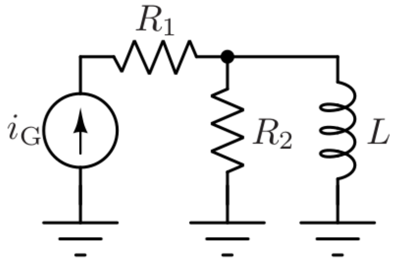
1. *(Јун 2021.)* Дат је континуалан сигнал $x(t) = 1 - 2\sin(\omega_0 t) + 3\cos(\omega_0 t) - 4\cos(4\omega_0 t)$, где је ω_0 непозната константа. Израчунати коефицијенте развоја тог сигнала у (а) тригонометријски и (б) комплексни Фуријеов ред. У колу са слике познато је $R_1 = 10R_2 = 5\,\mathrm{k\Omega}$, $L \to \infty$, а струја струјног генератора је $i_G = 1\,\mathrm{mA} \cdot x(t)$, где је $x(t)$ сигнал дефинисан у претходним тачкама. (в) Израчунати ефективне вредности напона на отпорницима V_{R_1} и V_{R_2}.



$x(t)$ периодичан са T.

$$x(t) = \boxed{A_\emptyset} + \sum_{k=1}^{\infty} \boxed{A_k} \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} \boxed{B_k} \sin(k\omega_0 t) \; ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

$$\int_0^T \cos(n\omega_0 t) \cdot \cos(m\omega_0 t) = \emptyset \quad \text{ако } n \neq m$$

$$\int_0^T x(t) \cdot dt = A_\emptyset \cdot \underbrace{\int_0^T dt}_{T} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \underbrace{\int_0^T \cos(k\omega_0 t)\, dt}_{0} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \underbrace{\int_0^T \sin(k\omega_0 t)\, dt}_{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_\emptyset = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt}$$

A_m ? $\Big| \cdot \cos(m\omega_0 t)$, $\int_0^T$:

$\boxed{k = m}$

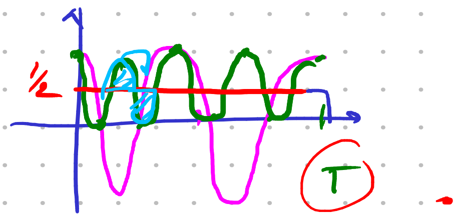
$$\int_0^T x(t) \cdot \cos(m\omega_0 t)\, dt = A_\emptyset \underbrace{\int_0^T \cos(m\omega_0 t)\, dt}_{0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^T \cos(k\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t)\, dt}_{=0}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} B_k \underbrace{\int_0^T \sin(k\omega_0 t) \cdot \cos(m\omega_0 t)\, dt}_{0}$$

$\Downarrow$

$$\int_0^T x(t) \cos(m\omega_0 t)\, dt = A_m \cdot \underbrace{\int_0^T \cos^2(m\omega_0 t)\, dt}_{T/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} A_m &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(m\omega_0 t) \cdot dt, \quad m \neq 0 \\ B_m &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(m\omega_0 t)\, dt \end{aligned}}$$



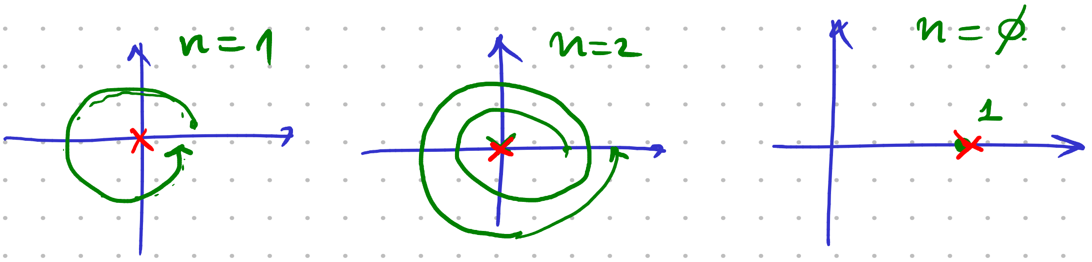
$$\cos^2 x = \boxed{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}\cos(2x)}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \Big| \cdot \; c_m ? \; e^{-jm\omega_0 t}$$

