4 Линеарни временски инваријантни (*LTI*) системи

Опште решење диференцијалне једначине

$$a_0 y + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \cdots + a_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} = x \tag{1}$$

која описује *LTI* систем састоји се из хомогеног и партикуларног дела, $y = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p}$, редом. На часу (вежбе, 24.03.2021.) је погрешно речено да хомогени део представља искључиво одзив на почетне услове а да партикуларни део представља искључиво принудни одзив. У конкретном случају када се посматра стабилни систем, хомогени део има физичко тумачење **прелазног** одзива (прелазног режима) система (енг. *Transient response*) а партикуларни део **устаљеног** одзива система (енг. *Steady state response*) под условом да је тај систем стабилан – простопериодичан у случају простопериодичне побуде или константна компонента у случају константне побуде.

Тачно је да се *одзив на почетне услове* (сопствени одзив) може добити заменом одговарајућих коефицијената у хомогени део на начин који је показан на часу, на основу преиницијалних почетних услова (у тренутку $t = 0^-$).

Принудни одзив система, **може да садржи и хомогени и партикуларни део**, односно, улаз система може побудти и хомогени део одзива. У том случају, комплетан одзив се може одредити или одређивањем коефицијената у хомогеном делу на основу постиницијалних услова (у тренутку $t = 0^+$). Принудни одзив се може потражити и применом конволуције, на начин који је показан на часу. Овај приступ, чак и за најједноставније случајеве, често води до сложених интеграла који су „незгодни“ за ручно решавање. Овај проблем се донекле може ублажити применом таблица унапред срачунатих конволуција што овај метод ипак чини и практично употребљивим (за потребе колоквијума и испита).

У наредним примерима примеру илуструје се ова терминологија и коректан поступак.

Пример 1. Континуалан *LTI* систем дат је диференцијалном једначином у облику $(\mathrm{D}+1)(\mathrm{D}+3)y = x$, где су $x = x(t)$ и $y = y(t)$ улаз и излаз тога система редом. Познати су преиницијални почетни услови $y(0^-) = 2$ и $y'(0^-) = 4$. Побуда је каузална, облика $x = \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{u}(t)$. Одредити (а) сопствени одзив система, (б) одзив на побуду и (г) комплетан одзив.

Решење. Карактеристични полином дате диференцијалне једначине је $P(\mathrm{D}) = (\mathrm{D}+1)(\mathrm{D}+3)$ који има два различита реална корена $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -3$. Хомогени део је онда у облику $y_\mathrm{h} = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-3t}$ а партикуларни део за експоненцијалну побуду је одређен поступком са часа као: $y_\mathrm{p} = \dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{P(-2)} = -\mathrm{e}^{-2t}$.

(а) Сопствени одзив налази се налажењем одговарајућих коефицијената хомогеног решења који задовољавају дате почетне услове. Добија се систем једначина:

$$y_\mathrm{s}(t) = C_{1\mathrm{s}}\mathrm{e}^{-t} + C_{2\mathrm{s}}\mathrm{e}^{-3t} \Rightarrow \quad 2 = C_{1\mathrm{s}} + C_{2\mathrm{s}} \tag{2}$$

$$y_\mathrm{s}'(t) = -C_{1\mathrm{s}}\mathrm{e}^{-t} - 3C_{2\mathrm{s}}\mathrm{e}^{-3t} \Rightarrow \quad 4 = -C_{1\mathrm{s}} - 3C_{\mathrm{s}2}. \tag{3}$$

Решавањем добијеног система једначина добијају се потребни коефицијенти, $C_{1\mathrm{s}} = 5$ и $C_{2\mathrm{s}} = -3$, на основу чега је

$$\boxed{y_\mathrm{s}(t) = \left(5\mathrm{e}^{-t} - 3\mathrm{e}^{-3t}\right)\mathrm{u}(t)} \tag{4}$$

