Овај документ се надовезује на вежбе држане четврте седмице. Циљ документа је да обједини и појасни на примерима методе за одређивање импулсног одзива континуалних *LTI* система.

Одређивање импулсног одзива континуалних *LTI* система

Поједностављење опште форме

Посматрајмо континуални *LTI* систем описан диференцијалном једначином облика

$$P(\mathrm{D})y(t) = Q(\mathrm{D})x(t), \tag{1}$$

где су $x(t)$ и $y(t)$ побуда и одзив система редом, а $P(\mathrm{D})$ и $Q(\mathrm{D})$ произвољни полиноми по оператору диференцирања D. Импулсни одзив овог система $h = h(t)$ представља одзив система на јединичну импулсну побуду $x(t) = \delta(t)$, односно решење једначине

$$P(\mathrm{D})h(t) = Q(\mathrm{D})\delta(t). \tag{2}$$

Уколико приметимо смену

$$\boxed{h(t) = Q(\mathrm{D})h_1(t)} \tag{3}$$

и заменимо у израз (2), даље се може писати

$$P(\mathrm{D})h(t) = Q(\mathrm{D})\delta(t) \;\Leftrightarrow\; P(\mathrm{D})Q(\mathrm{D})h_1(t) = Q(\mathrm{D})\delta(t) \;\Leftrightarrow\; Q(\mathrm{D})P(\mathrm{D})h_1(t) = Q(\mathrm{D})\delta(t). \tag{4}$$

У последњем кораку, начињена је замена редоследа примене оператора, $P(\mathrm{D})Q(\mathrm{D}) \equiv Q(\mathrm{D})P(\mathrm{D})$, која је оправдана на основу линеарности. У последњем кораку се може на обе стране применити оператор $Q^{-1}(\mathrm{D})$, чију егзистенцију овде нећемо дискутовати, након чега преостаје резултат:

$$\boxed{P(\mathrm{D})h_1(t) = \delta(t).} \tag{5}$$

На основу претходно изнесеног поступка, могуће је одредити импулсни одзив система описаног једначином (1) тако што се одреди помоћни одзив $h_1(t)$ помоћног система описаног једначином (5) а потом трансформацијом добијеног помоћног одзива у одзив полазног система помоћу (3)

Додатно, из практичних разлога постоји ограничење у степенима полинома $\deg P \geq \deg Q$. Уколико се импулсни одзив помоћног система запише у облику $h_1(t) = g(t)\,\mathrm{u}(t)$, онда се могу разликовати случајеви:

$$h(t) = \begin{cases} Q(D)\big(g(t)\mathrm{u}(t)\big), & \deg P = \deg Q \\ Q(D)\big(g(t)\big)\,\mathrm{u}(t), & \deg P > \deg Q \end{cases} \tag{6}$$

Одређивање импулсног одзива за поједностављену форму

На основу претходне дискусије, потребно је и довољно одредити решење једначине $P(\mathrm{D})h_1(t) = \delta(t)$. Препоручена метода за решавање овог проблема је (*i*) диференцирањем одскочног одзива (дискутовано на предавањима), али се може користити и (*ii*) поједностављена метода уклапања импулса (енг. *impulse matching*, дискутовано на вежбама).

Прва метода утемељена је на својству линеарности система. Нека је $s_1(t) = O\{\mathrm{u}(t)\}$ одскочни одзив посматраног система, онда се диференцирањем обе стране изналази

$$\frac{\mathrm{d}s_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}O\{\mathrm{u}(t)\} = O\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{u}(t)\right\} = O\{\delta(t)\} = h_1(t), \tag{7}$$

