1. Нацртати следеће континуалне сигнале $x = x(t)$:

(а) $x(t) = 2\mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-1)$, и $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$;

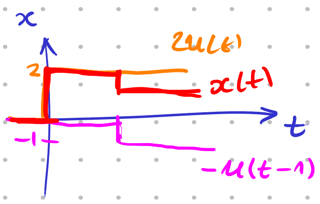
(б) $x(t) = \mathrm{u}(t+2) - 2\mathrm{u}(t) + \mathrm{u}(t-1)$, и $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$;

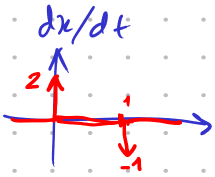
(в) $x(t) = \cos(\pi t)[\delta(t+1) + \delta(t-1)]$, и $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$;

(г) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(t - kT)$,

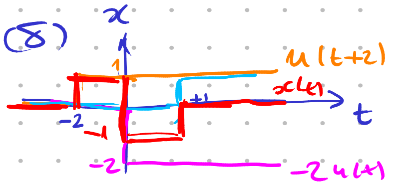
где су $\mathrm{u}(t)$ и $\delta(t)$ јединична одскочна функција и Дираков импулс редом.

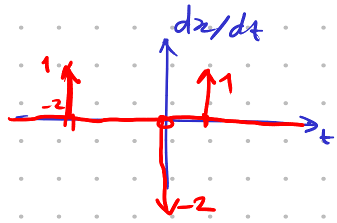
(а)





(б)





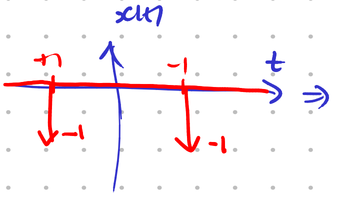
$$\boxed{\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)}$$

(в) $x(t) = \cos\pi t\,[\delta(t+1) + \delta(t-1)] = \underbrace{\cos\pi t \cdot \delta(t+1)}_{} + \cos\pi t \cdot \delta(t-1)$

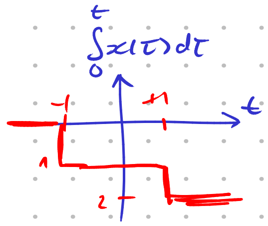
$t\approx -1$ $t \approx 1$

$\cos(-\pi) = -1$ $\cos(\pi) = -1$

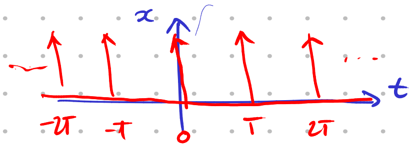
$\cos\pi(-1)\cdot\delta(t+1)$



$\Rightarrow$



(г) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - \underbrace{kT}_{})$ $\quad t \in 0, \pm T, \pm 2T, \ldots$



$x(t) = \mathrm{comb}_T(t)$

$x(t) = Ш_T(t)$

2. Одредити парну и непарну компоненту континуалних сигнала $x = x(t)$ за:

(а) $x(t) = \mathrm{e}^{kt}$;

(б) $x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$;

(в) $x(t) = \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{3}\right)$,

где су k и ω_0, познате реалне константе.

$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$ * : $\quad x_e(t) = x_e(-t)$

$x(-t) = x_e(-t) + x_o(-t)$ $\quad x_o(t) = -x_o(-t)$

$\Rightarrow x(-t) = x_e(t) - x_o(t)$ *

$* + * \Rightarrow \quad x(t) + x(-t) = x_e(t)\cdot 2 \Rightarrow \boxed{x_e = \frac{x(t) + x(-t)}{2}} \quad x_e = Ev\{x(t)\}$

$* - * \Rightarrow \quad x(t) - x(-t) = 2x_o(t) \Rightarrow \boxed{x_o = \frac{x(t) - x(-t)}{2}} \quad x_o = Od\{x(t)\}$

(а) $x(t) = e^{kt} \Rightarrow Ev\{e^{kt}\} = \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} = \underline{\cosh(kt)}$; $\; Od\{e^{kt}\} = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2} = \underline{\sinh(kt)}$ (a)

(б) $x(t) = e^{j\omega_0 t} \Rightarrow Ev\{e^{j\omega_0 t}\} = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} = \frac{\cos(\omega_0 t) + \cancel{j\sin(\omega_0 t)} + \cos(\omega_0 t) - \cancel{j\sin(\omega_0 t)}}{2}$

