 17. март 2021.

3 Дискретни сигнали, континуални и дискретни системи

Задаци

1. Нацртати следеће дискретне сигнале $x = x[n]$:

(а) $x[n] = \mathrm{u}[n] - 2\mathrm{u}[n-4]$, и $y[n] = x[n] - x[n-1]$;

(б) $n^2(\delta[n+2] - 2\delta[n-2])$, и $\sum\limits_{k=-\infty}^{n} x[k]$

(в) $x[n] = (1-n)(\mathrm{u}[n+2] - \mathrm{u}[n-3])$

(г) $x[n] = \cos\dfrac{\pi n}{N}\left(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]\right)\mathrm{u}[n]$, за $N = 3$;

где су $\mathrm{u}[n]$ и $\delta[n]$ дискретни јединични низ и дискретни јединични импулс редом.

2. Реална дискретна синусоида дефинисана је у облику $x[n] = A\cos(\Omega_0 n + \phi)$, где је $A \geq 0$, $|\Omega_0| \leq \pi$ и $|\phi| < \pi$. Ако дата секвенца

(а) $\{0,1,0,-1\}$;

(б) $\{0,1,1,0,-1,-1\}$;

(в) $\{1,0,-1,\sqrt{2},-1,0,1,\sqrt{2}\}$

представља основни период ове синусоиде, при чему је први члан $x[0]$, одредити параметре A, Ω_0 и ϕ.

3.[1] За следеће системе испитати да ли су стабилни у *BIBO* смислу, линеарни, временски инваријантни, са меморијом и каузални:

(а) $y[n] = \sum\limits_{k=N_0}^{n} x[k]$,

(б) $y[n] = \sqrt{2}x[n]$,

(в) $y[n] = nx[n-1]^2$,

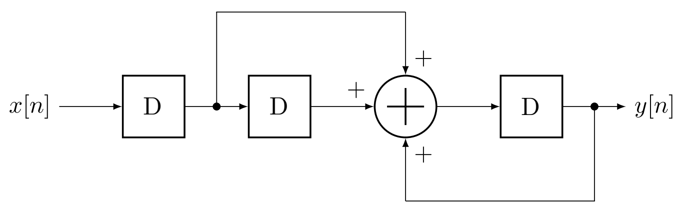
(г) $y[n] = \int\limits_{\tau=-\infty}^{t} x(\tau)\sin(\tau)\,\mathrm{d}\tau$,

(д) $y(t) = \dfrac{\mathrm{d}x(t+1)}{\mathrm{d}t}$,

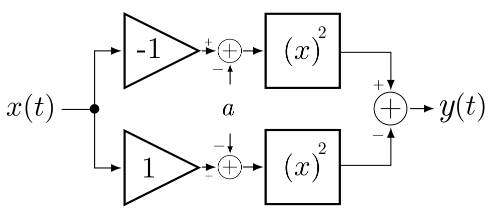
(ђ) $y(t) = t\mathrm{e}^{x(t)-t}$,

где је N_0 позната константа.

4.[2] У систему са слике употребљени су блокови за кашњење и суматори. Улаз система је дискретан сигнал $x = x[n]$ а излаз је дискретан сигнал $y = y[n]$. Описати систем одговарајућом диференцном везом.

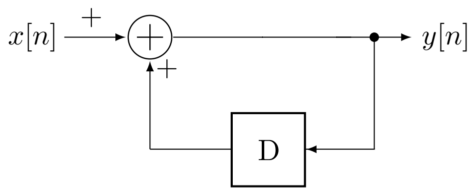


5. У систему са слике употребљени су идеални појачавачи сигнала, суматори и блокови за квадрирање, а a је позната реална константа. Одредити (а) везу између излаза и улаза система. Испитати да ли је тај систем (б) линеаран, (в) са меморијом и (г) стабилан у *BIBO* смислу.



[1] Видети и задатак 2.8. из референтне збирке задатака
[2] Видети и задатак 2.1. из референтне збирке задатака

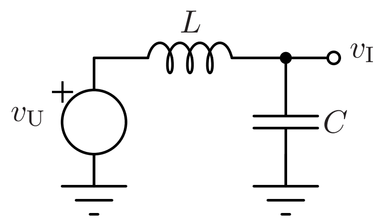
6. У систему са слике употребљен је идеалан блок за кашњење. Одредити (а) *оператор* овог система L. Развити добијени оператор у (б) потенцијални ред по оператору кашњења $\mathrm{L} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathrm{D}^k$. Одредити (в) који елементаран систем представља добијени ред.



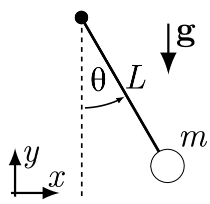
7.[3] Одредити изразе за операторе диференце унапред Δ и диференце уназад ∇ преко (а) оператора кашњења D и (б) оператора предикције E. Полазећи од резултата из претходне тачке, користећи се Њутновом биномном формулом, извести (в) израз за оператор k-те диференце унапред, Δ^k.

8. Нека је $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$ познати полином. Ако је E оператор предикције, (а) упростити дискретан сигнал $y[n] = P(\mathrm{E}) C \lambda^n$, где су C и λ познате реалне консатнте. На основу добијеног резултата, (б) одредити једно партикуларно решење нехомогене диференцне једначине $P(E)y[n] = x[n]$, где је побуда облика $x[n] = Ca^n$ при чему је $P(a) \neq 0$.

9. У колу са слике познати су $L = 100\,\mu\mathrm{H}$ и $C = 1\,\mu\mathrm{F}$. Посматра се систем чији је улаз напон побудног генератора $v_\mathrm{U} = v_\mathrm{U}(t)$ а излаз напон у колу $v_\mathrm{I} = v_\mathrm{I}(t)$. Одредити (а) диференцијалну једначину која описује овај систем. Испитати (б) стабилност овог система у *BIBO* смислу.