при чему је у другом кораку замењен редослед примене оператора диференцирања и система због линеарности. Коначно се има закључак $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}s_1(t)}{\mathrm{d}t} = h_1(t)}$, односно, **импулсни одзив се добија диференцирањем одскочног одзива**. Одређивање одскочног одзива представља решавање диференцијалне једначине $P(\mathrm{D})s_1(t) = \mathrm{u}(t)$. Велика предност у решавању на овај начин у односу на директно решавање једначине (5) јесте то да у њој <u>нема импулса</u> што за последицу има то да је одскочни одзив непрекидан, тако да су једнаке преиницијалне и постиницијалне вредности за $s_1(t)$. Будући да се одскочни одзив одређује за преиницијалне услове равне нули то повлачи да су онда и постиницијални услови равни нули. Одскочни одзив добија се као збир хомогеног и партикуларног дела $s_1 = s_{1\mathrm{h}} + s_{1\mathrm{p}}$. Хомогени део се одређује на начин показан на часу. Партикуларни део представља устаљени одзив на експоненцијалну побуду $\mathrm{e}^{0\cdot t}\mathrm{u}(t)$ и на основу дискусије са часа вежби једнак је $s_{1\mathrm{p}} = \dfrac{1}{P(0)}$.

Друга метода утемељена је на особини линеарне независности различитих извода Диракових импулса. Може се показати да једначина облика:

$$a_0\delta(t) + a_1\delta'(t) + a_2\delta''(t) + \cdots + a_n\delta^{(n)}(t) = 0, \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{8}$$

по непознатим коефицијентима $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ има <u>само</u> тривијално решење $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. У контексту решавања диференцијалне једначине облика $P(\mathrm{D})h_1(t) = \delta(t)$ то значи да: (*i*) пошто се са десне стране налази делта импулс мора се налазити и са леве стране и (*ii*) пошто се са десне стране не налазе изводи делта импулса њега не може бити ни са леве стране. На основу тога, у изразу $P(\mathrm{D})h_1(t)$ се мора појавити делта импулс и не сме се појавити његов први извод. Претпоставимо да се сабирак $f(t)\delta(t)$ јавља у k-том изводу импулсног одзива, $h_1^{(k)}(t)$, у том случају се у $(k+1)$-вом изводу импулсног одзива мора наћи сабирак облика $f'(t)\delta(t) + f(t)\delta'(t)$. Односно, да се не би са леве стране појавио извод Дираковог импулса, неопходно је да се импулс појављује тек у највишем изводу импулсног одзива који се јавља у једначини а то је $h^{(\deg P)}(t)$, где је $\deg P$ степен полинома P – ред диференцијалне једначине. Будући да се импулс јавља у $h^{(\deg P)}(t)$ то се Хевисајдова одскочна функција мора јављати у $h^{(\deg P-1)}(t)$, односно до прекида долази у $(\deg P - 1)$-вом изводу. Будући да су интеграли Хевисајдове функције непрекидни, то је онда тај и једини извод импулсног одзива који има прекид. На основу тога, ако распишемо оператор система као $P(\mathrm{D}) = c_0 + c_1\mathrm{D} + c_2\mathrm{D}^2 + \cdots + c_2\mathrm{D}^n$ једначина се може писати као

$$(c_0 + c_1\mathrm{D} + c_2\mathrm{D}^2 + \cdots + c_2\mathrm{D}^n)h_1(t) = \delta(t) \tag{9}$$

$$c_0h_1(t) + c_1h_1'(t) + c_2h_1''(t) + \cdots + c_nh_1^{(n)}(t) = \delta(t) \tag{10}$$

Ако интегралимо обе стране добијене једначине $\displaystyle\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}$ у произвољно „уским“ границама, $\varepsilon \to 0$, приметивши да онда интеграли свих ограничених функција теже нули преостаје само члан са импулсом:

$$c_0\cancel{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} h_1(t)\,\mathrm{d}t} + c_1\cancel{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} h_1'(t)\,\mathrm{d}t} + c_2\cancel{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} h_1''(t)\,\mathrm{d}t} + \cdots + c_{n-1}\cancel{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} h_1^{(n-1)}(t)\,\mathrm{d}t} + c_n\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} h_1^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(t)\,\mathrm{d}t}_{=1,\text{по деф.}} \Rightarrow \tag{11}$$