$k = m$ $\quad e^{j\emptyset} = 1$

$$\Rightarrow \int_0^T x(t) \cdot e^{-jm\omega_0 t}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_0^T e^{j(k-m)\omega_0 t}\, dt$$

$$\int_0^T e^{jn\omega_0 t}\, dt$$



$$\Rightarrow \int_0^T x(t)\, e^{-jm\omega_0 t}\, dt = c_m \int_0^T 1\, dt = T \cdot c_m \Rightarrow c_m = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, e^{-jm\omega_0 t}\, dt$$

$C_m = C_{-m}^*$, за реалан $x(t)$;

$$C_m = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\left[\cos(m\omega_0 t) - j\sin(m\omega_0 t)\right]dt =$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cos(m\omega_0 t)}}_{A_m/2} - j\underbrace{\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\sin(m\omega_0 t)\,dt}}_{B_m/2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} C_0 = A_0 \\ m \neq 0 \\ C_m = \dfrac{A_m - jB_m}{2} \end{array}}$$

$A_m = 2\,\mathrm{Re}\{C_m\}$

$B_m = -2\,\mathrm{Im}\{C_m\}$

$A[m] = A_m, \quad B[m] = B_n$

$$x(t) = \overset{1}{1} \overset{B_1}{-2}\sin(\omega_0 t) \overset{A_1}{+3}\cos(\omega_0 t) - 4\cos(4\omega_0 t) +$$

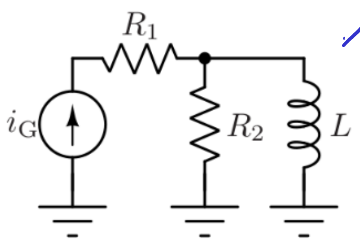
$A[0] = 1, \quad A[1] = 3, \quad A[4] = -4$

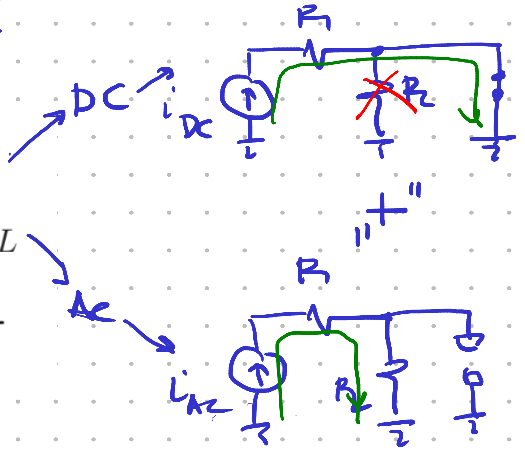
$B[1] = -2, \quad B[4] = \emptyset$

$$\underbrace{C[0] = 1, \quad C[1] = \frac{3+j2}{2}, \quad C[4] = -2.}_{X[k] = C[k]}$$

$A[k] = 1\cdot\delta[k] + 3\delta[k-1] + (-4)\delta[k-4]$; $\quad B[k] = -2\delta[k-1]$,

$C[k] = 1\,\delta[k] + \frac{3+j2}{2}\delta[k-1] + (-2)\,\delta[k-4]$.





$i_{R_1} = i_{DC} + i_{AC}$

$i_{R_2} = i_{AC}$

$i_{R_1} = x(t)\cdot 1\,\mathrm{mA}$;

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2.$$

← Парсевал

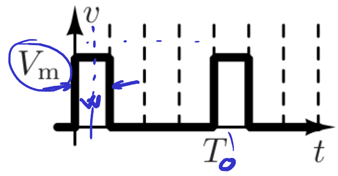
$$X_{ef} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2}$$