(б) Одзив на побуду тражи се одређивањем коефицијената у општем решењу са анулираним преиницијалним условима, помоћу постиницијалних услова. Пошто са десне стране диференцијалне једначине нема Диракових импуса, одзив и сви његови изводи су непрекидни у нули. На основу тога су преиницијални услови једнаки постиницијалним условима па је $y(0^+) = y'(0^+) = 0$. Опште решење је $y_\mathrm{r} = C_{1\mathrm{r}}\mathrm{e}^{-t} + C_{2\mathrm{r}}\mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-2t}$ на основу чега се има:

$$y_r(0^+) = 0 = C_{1\mathrm{r}} + C_{2\mathrm{r}} - 1 \tag{5}$$

$$y_r'(0^+) = 0 = -C_{1\mathrm{r}} - 3C_{2\mathrm{r}} + 2. \tag{6}$$

Решавањем добијеног система једначина добијају се потребни коефицијенти, $C_{1\mathrm{r}} = C_{2\mathrm{r}} = \dfrac{1}{2}$, на основу чега је одзив на побуду

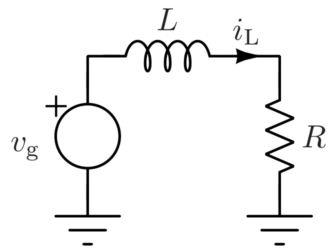
$$\boxed{y_\mathrm{r} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-2t}\right)\mathrm{u}(t)} \tag{7}$$

(в) Укупан одзив на основу суперпозиције налази се као збир сопственог и принудног одзива:

$$\boxed{y = \left(\frac{11}{2}\mathrm{e}^{-t} - \frac{5}{2}{}^{-3t} - \mathrm{e}^{-2t}\right)\,\mathrm{u}(t)} \tag{8}$$

■

Пример 2. У колу са слике познато је $L = 1\,\mathrm{mH}$ и $R = 50\,\Omega$. У почетном тренутку струја калема је $i_L(0^-) = 0{,}5\,\mathrm{mA}$. Напон побудног генератора је облика $v_\mathrm{g}(t) = V_\mathrm{m}\sin(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$, где су $V_\mathrm{m} = 1\,\mathrm{V}$ и $\omega = 10^6\,\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Као одзив се посматра струја калема на отпорнику $i_L = i_L(t)$. Одредити (а) одзив на почетне услове, (б) одзив на побуду, (в) комплетан одзив и (г) устаљени одзив.



Решење. Диференцијална једначина која описује систем је

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + Ri_L = v_\mathrm{g}. \tag{9}$$

Њој одговара карактеристични полином $P(\lambda) = R + L\lambda$ који има само један реалан корен $\lambda_0 = -\dfrac{R}{L} = -5 \times 10^4\,\mathrm{s}^{-1}$. Хомогени део решења ове диференцијалне једначине је стога $i_{L,\mathrm{h}}(t) = I_0\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$, где је I_0 произвољна константа. Партикуларни део се може одредити помоћу поступка показаног за експоненцијалну побуду ($\lambda_0 \neq \omega$),

$$i_{L,\mathrm{p}} = \mathbb{Im}\left\{\frac{V_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{P(\mathrm{j}\omega)}\right\} = \mathbb{Im}\left\{\frac{V_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{R + \mathrm{j}\omega L}\right\} = V_\mathrm{m}\frac{R\sin(\omega t) - \omega L\cos(\omega t)}{R^2 + (\omega L)^2}. \tag{10}$$

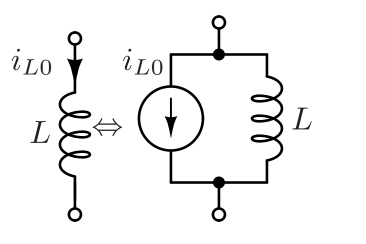
Коначно, опште решење за струју калема је

$$\boxed{i_L(t) = \underbrace{I_0\mathrm{e}^{\lambda_0 t}}_{\text{Хомогени део}} + \underbrace{V_\mathrm{m}\frac{R\sin(\omega t) - \omega L\cos(\omega t)}{R^2 + (\omega L)^2}}_{\text{Партикуларни део}}}.$$