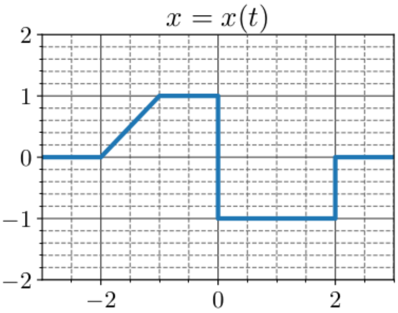
$\boxed{Ev\{e^{j\omega_0 t}\} = \cos\omega_0 t}$ (б) $\quad Od\{e^{j\omega_0 t}\} = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2} = j\sin\omega_0 t$ (б)

(в) $x(t) = \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{3}\right) = \underbrace{\sin(\omega_0 t)}_{\text{нп.}} \cos\frac{\pi}{3} + \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{\text{п}} \sin\frac{\pi}{3}$ $\quad \cos\frac{\pi}{3} = 1/2, \; \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}/2$

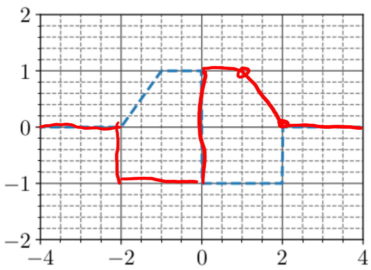
$$\boxed{\begin{aligned} Ev\{x\} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\omega_0 t) \\ Od\{x\} &= \frac{1}{2}\sin(\omega_0 t) \end{aligned}}$$ (в)

3. Сигнал $x(t)$ дат је на слици. Нацртати следеће сигнале:

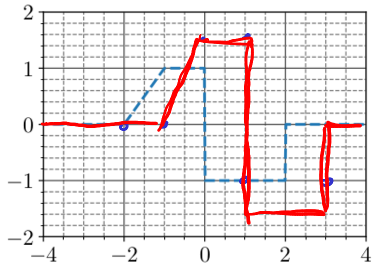
(а) $y = x(-t)$,
(б) $y = \frac{3}{2}x(t-1)$,
(в) $y = x(1-2t)$,
(г) $y = \mathrm{Od}\{x(t)\}$,
(д) $y = \mathrm{Ev}\{x(t)\}$,
(ђ) $y(t) = x(1-t)\mathrm{u}(t)$.



(a)



(б)



(в) $y = x(1-2t)$

$y_1 = x(kt)$

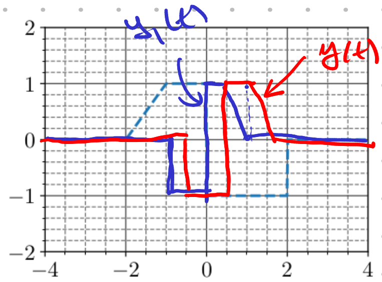
$y_2 = y_1(m+t)$

$y_2 = x(k(m+t))$

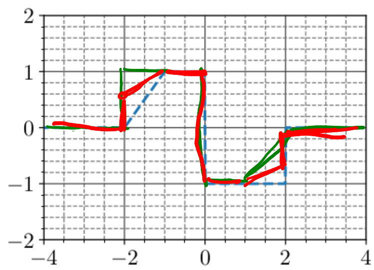
$= x(km+kt)$ $\quad \boxed{k=-2}$ $\quad km = 1$

$\boxed{m = -\frac{1}{2}}$

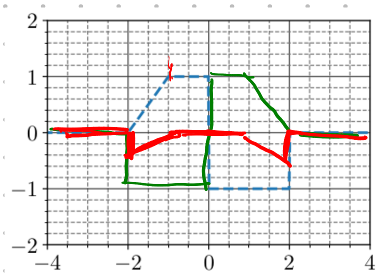
(в)



(г) $\mathrm{Od}\{x\} = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$



(д) $\mathrm{Ev}\{x\} = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$



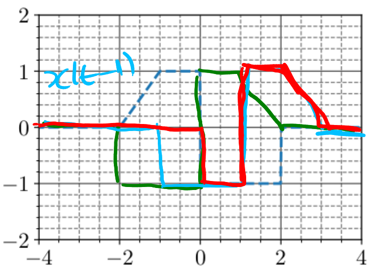
(ђ) $y = \underbrace{x(1-t)}\cdot \mathrm{u}(t)$

$x(1-t)$

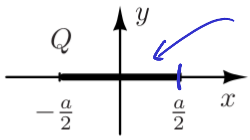
$y_1 = x(kt)$

$y_2 = x(m+t)$

$\Rightarrow x(km+kt)$ $\quad k=-1$ $\quad m=-1$

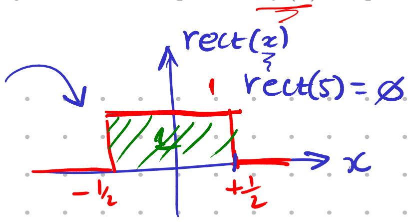


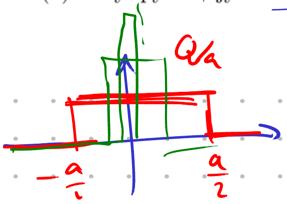
4. Танка нит дужине a хомогено наелектрисана укупним наелектрисањем Q постављена је дуж x-осе, као на слици. Аналитички описати (а) функцију подужне густине наелектрисања $Q'(x)$. Одредити и (б) исту функцију за $a \to 0$.