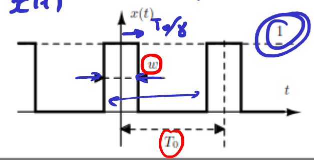
$x(t), \; X[k]; \; y(t), \; Y[k]$

$I_{R_1,ef} = X_{ef}\cdot 1\,\mathrm{mA}$

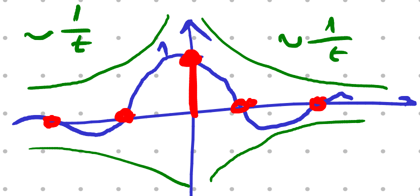
$$V_{R_1,ef} = R_1\cdot I_{R_1,ef} = 5\,\mathrm{V}\cdot\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2}$$

2. Дат је напонски сигнал $v = v(t)$ облика периодичне поворке униполарних правоугаоних импулса амплитуде $V_\mathrm{m} = 5\,\mathrm{V}$, као на слици. Фактор испуњености импулса је $D = 25\%$ а учестаност је $f = 1\,\mathrm{kHz}$. Одредити развој овог сигнала у комплексан Фуријеов ред, $V[k]$, на основном периоду T.



$x(t)$: $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{w}\right)$	$\frac{w}{T_0}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k\,w}{T_0}\right)$	$T_\mathrm{F} = T_0$
	$w = \frac{1}{4}T_0 \Rightarrow w/T_0 = 1/4$ $X[k] = \frac{1}{4}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{4}\right).$	
$x(t - t_0)$	$X[k]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t_0}$	

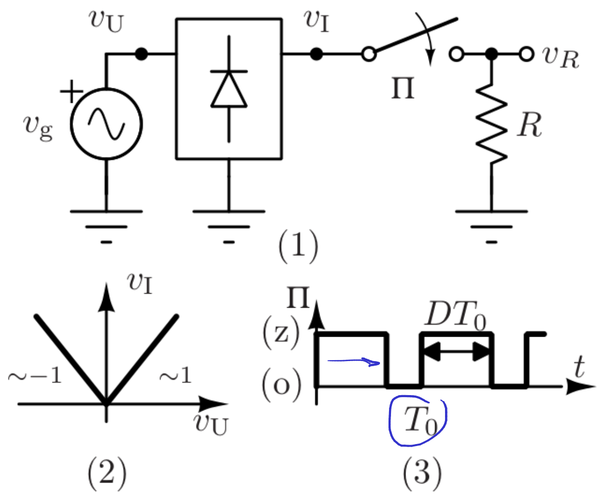
$\mathrm{sinc}\,t = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$



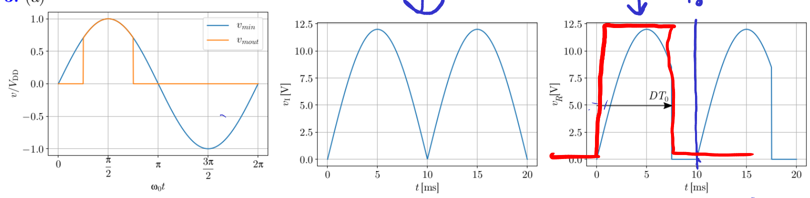
$\frac{1}{4}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{4}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0\frac{T_0}{8}} = \frac{1}{4}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{4}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \boxed{V[k] = \frac{V_\mathrm{m}}{4}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{4}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{\pi}{4}}}$

($\omega_0 = 2\pi/T_0$)

3. У колу са слике (1) познат је напон побудног генератора $v_\mathrm{g} = V_\mathrm{m}\sin(\omega t)$ где су $V_\mathrm{m} = 12\,\mathrm{V}$ и $\omega = 100\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, а прекидач је идеалан. Преносна карактеристика нелинеарног кола са диодама приказана је на слици (2). Прекидач се управља као што је приказано на слици (3) при чему је фактор испуне $0 < D < 1$ а T_0 је основни период напона v_I. Скицирати (а) напоне у тачкама v_U, v_I и v_R. Одредити (б) спектралне коефицијенте напона v_R, $V_R[k]$.