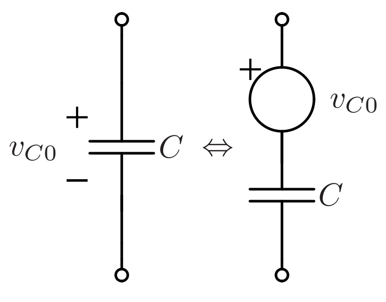
(а) Одзив на почетне услове налази се само на основу хомогеног дела, помоћу почетних услова. Добија се

$$i_{L1}(t) = I_{01}\mathrm{e}^{\lambda_0 t} \Rightarrow i_{L1}(0^-) = I_{01}\mathrm{e}^{\lambda_0\cdot 0} \Rightarrow \boxed{I_{01} = 0{,}5\,\mathrm{mA}}.$$

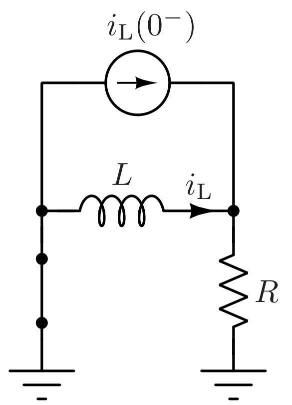
Тако да је одзив на почетне услве $i_{L1}(t) = 0{,}5\,\mathrm{mA}\,\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$. Сопствени одзив електричног кола може се потражити и применом одговарајућих заменских шема за почетне услове калемова и кондензатора, приказане на сликама 1а и 1б при чему се анулирају сви независни генератори. На слици 1в приказана је одговарајућа заменска шема за коло из примера. Са слике се види да је еквивалентна представа струјни генератор струје $i_L(0^-)$ који оптерећује паралелну везу калема и отпорника.



(а) Заменска шема за почетни услов калема.

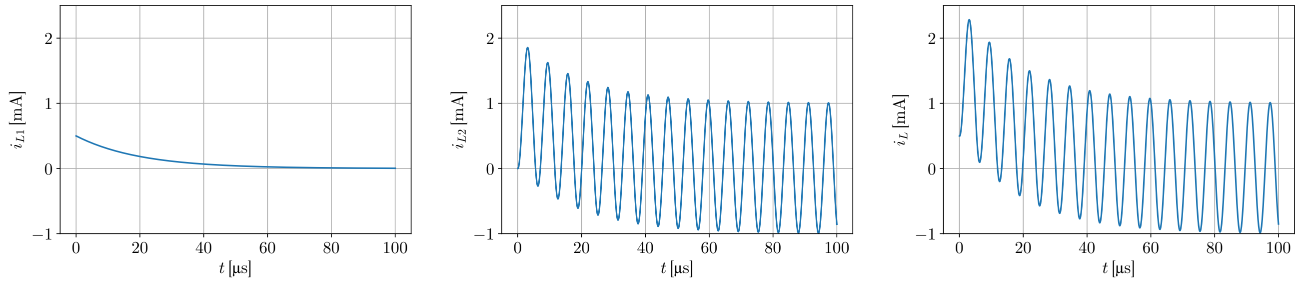


(б) Заменска шема за почетни услов кондензатора.



(в) Уз пример.

Слика 1: Заменске шеме и тражење сопственог одзива.



(а) Одзив на почетне услове. (б) Одзив на побуду. (в) Комплетан одзив

Слика 2: Временски дијаграми појединачних одзива

(б) Одзив на побуду, одређује се заменом постиницијалних почетних услова у опште решење диференцијалне једначине. Приликом тражења одзива на побуду претпоставља се да су сви преиницијални услови равни нули. Додатно, уколико у десној страни нема Диракових импулса онда су све функције $i_L, i'_L, i''_L, \ldots, i_L^{(n-1)}$ непрекидне (видети и предавања), па су стога и постиницијални услови равни нули. У том облику тражи се **другачија** константа за хомогени део.

