{tri}\left(\dfrac{t}{T} - 1\right)$

4. (а) $h^{(i)}(t) = \mathrm{e}^{-t}\,(1 - \cos(t))\,\mathrm{u}(t)$, $h^{(ii)}(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(\sqrt{2}\sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1\right)\mathrm{u}(t)$ (б) Оба система су стабилна.

5. (а) $h_{\mathrm{g}}(t) = \dfrac{R}{L}(1+\lambda t)\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{u}(t)$, (б) $s_{\mathrm{g}}(t) = \dfrac{R}{L}t\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{u}(t)$, где је $\lambda = -5\times 10^{9}\,\mathrm{s}^{-1}$ (в) $v_{\mathrm{I,p}}(t) = \left(\dfrac{V_0 R\lambda t^2 \mathrm{e}^{\lambda t}}{2L} + \dfrac{V_0 R t\mathrm{e}^{\lambda t}}{L}\right)\mathrm{u}\,(t)$

На слици су приказани и резултати за импулсни и одскочни одзив добијени симулатором *QUCS* за побудни импулс $v_\mathrm{g}^{(1)} = 1\,\mathrm{Wb}\,\delta(t)$ и побудни одскочни сигнал $v_\mathrm{g}^{(2)} = 1\,\mathrm{V}\,\mathrm{u}(t)$. Посебно, приметити начин на који је реализован делта импулс као правоугаони импулс веома кратког трајања од $T = 1\,\mathrm{ps}$ и амплитуде $V_\delta = 1\,\mathrm{TV} = 10^{12}\,\mathrm{V}$.



6. $$\int_{t=-\infty}^{\infty}\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = \int_{\tau=-\infty}^{\infty}\int_{t=-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} y\,\mathrm{d}t\right)$$

7. $$v \circledast v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{tri}\left(\frac{2(t-kT)}{T} - 1\right).$$