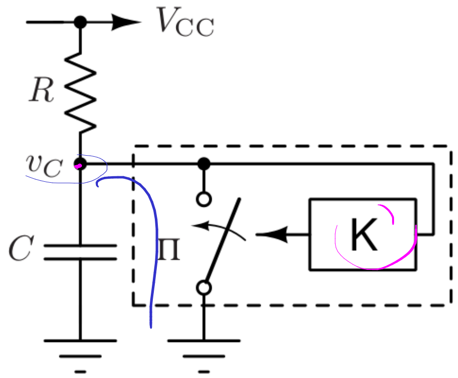
3. (а)

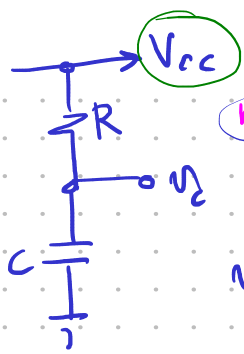


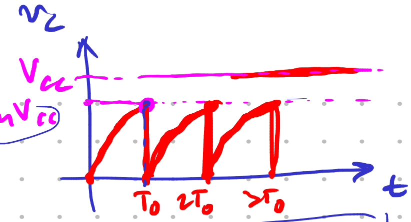
(б) $V_\mathrm{I}[k] = \dfrac{(\cos(\pi D) + \mathrm{j}2k\sin(\pi D))\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kD} - 1}{\pi(4k^2 - 1)}$

$x(t)\cdot y(t) \xrightarrow{FS} X[k] * Y[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]\,Y[k-n]$

4. У колу са слике познато је $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 1\,\mathrm{\mu F}$ и напон напајања $V_\mathrm{CC} = 5\,\mathrm{V}$. Систем „K“ управља идеалним прекидачем П на основу напона v_C. Прекидач П је иначе отворен, уколико напон v_C достигне вредност mV_CC, где је $0 \leqslant m \leqslant 1$ позната константа, контролни систем „K“ тренутно и краткотрајно затвара прекидач. У почетном тренутку је $v_\mathrm{C}(0) = 0$. Одредити (а) напон на кондензатору у зависности од времена и (б) одредити спектралне коефицијенте устаљене периодичне компоненте тог напона на основном периоду.







$m\cancel{V_{cc}} = \cancel{V_{cc}}\left(1 - e^{-T_0/\tau}\right)$

$m = 1 - e^{-T_0/\tau} \Rightarrow e^{-\frac{T_0}{\tau}} = 1 - m \Rightarrow$

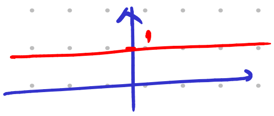
$v_c = V_{cc}\underbrace{\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}_{x(t)}$

$\Rightarrow -\frac{T_0}{\tau} = \ln(1-m) \Rightarrow T_0 = -\tau\ln(1-m).$

$\Rightarrow \boxed{T_0 = \tau\ln\frac{1}{1-m}}$

$x(t) = \underbrace{1}_{x_1(t)} - \underbrace{e^{-t/\tau}}_{x_2(t)} \Rightarrow X[k] = X_1[k] - X_2[k].$

$x_1(t) = 1 \Rightarrow \boxed{X_1[k] = \delta[k]}$

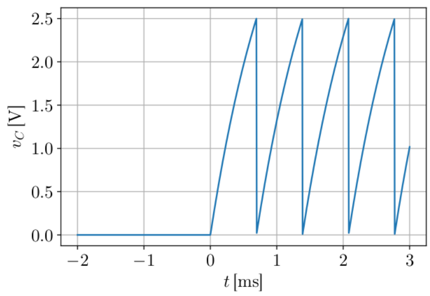


$$X_2[k] = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} e^{-\left(\frac{1}{\tau}+jk\omega_0\right)t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{t=0}^{T_0} e^{-\left(\frac{1}{\tau}+jk\omega_0\right)t} \cdot \frac{d\left(-\left(\frac{1}{\tau}+jk\omega_0\right)t\right)}{-\left(\frac{1}{\tau}+jk\omega_0\right)} = \frac{e^{-\left(\frac{1}{\tau}+jk\omega_0\right)t}\Big|_0^{T_0}}{-\left(\frac{1}{\tau}+jk\omega_0\right)T_0} \Rightarrow$$