$$\underbrace{i_{L2}(0^+) = 0}_{\text{Постиницијални услов}} = \underbrace{I_{02}\mathrm{e}^{\lambda_0 \cdot 0}}_{\text{Хомогени део}} \underbrace{+ V_\mathrm{m} \frac{R\sin(\omega \cdot 0) - \omega L\cos(\omega \cdot 0)}{R^2 + (\omega L)^2}}_{\text{Партикуларни део}} = I_{02} + \frac{\omega L V_\mathrm{m}}{R^2 + (\omega L)^2} \Rightarrow \boxed{I_{02} \approx 1\,\mathrm{mA}}$$

Тако да је одзив побуду: $i_{L2}(t) \approx 1\,\mathrm{mA}\,\mathrm{e}^{\lambda_0 t} + 50\,\mathrm{\mu A}\ \sin(\omega t) - 1\,\mathrm{mA}\ \cos(\omega t)$.

(в) На основу суперпозиције, комплетан одзив добија се сабирањем одзива на почетне услове и одзива на побуду. Коначан резултат је валидан од тренутка $t = 0$ услед чега се дописује одскочна функција. Коначно је комплетан одзив:

$$\boxed{i_L(t) \approx \left(1{,}5\,\mathrm{mA}\,\mathrm{e}^{\lambda_0 t} + 50\,\mathrm{\mu A}\ \sin(\omega t) - 1\,\mathrm{mA}\ \cos(\omega t)\right)\mathrm{u}(t)}$$

Приметимо да у овом изразу постоји члан добијен из хомогеног дела који је побуђен напонским генератором.

(г) Након довољно дугог времена чланови хомогеног дела који представљају прелазни режим ишчезавају будући да је $e^{\lambda_0 t} \to 0$ јер је $\lambda_0 < 0$, након чега преостаје устаљени одзив

$$\boxed{i_{L,\mathrm{ss}}(t) \approx 50\,\mathrm{\mu A}\ \sin(\omega t) - 1\,\mathrm{mA}\ \cos(\omega t).} \tag{11}$$

Добијени резултати су нацртани на дијаграмима на слици 2.

■

Примедба. Одзив на побуду се може потражити и помоћу конволуције. Импулсни одзив за диференцијалну једначину (9) је $h_L(t) = \dfrac{1}{L}\exp(\lambda_0 t)\,\mathrm{u}(t)$. Конволуцијом се онда има:

$$i_{L2}(t) = v_\mathrm{g}(t) * h(t) = V_\mathrm{m}\sin(\omega t)\,\mathrm{u}(t) * \frac{1}{L}\mathrm{e}^{\lambda_0 t}\,\mathrm{u}(t) = \frac{V_\mathrm{m}}{L}\left(\sin(\omega t)\,\mathrm{u}(t) * \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\,\mathrm{u}(t)\right) \tag{12}$$

$$= \frac{V_\mathrm{m}}{L}\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda\tau}\sin(\omega(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau \tag{13}$$

$$= \frac{\omega L V_\mathrm{m}}{R^2 + (\omega L)^2}\mathrm{e}^{\lambda_0 t} - \frac{\omega L V_\mathrm{m}}{R^2 + (\omega L)^2}\cos(\omega t) + \frac{R V_\mathrm{m}}{R^2 + (\omega L)^2}\sin(\omega t) \tag{14}$$

што је исти резултат добијен у тачки (б) примера. Конволуциони интеграл из (13) се може решити и свођењем на конволуциони пар из таблице конволуција:

$x(t)$	$y(t)$	$x * y(t)$
$\mathrm{e}^{-\sigma t}\cos(\omega t + \theta)\,\mathrm{u}(t)$	$\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{\cos(\theta - \phi)\mathrm{e}^{\lambda t} - \mathrm{e}^{-\sigma t}\cos(\omega t + \theta - \phi)}{\sqrt{\omega^2 + (\sigma + \lambda)^2}}\,\mathrm{u}(t)$ где је $\phi = \arg((\sigma + \lambda) + \mathrm{j}\omega)$

за одабир параметара $\sigma = 0$, $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$, $\phi = \lambda_0 + j\omega$, одакле се добија еквивалентан облик

$$i_{L2}(t) = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} e^{\lambda_0 t} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}\right)$$