$Q' = \frac{Q}{a}, \quad |x| < \frac{a}{2}$

$Q' = 0, \quad |x| > \frac{a}{2}$



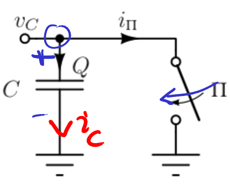


(a) $\Rightarrow \boxed{Q'(x) = \frac{Q}{a}\,\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)}$

(б)

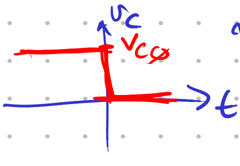
$\int_{-\infty}^{\infty} Q'\,dx = Q \quad \& \quad a \to 0 \quad Q'(x \neq 0) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{Q'(x) = Q\,\delta(x)}$ $\quad \bullet\, Q$

5. У колу са слике познато је $C = 1\,\mu\mathrm{F}$. Идеалан прекидач П је отворен, а кондензатор је оптерећен количином наелектрисања $Q = 1\,\mu\mathrm{C}$. У тренутку $t_0 = 0$ затвара се прекидач. Одредити $v_C = v_C(t)$ и $i_\Pi = i_\Pi(t)$, за $-\infty < t < \infty$.



$\boxed{C = \frac{Q}{v}} \Rightarrow v = \frac{Q}{C} = 1\,\mathrm{V}$

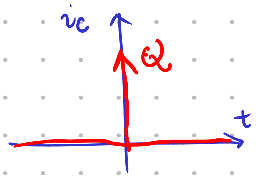
$v_C(t<0) = 1\,\mathrm{V} \qquad v_C(t>0) = 0$



$v_C(t) = \underbrace{1\,\mathrm{V}}_{=V_{C0}}\, \mathrm{u}(-t)$;

$Q = C \cdot v_C \xRightarrow{d/dt} \frac{dQ}{dt} = i_C = C\frac{dv_C}{dt} \quad (C = \mathrm{const})$

$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = C V_{C0}\, \underbrace{\delta(-t)}_{\delta(t)} \cdot (-1) = -C V_{C0}\, \delta(t) \Rightarrow i_\Pi = +Q\,\delta(t)$



6.[1] Утврдити да ли су следећи сигнали периодични и за оне који јесу израчунати основни период:

(а) $x(t) = \cos(3t) + \sin(5t)$; (б) $x(t) = \cos(6t) + \sin(\pi t)$; (в) $x(t) = \cos(6t) + \sin(8t) + e^{j2t}$.

$y = x_1(t) + x_2(t)$?

$\uparrow T_1$ $\uparrow T_2$

$\sqrt{2}$ $\quad 1$

π $\quad 2$

$T_1 = 2$, $T_2 = 3$

$T = \text{НЗС}(T_1, T_2)$

$\text{НЗС}(2,3) = 6$

$T_1 = 2\pi$, $T_2 = 3\pi$, $\text{НЗС}(2\pi, 3\pi) = 6\pi$

(а) $x(t) = \cos(3t) + \sin(5t)$

$\omega_1 = 3$, $T_1 = \frac{2\pi}{3}$ $\qquad$ $\omega_1 = 5$, $T_2 = \frac{2\pi}{5}$

$T = \text{НЗС}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right) = 2\pi \, \text{НЗС}\cancel{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right)}^{1}$

$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi}$ (а)

(б) $x(t) = \cos(6t) + \sin(\pi t)$

$\omega_1 = 6$, $T_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $\omega_2 = \pi$, $T_2 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

T не постоји! (б)

(в) $x(t) = \cos(6t) + \sin(8t) + e^{j2t}$

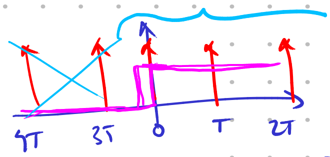
$\omega_1 = 6$, $T_1 = \frac{2\pi}{6}$ $\qquad$ $\omega_2 = 8$, $T_2 = \frac{2\pi}{8}$ $\qquad$ $\omega_3 = 2$, $T_3 = \frac{2\pi}{2}$

$\frac{1}{2\pi} T = \text{НЗС}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cancel{\text{НЗС}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1\right)}^{1}$

$\Rightarrow \boxed{T = \pi}$ (в)