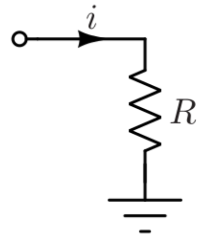
$$= \frac{e^{-\left(\frac{1}{\tau}+jk\omega_0\right)\cdot T_0} - 1}{-\left(\frac{1}{\tau}+jk\omega_0\right)T_0} = \boxed{\frac{1 - e^{-\left(\frac{1}{\tau}+jk\omega_0\right)T_0}}{\left(\frac{1}{\tau}+jk\omega_0\right)T_0}}.$$

4. (a) Пример за $m = \frac{1}{2}$



(б) $V_C[k] = V_{CC}\left(\delta[k] - \frac{m}{j2\pi k - \ln(1-m)}\right)$

8.[1] У мрежи са слике позната је отпорност отпорника $R = 3\,\text{k}\Omega$ и струја



$$\boxed{i = \frac{0{,}75\, I_0}{1{,}25 - \cos(\omega t)}},$$

$\cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$

$e^{j\omega t} = z$; $\cos\omega t = \frac{z + z^{-1}}{2}$

где су $I_0 = 1\,\text{mA}$ и $\omega = 10^3\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Израчунати средњу снагу губитака на отпорнику R.

Неки формални развоји.

За $|a| < 1$ важе развоји на основном периоду $T_F = T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$

$a = \frac{1}{2}$

$$\frac{a\sin(\omega t)}{1 - 2a\cos(\omega t) + a^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \sin(k\omega t),$$

$$\boxed{\frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos(\omega t) + a^2}} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(k\omega t),$$

$$\frac{1 - a\cos\omega t}{1 - 2a\cos(\omega t) + a^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(k\omega t),$$

$i(t) = I_0 + 2 I_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cos(k\omega t).$

Триг Ф.Р. $\begin{cases} A[0] = I_0 \\ A[k] = 2 I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{cases}$

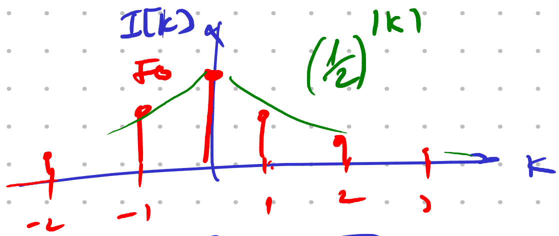
Компл. Ф.Р. $\begin{cases} I[0] = A[0] = I_0 \\ I[k] = \frac{A[k] - \cancel{jB[k]}}{2} = \frac{1}{2} A[k] \end{cases}$ $k > 0$

$I[0] = I_0$

$I[k] = I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^k$ $k > 0$

$I[-k] = I^*[k]$

$I[-k] = I[k]$

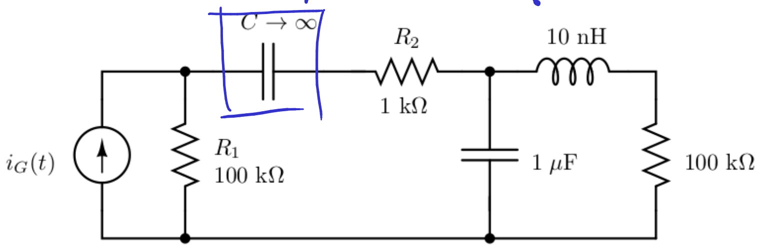


$$\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |I[k]|^2 = |I[0]|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^k I_0\right|^2 = \frac{5}{3} I_0^2$$

$P_R = R\frac{5}{3}I_0^2 \Rightarrow \boxed{P_R = 5\,mW}$.

$C = 100\mu F \leftarrow$ збирка

9.[2] У колу са слике позната је струја струјног генератора у дата облику $i_G(t) = I_m\boxed{(1+\cos(\omega_0 t)\sin^2(\omega_0 t))}$ $x(t)$ где су $I_m = 1\,\mathrm{mA}$ и $\omega_0 = 200\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Одредити развој струје i_G у Фуријеов ред на основном периоду. Израчунати средње снаге отпорника (б) R_1 и (в) R_2. У колу је успостављен сложенопериодичан режим.