10. Механички систем са слике, који представља математичко клатно које се састоји од мале кугле масе m обешене о крут лак танак штап дужине $L = 10\,\mathrm{cm}$, постављен је у хомогено гравитационо поље убрзања $\mathbf{g} = -g\,\mathbf{i}_y$, где је $g \approx 10\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Написати диференцијалну једначину која описује одзив овог система $\theta = \theta(t)$. У почетном тренутку $t_0 = 0$ је $\theta(t_0) = \dfrac{2\pi}{3}$ а клатно креће из мировања. Трансформацијом извода у његов дискретни еквивалент према апроксимативном пресликавању $\mathrm{D} \approx \dfrac{x[n] - x[n-1]}{T_\mathrm{s}}$, где је T_s периода одабирања, одредити одговарајући дискретан систем.

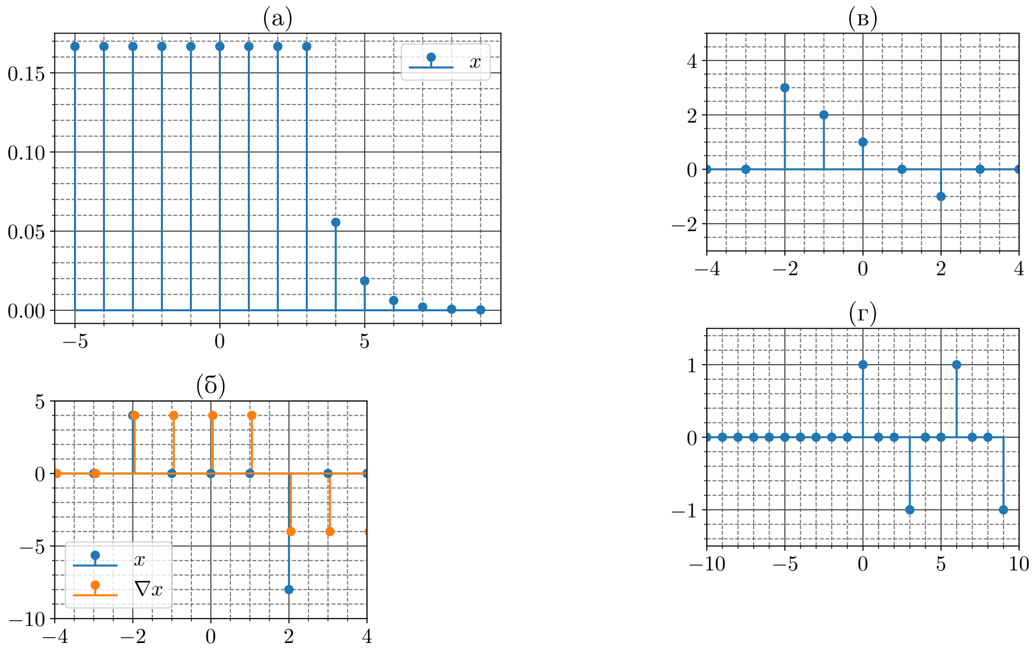


Написати програм у програмском пакету по избору који решава добијену нелинеарну диференцну једначину. Нацртати дијаграм $\theta = \theta(t)$ за првих $T = 2\,\mathrm{s}$ кретања. Евентуално, преклопити аналитичко решење добијено решавањем уз апроксимацију малог угла $\sin\theta \approx \theta$. Како може да се провери да ли је одабран добар период одабирања T_s?

[3] Видети и задатке 1.30. и 1.33. из референтне збирке задатака.

Решења

1.



2. (а) $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$, $\phi = -\frac{\pi}{2}$, $A = 1$ (б) $\Omega_0 = \frac{\pi}{3}$, $\phi = -\frac{\pi}{2}$, $A = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (в) $\Omega_0 = \frac{\pi}{4}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$, $A = \sqrt{2}$

3.

	(а)	(б)	(в)	(г)	(д)	(ђ)
Линеаран	✓	✓		✓	✓	
Временски инваријантан		✓			✓	
Са меморијом	✓		✓	✓	?	
Стабилан			✓			✓
Каузалан	✓	✓	✓	✓		✓

4. $y[n] - y[n-1] = x[n-2] + x[n-3]$

5. (а) $y(t) = 4ax(t)$, Систем је (б) линеаран, (в) без меморије и (г) стабилан.

6. (а) $\mathrm{L} = \frac{1}{1-\mathrm{D}}$ (б) $\mathrm{L} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{D}^k = 1 + \mathrm{D} + \mathrm{D}^2 + \cdots$, односно $c_k = 1$ за $k \in \mathbb{N}$. (в) Систем представља акумулатор, $L = \Sigma$

7. (а) $\Delta = \mathrm{D}^{-1} - 1$, $\nabla = \mathrm{E} - 1$, (б) $\Delta = \mathrm{E} - 1$, $\nabla = 1 - \mathrm{E}^{-1}$ (в) $\Delta^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j}\, \mathrm{E}^j$

8. (а) $y[n] = P(\lambda)C\lambda^n$ (б) $y_\mathrm{p}[n] = \dfrac{1}{P(a)}Cx^n$

9. (а) $(1 + \tau^2\mathrm{D}^2)v_\mathrm{I} = v_\mathrm{U}$, где је $\tau = 10\,\mu\mathrm{s}$ (б) Систем није стабилан.

10. (а) $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$, где је $\omega_0 = 10\,\mathrm{s}^{-1}$ (б) $\theta[n] + \omega_0^2 \sin(\theta[n]) = 2\theta[n-1] - \theta[n-2]$.