7. Нека је дат континуалан сигнал

$$x(t) = e^{\sigma t} \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)\right)}_{Ш(t)} u(t + \varepsilon) \qquad (0 < \varepsilon < T).$$



$= u(t)$

$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$

Одредити (а) услов које треба да задовољава параметар $\sigma \in \mathbb{R}$ тако да интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$ конвергира, и у том случају (б) израчунати тај интеграл.

$$I = \int_{t=-\varepsilon}^{\infty} e^{\sigma t} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\varepsilon}^{\infty} e^{\sigma t} \delta(t - kT)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\sigma kT} \cancel{\int_{-\varepsilon}^{\infty} \delta(t-kT)\, dt}^{1}$$

$t = kT$, $e^{\sigma kT}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{\sigma kT} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{\sigma T}\right)^k, \quad a$$

$|e^{\sigma T}| < 1 \Rightarrow \sigma T < 0 \Rightarrow \boxed{\sigma < 0}$ (а)

$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{1 - e^{\sigma T}}}$ (б)

$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = S_N$

$a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n + a^{n+1} = a S_N$ $\quad -$

$1 - a^{n+1} = S_N(1 - a) \Rightarrow \boxed{S_N = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}}$

$|a| < 1 \Rightarrow a^{n+1} \to 0$

$S_N \to \frac{1}{1 - a}$

8. Познато је да су енергије сигнала $x = x(t)$ и $y = y(t)$, W_x и W_y редом, коначне. Одредити (а) услов, који треба да задовољавају сигнали x и y, под којим је снага сигнала $z = x(t) + y(t)$ једнака $W_z = W_x + W_y$. На основу резултата из претходне тачке (б) доказати једнакост:

$$W\{x\} = W\{\text{Ev}\{x\}\} + W\{\text{Od}\{x\}\},$$

где $W\{x\}$ означава енергију сигнала x.

$$W_z = \int_{-\infty}^{\infty} z^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} (x+y)^2\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,dt}_{W_x} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y^2\,dt}_{W_y} + 2\int_{-\infty}^{\infty} xy\,dt \quad = 0$$

(а) $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} xy\,dt = 0}$

(б) $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\text{Ev}\{x\}\cdot\text{Od}\{x\}}_{\text{Нп.}}\,dt = 0}$

9. Извести израз за снагу сигнала:

$$x(t) = a_0 + a_1\cos(\omega_0 t) + a_2\cos(2\omega_0 t) + \cdots + a_n\cos(n\omega_0 t), \qquad (n \in \mathbb{N})$$

где су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ познате реалне константе.

$t = 0 \div T \Rightarrow \omega_0 t = 0 \div 2\pi$

$$P = \frac{1}{T}\int_T x^2\,dt$$

$x(\phi) = a_0 + a_1\cos(\phi) + a_2\cos(2\phi) + \cdots + a_n\cos(n\phi); \quad \phi = 0 \div 2\pi$

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2(\phi)\,d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(a_0^2 + a_1^2\cos^2(\phi) + a_2^2\cos^2(2\phi) + \cdots$$

$$+ \cancel{a_0a_1\cos(\phi)} + \cancel{a_0a_2\cos(2\phi)} + \cdots$$

$$+ \cancel{a_1a_2\cos(\phi)\cos(2\phi)} + \cdots$$

$$\cdots + \cancel{a_ia_j\cos(i\phi)\cos(j\phi)} + \cdots\Big)\,d\phi$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n\end{cases}}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\cos^2(nx)\,dx = \pi}$$

$$P = \frac{1}{2\pi}\left(a_0^2\cdot 2\pi + a_1^2\pi + a_2^2\pi + \cdots + a_n^2\pi\right)$$

$$\Rightarrow \quad P = a_0^2 + \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{2} = a_0^2 + \left(\frac{a_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a_n}{\sqrt{2}}\right)^2$$

10. Полазећи од дефиниција парне и непарне функције извести услов за парност сигнала

$$y(t) = x_1(t)\cdot x_2(t)x_3(t)\cdots x_n(t) = \prod_{k=1}^{n} x_k(n),$$

где је сваки од сигнала $x_k(t)$ за $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ или паран или непаран.

$x_1, x_2, \ldots, x_k$ непарне

$x_{k+1}, \ldots, x_n \rightarrow$ парне

$$y(-t) = x_1(-t)\,x_2(-t)\cdots x_n(-t)$$

$$= (-1)^k\,\underbrace{x_1(t)\,x_2(t)\cdots x_k(t)\cdot x_{k+1}(t)\cdots x_n(t)} = (-1)^k y(t)$$

$k \bmod 2 = 0 \Rightarrow y$ парна

else $\Rightarrow y$ непарна