$$c_nh_1^{(n-1)}(0^+) - c_nh_1^{(n-1)}(0^-) = 1 \tag{12}$$

Како су преиницијални услови приликом тражења импулсног одзива равни нули то преостаје $h_1^{(n-1)}(0^+) = \dfrac{1}{c_n}$. **Коначно су непосредно познати сви постиницијални услови импулсног одзива**

$$\boxed{h_1(0^+) = 0,\ \ h_1^{'}(0^+) = 0,\ \ h_1^{''}(0^+) = 0, \ldots,\ \ h_1^{(n-2)}(0^+) = 0,\ \ h_1^{(n-1)}(0^+) = \frac{1}{c_n},} \tag{13}$$

где је c_n коефицијент уз највиши извод у диференцијалној једначини а n је ред диференцијалне једначине.

Пример 1. Одредити одзив система описаног диференцијалном једначином $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t) + 2x(t)$, на побуду $x(t) = 2e^t\,\mathrm{u}(t-2)$.

Решење. Одзив на дату побуду $x(t)$ може се одредити конволуцијом. За примену конволуције потребно је прво одредити импулсни одзив система. Систем се може записати у облику (1) за $P(\mathrm{D}) = \mathrm{D}^2 + 3\mathrm{D} + 2$ и $Q(\mathrm{D}) = \mathrm{D} + 2$. Потражимо импулсни одзив помоћног система $P(\mathrm{D})h_1(t) = \delta(t)$.

1. метода (*диференцирањем импулсног одзива*). Импулсни одзив помоћног система тражимо као решење једначине

$$P(\mathrm{D})s_1(t) = \mathrm{u}(t). \tag{14}$$

Импулсни одзив има хомогени део одређен коренима полинома P и то $\lambda \in \{-2, -1\}$. Облик хомогеног решења је онда $s_{1,\mathrm{h}} = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-2t}$. Партикуларни део је $s_{1,\mathrm{p}} = \dfrac{1}{P(0)} = \dfrac{1}{2}$. Коефицијенти у општем облику једначине одскочног одзива налазе се на основу постиницијалних почетних услова који су из раније наведених разлога равни нули.

$$s_1(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2} \Rightarrow \quad s_1(0) = 0 = C_1 + C_2 + \frac{1}{2} \tag{15}$$

$$s_1'(t) = -C_1\mathrm{e}^{-t} - 2C_2\mathrm{e}^{-2t} \Rightarrow \quad s_1'(0) = 0 = -C_1 - 2C_2. \tag{16}$$

Решавањем добијеног система једначина по непознатим коефицијентима добија се $C_1 = -1$, $C_2 = \dfrac{1}{2}$. Одакле се коначно налази одскочни одзив $s_1(t) = \left(-\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} + \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{u}(t)$. Диференцирањем добијеног одскочног одзива добија се и импулсни одзив помоћног система $\boxed{h_1(t) = \left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right)\,\mathrm{u}(t)}$

2. метода (*појeдностављеном методом уклапања импулса*) Непосредно се решава једначина $P(\mathrm{D})h_1(t) = \delta(t)$. Општи облик импулсног одзива одређен је коренима полинома P на исти начин као у претходној методи, $h_1(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-2t}$. На основу закључка методе познати су постиницијални почетни услови као $h_1(0^+) = 0$, $h_1'(0^+) = 1$. Заменом у општи облик добија се:

$$h_1(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-2t} \Rightarrow \qquad h_1(0^+) = 0 = C_1 + C_2 \tag{17}$$

$$h_1'(t) = -C_1\mathrm{e}^{-t} - 2C_2\mathrm{e}^{-2t} \Rightarrow \quad h_1(0^+) = 1 = -C_1 - 2C_2, \tag{18}$$

$$\tag{19}$$

решавањем добијеног система имају се $C_1 = -C_2 = 1$, одакле је $\boxed{h_1(t) = \left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right)\,\mathrm{u}(t)}$