$x(t) = 1 + \cos(\omega_0 t)\sin^2(\omega_0 t)$

$z = e^{j\omega_0 t}$, $\cos\omega_0 t = \frac{z+z^{-1}}{2}$

$z^k = e^{jk\omega_0 t}$

$\sin(\omega_0 t) = \frac{z-z^{-1}}{j2}$.

$= 1 + \frac{z+z^{-1}}{2}\cdot\frac{(z-z^{-1})^2}{-4} =$

$= 1 - \frac{1}{8}(z+z^{-1})(z^2+z^{-2}-2)$

	z^2	z^{-2}	-2
z	z^3	z^{-1}	$-2z^1$
z^{-1}	z^1	z^{-3}	$-2z^{-1}$

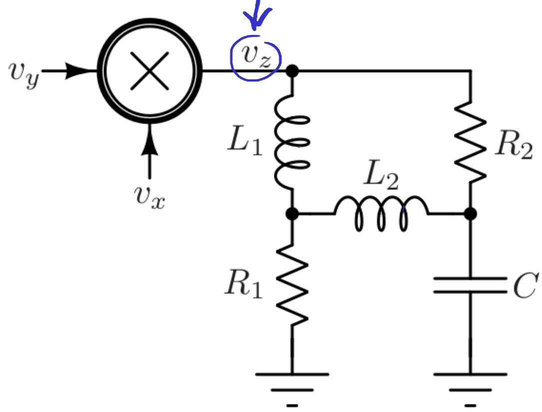
$= 1z^0 - \frac{1}{8}(z^3 - z - z^{-1} + z^{-3})$

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\cdot z^k$

$\boxed{X[k] = \delta[k] - \frac{1}{8}(\delta[k-3] - \delta[k-1] - \delta[k+1] + \delta[k+3])}$

10.[3] У колу са слике познато је $L_1 = L_2 \to \infty$, $R_1 = 2R_2 = 100\,\Omega$ и $C \to \infty$. Употребљен је идеални множач (тзв. мешач), нелинеаран систем без меморије са два улаза и једим излазом, чија је карактеристика преноса одређена изразом $v_z = \frac{v_x \cdot v_y}{V_0}$, где је $V_0 = 1\,\mathrm{V}$. Познати су спектри улазних напона $V_x[k] = V_0(\mathrm{u}[k+2] - \mathrm{u}[k-3])$ и $V_y = V_0(\delta[k+2] + \delta[k-2])$ чији су основни периоди једнаки. Израчунати средње снаге отпорника R_1 и R_2.

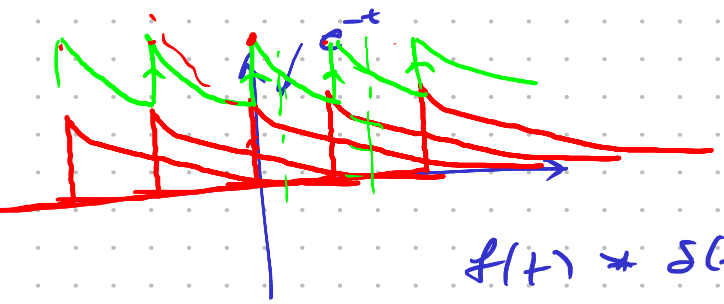
$V_z[k]$



$V_z[k] = \frac{V_x[k] * V_y[k]}{V_0}$.

$Ш_T(t) * (e^{-t}u(t)) = (e^{-t}u(t)) * \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t+k\cdot 1)$

$x_{max} = x(t=0^+)$



$f(t) * \delta(t-T) = f(t-T)$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(0^+-k)} \overbrace{u(0^+-k)}^{=1} \quad @\ t=0^+$$

$0^+-k>0$

$k<0^+$

$-\infty,\ 0$

$$\sum_{k=-\infty}^{0} e^{k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} = \frac{1}{1-\frac{1}{e}}$$

$$= \frac{e}{1-e}.$$