2 Континуални сигнали

Задаци

1. Нацртати следеће континуалне сигнале $x = x(t)$:

(а) $x(t) = 2\mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-1)$, и $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$;

(б) $x(t) = \mathrm{u}(t+2) - 2\mathrm{u}(t) + \mathrm{u}(t-1)$, и $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$;

(в) $x(t) = \cos(\pi t)[\delta(t+1) + \delta(t-1)]$, и $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$;

(г) $x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} \delta(t - kT)$,

где су $\mathrm{u}(t)$ и $\delta(t)$ јединична одскочна функција и Дираков импулс редом.

2. Одредити парну и непарну компоненту континуалних сигнала $x = x(t)$ за:

(а) $x(t) = \mathrm{e}^{kt}$;

(б) $x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$;

(в) $x(t) = \sin\left(\omega_0 t + \dfrac{\pi}{3}\right)$,

где су k и ω_0, познате реалне константе.

3. Сигнал $x(t)$ дат је на слици. Нацртати следеће сигнале:

(а) $y = x(-t)$,

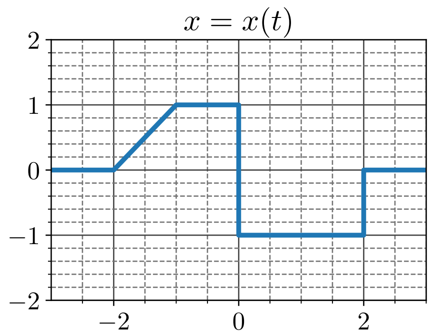
(б) $y = \dfrac{3}{2}x(t-1)$,

(в) $y = x(1-2t)$,

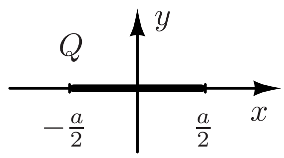
(г) $y = \mathrm{Od}\{x(t)\}$,

(д) $y = \mathrm{Ev}\{x(t)\}$,

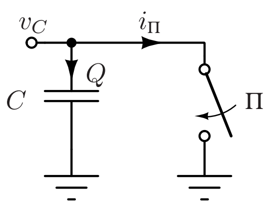
(ђ) $y(t) = x(1-t)\mathrm{u}(t)$.



4. Танка нит дужине a хомогено наелектрисана укупним наелектрисањем Q постављена је дуж x-осе, као на слици. Аналитички описати (а) функцију подужне густине наелектрисања $Q'(x)$. Одредити и (б) исту функцију за $a \to 0$.



5. У колу са слике познато је $C = 1\,\mu\mathrm{F}$. Идеалан прекидач П је отворен, а кондензатор је оптерећен количином наелектрисања $Q = 1\,\mu\mathrm{C}$. У тренутку $t_0 = 0$ затвара се прекидач. Одредити $v_C = v_C(t)$ и $i_\Pi = i_\Pi(t)$, за $-\infty < t < \infty$.



6.[1] Утврдити да ли су следећи сигнали периодични и за оне који јесу израчунати основни период:

(а) $x(t) = \cos(3t) + \sin(5t)$;

(б) $x(t) = \cos(6t) + \sin(\pi t)$;

(в) $x(t) = \cos(6t) + \sin(8t) + \mathrm{e}^{\mathrm{j}2t}$.

[1]Видети и задатак 1.25. из референтне збирке задатака.

7. Нека је дат континуалан сигнал

$$x(t) = \mathrm{e}^{\sigma t}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\right)\mathrm{u}(t+\varepsilon) \qquad (0<\varepsilon<T).$$

Одредити (а) услов које треба да задовољава параметар $\sigma \in \mathbb{R}$ тако да интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{d}t$ конвергира, и у том случају (б) израчунати тај интеграл.

8. Познато је да су енергије сигнала $x = x(t)$ и $y = y(t)$, W_x и W_y редом, коначне. Одредити (а) услов, који треба да задовољавају сигнали x и y, под којим је снага сигнала $z = x(t) + y(t)$ једнака $W_z = W_x + W_y$. На основу резултата из претходне тачке (б) доказати једнакост:

$$W\{x\} = W\{\mathrm{Ev}\{x\}\} + W\{\mathrm{Od}\{x\}\},$$

где $W\{x\}$ означава енергију сигнала x.

9. Извести израз за снагу сигнала:

$$x(t) = a_0 + a_1\cos(\omega_0 t) + a_2\cos(2\omega_0 t) + \cdots + a_n\cos(n\omega_0 t), \qquad (n \in \mathbb{N})$$

где су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ познате реалне константе.