Имајући импулсни одзив помоћног система, импулсни одзив полазног система налази се на основу (3), одакле је

$$h(t) = Q(\mathrm{D})h_1(t) \Rightarrow \boxed{h(t) = \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{u}(t)}. \tag{20}$$

Одзив на побуду може се потражити конволуцијом

$$y_\mathrm{p}(t) = h(t) * x(t). \tag{21}$$

У овом случају је најефикасније применити својства конволуције. Побудни сигнал се може записати и као $x(t) = 2\mathrm{e}^{t-2+2}\,\mathrm{u}(t-2) = 2\mathrm{e}^2\mathrm{e}^{t-2}\mathrm{u}(t-2)$. Приметимо да је побудни сигнал временски померен и скалиран у односу на сигнал $x_1 = e^t\,\mathrm{u}(t)$. Да би се израчунала конволуција (21) згодно је искористити ово својство тако да се конволуција одговарајућим трансформацијама своди на табличну, или једноставнију конволуцију. На основу таблице је $y_{\mathrm{p},1} = h(t) * x_1(t) = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{u}(t) * \mathrm{e}^t\mathrm{u}(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\mathrm{u}(t) = \sinh(t)\,\mathrm{u}(t)$. На основу линеарности и временске инваријантности, пошто важи $x(t) = 2\mathrm{e}^2x_1(t-2)$ то је и $y_\mathrm{p}(t) = 2\mathrm{e}^2y_{\mathrm{p},1}(t-2)$ одакле је

$$\boxed{\boxed{y_\mathrm{p}(t) = 2\mathrm{e}^2\sinh(t-2)\,\mathrm{u}(t-2)}} \tag{22}$$

■

Симболичко решавање у програмском пакету Octave

Поступак описан првим методом у прећашњем примеру може се решити и непосредно применом симболичког пакета у програмском окружењу **GNU Octave**. Под претпоставком да је правилно инсталиран пакет, програмски код који одређује решење примера је у наставку

```
clear all;
close all;
clc;

pkg load symbolic;
syms s(t);

DJ = diff(s,t,2) + 3*diff(s,t) + 2*s == 1;
sol = dsolve (DJ, s(0) == 0, diff(s)(0) ==0 )
latex(sol)

s = rhs(sol) * heaviside(t)

h1 = diff(s)
h = diff(h1) + 2*h1
```

```
16 h_fact = factor(h, dirac(t), diff(dirac(t)), heaviside(t))
17 latex( h_fact )
18
19 subs(h, t, 0)
20 h = subs( h_fact, [dirac(t), diff(dirac(t))], [0,0] )
21
22 syms tau
23 y = int( subs(h, t, tau) * exp(t-tau), tau, 0, t )
24
25 latex(y)
```

Линије кода 1—3 представљају добру програмерску праксу, и то: линија 1 брише све податке из радног окружења (енг. *workspace*); линија 2 затвара све прозоре за цртање графика (енг. *figure*); линија 3 брише садржај приказа. Линија 5 учитава симболички пакет. Линија 6 дефинише функцију $s(t)$, помоћу које се у 8. линији дефинише диференцијална једначина из (14). Дата диференцијална једначина се решава са нултим почетним условима у линији 9. У линији 10 се генерише LaTeX код који се рендерује као

$$s(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2}$$

У линији 12 се „извлачи“ десна страна израза за $s(t)$ (енг. *right hand side* – rhs). У линији 14 се одређује одскочни импулсни одзив помоћног система на основу одскочног одзива. У линији 15 се израчунава импулсни одзив полазног система на основу $h(t) = Q(\mathrm{D})h_1(t)$. У линији 16 се факторише добијени израз тако да се обједине Диракови импулси и Хевисајдове функције. У линији 17 се генерише LaTeXкод који се рендерује као:

$$\frac{\left(\left(2e^{2t}-2\right)\delta\left(t\right)+\left(e^{2t}-2e^{t}+1\right)\delta^{(1)}\left(t\right)+2e^{t}\mathrm{u}\left(t\right)\right)e^{-2t}}{2}$$

У добијеном изразу фигуришу и $(\mathrm{e}^t - 1)\delta(t)$ и $\left(e^{2t} - 2e^t + 1\right)\delta'\left(t\right)$. Пошто су обе функције испред Делта импулса и и извода Делта импулса равне нули у нули, то значи да се ови импулси могу занемарити у наставку. Занемаривање импулса обављено је сменом за нулу у линији 20. У линији 22 дефинише се симбол τ који се користи за решавање конволуционог интеграла. Коначно, у линији 23 је и решен конволуциони интеграл по дефиницији. Резултат је рендерован у LaTeX формату у линији 25:

$$\left(\frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2}\right)\mathrm{u}\left(t\right)$$

Последњи корак решавања примера помоћу особина линеарности и временске инваријантности се може добити сменом `2*e^2*subs(y, t, t-2)`.

Коначно, резултат који се добија покретањем показаног кода је:

```
Symbolic pkg v2.9.0: Python communication link active, SymPy v1.5.1.
sol = (sym)

                       -2⋅t
           1     -t   ℯ
    s(t) = ─ - ℯ    + ─────
           2            2

s{\left(t \right)} = \frac{1}{2} - e^{- t} + \frac{e^{- 2 t}}{2}
s = (sym)

    ⎛              -2⋅t⎞
    ⎜1     -t     ℯ    ⎟
    ⎜─ - ℯ    +  ─────⎟⋅θ(t)
    ⎝2             2   ⎠

h1 = (sym)

                           ⎛              -2⋅t⎞
    ⎛ -t      -2⋅t⎞        ⎜1     -t     ℯ    ⎟
    ⎝ℯ    - ℯ     ⎠⋅θ(t) + ⎜─ - ℯ    +  ─────⎟⋅δ(t)
                           ⎝2             2   ⎠

h = (sym)

                                                                                                      ⎛              -2⋅t⎞          ⎛              -2⋅t⎞
    ⎛   -t       -2⋅t⎞            ⎛ -t      -2⋅t⎞              ⎛ -t      -2⋅t⎞              ⎜1     -t     ℯ    ⎟          ⎜1     -t     ℯ    ⎟  (1)
    ⎝- ℯ   + 2⋅ℯ     ⎠⋅θ(t) + 2⋅⎝ℯ    - ℯ     ⎠⋅δ(t) + 2⋅⎝ℯ    - ℯ     ⎠⋅θ(t) + 2⋅⎜─ - ℯ    +  ─────⎟⋅δ(t) +  ⎜─ - ℯ    +  ─────⎟⋅δ    (t)
                                                                                                      ⎝2             2   ⎠          ⎝2             2   ⎠

h_fact = (sym)

    ⎛⎛   2⋅t    ⎞        ⎛ 2⋅t        t    ⎞  (1)              t     ⎞  -2⋅t
    ⎝⎝2⋅ℯ    - 2⎠⋅δ(t) + ⎝ℯ    - 2⋅ℯ  + 1⎠⋅δ    (t) + 2⋅ℯ ⋅θ(t)⎠⋅ℯ
    ─────────────────────────────────────────────────────────────────
                                    2

\frac{\left(\left(2 e^{2 t} - 2\right) \delta\left(t\right) + \left(e^{2 t} - 2 e^{t} + 1\right) \delta^{\left( 1 \right)}\left( t \
right) + 2 e^{t} \theta\left(t\right)\right) e^{- 2 t}}{2}
ans = (sym) θ(0)
h = (sym)

     -t
    ℯ   ⋅θ(t)

y = (sym)

    ⎛ t     -t⎞
    ⎜ℯ     ℯ  ⎟
    ⎜── - ───⎟⋅θ(t)
    ⎝2     2  ⎠

\left(\frac{e^{t}}{2} - \frac{e^{- t}}{2}\right) \theta\left(t\right)
```