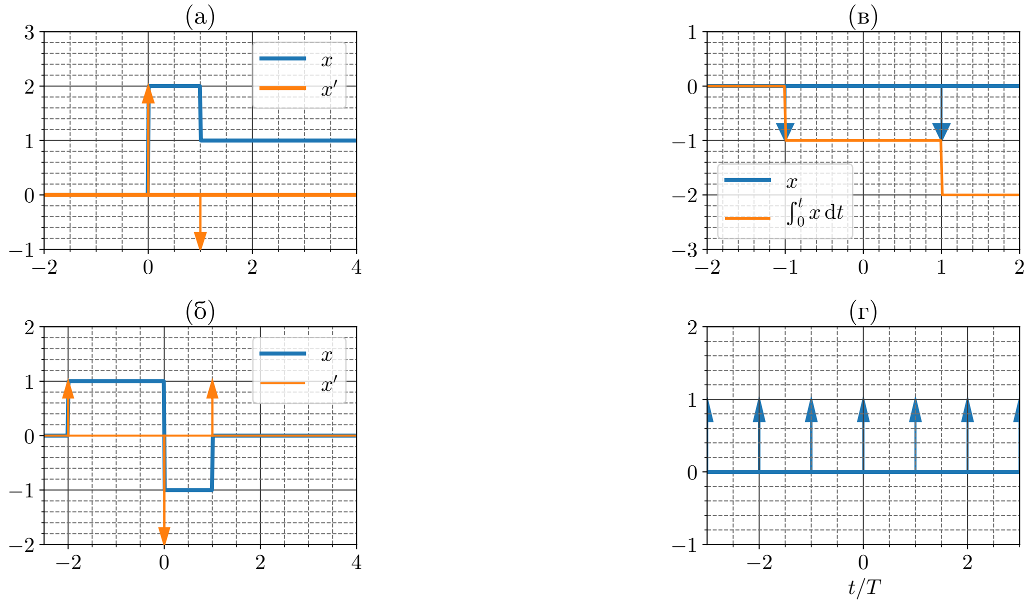
10. Полазећи од дефиниција парне и непарне функције извести услов за парност сигнала

$$y(t) = x_1(t)\cdot x_2(t)x_3(t)\cdots x_n(t) = \prod_{k=1}^{n} x_k(n),$$

где је сваки од сигнала $x_k(t)$ за $k \in \{1{,}2,\ldots,n\}$ или паран или непаран.

Решења

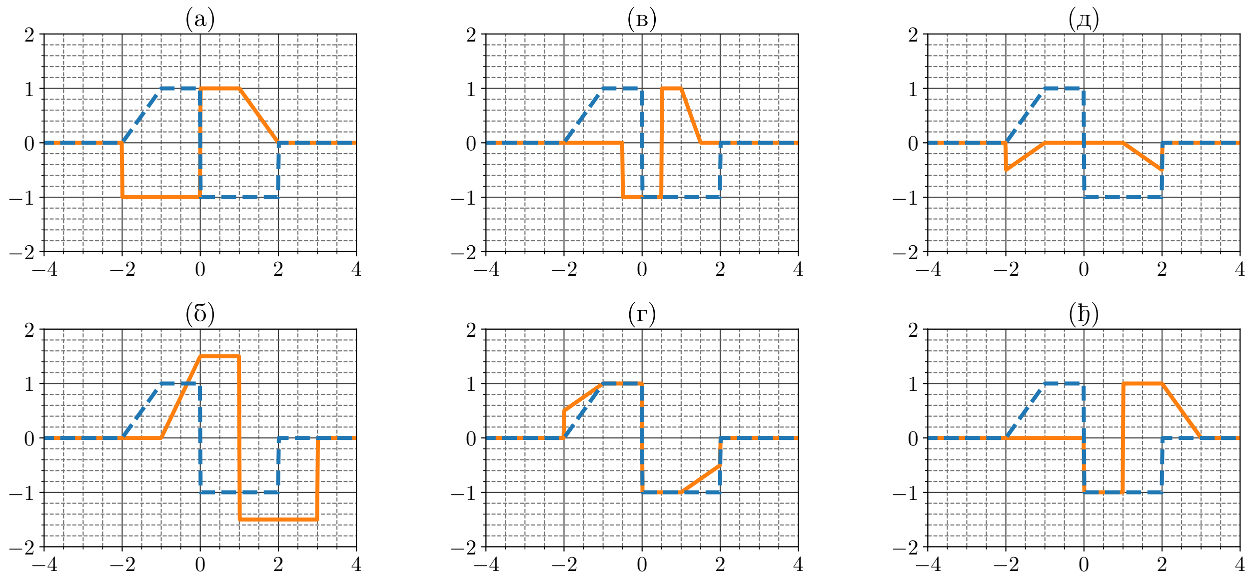
1.



2. (а) $\mathrm{Ev}\{\mathrm{e}^{kt}\} = \cosh(kt)$, $\mathrm{Od}\{\mathrm{e}^{kt}\} = \sinh(kt)$, (б) $\mathrm{Ev}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\} = \cos(\omega_0 t)$, $\mathrm{Od}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\} = \mathrm{j}\sin(\omega_0 t)$

(в) $\mathrm{Ev}\left\{\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{3}\right)\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\omega_0 t)$, $\mathrm{Od}\left\{\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{3}\right)\right\} = \frac{1}{2}\sin(\omega_0 t)$,

3. На свим сликама је плавом испрекиданом цртом означен сигнал $x(t)$ а наранџастом тражени график.



4. (а) $Q'(x) = \frac{Q}{a}\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)$, (б) $Q'(x) = Q\delta(x)$

5. $v_C = 1\,\mathrm{V}\,\mathrm{u}(-t)$, $i_\Pi(t) = 1\,\mu\mathrm{C}\,\delta(t)$

6. (а) Да, $T = 2\pi$, (б) Не. (в) Да, $T = \pi$.

7. (а) $\sigma < 0$, (б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\sigma T}}$

8. (а) Треба да важи $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)\,\mathrm{d}t = 0$, (б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathrm{Ev}\{x(t)\}\mathrm{Od}\{x(t)\}}_{\text{Непарна функција}}\,\mathrm{d}t = 0$ одакле закључак непосредно следи.

9. $P = a_0^2 + \dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{2}$

10. Сигнал је паран акко је број непарних сигнала из скупа $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ паран.