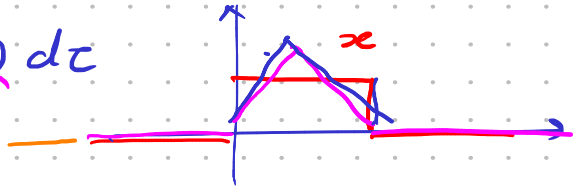
[3п] (г) Дат је сигнал $x(t) = \cos(t)(\mathrm{u}(t-1) - \mathrm{u}(t-5))$. Ако је $y(t) = x(t) * x^2(t)$, израчунати вредност $a = (y(1)+1)\cdot(y(11)-1)$.

4

$-\infty$

$0 \quad 0 \quad \infty \quad > -1$

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$



$$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot x(t-\tau)\, d\tau \sim$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(u(\tau-1) - u(\tau-5)\right)\cdot\left(u(t-\tau-1) - u(t-\tau-5)\right)$$

$1 < \tau < 5$

$1 < t-\tau < 5$

$1+\tau < t < 5+\tau$

$\boxed{2 < t < 10}$

8

7. *(Септембар 2021)* Нека је дат систем једначина
$$\begin{cases} \left(\mathrm{D}^2 + \frac{1}{25}\right) g(t) = \mathrm{D}x(t) \\ y(t) = g(t)\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT - \tau) \end{cases}$$
, где је $T = 20\pi$, а D је оператор диференцирања. Дати систем једначина описује каузалан *LTI* систем чији је једини улаз $x(t)$ а једини излаз $y(t)$. Израчунати **минималну** вредност параметра $\tau > 0$ тако да је посматрани систем стабилан у *BIBO* смислу.

BIBO: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$; $\quad \left(D^2 + \frac{1}{25}\right) g'(t) = \delta(t)$

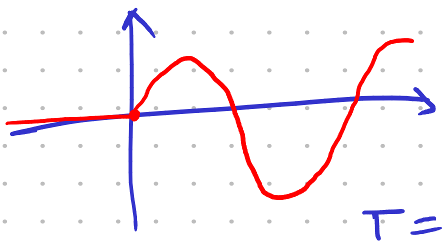
$P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{25} = 0 \qquad \lambda^2 = -\frac{1}{25} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{j}{5}$

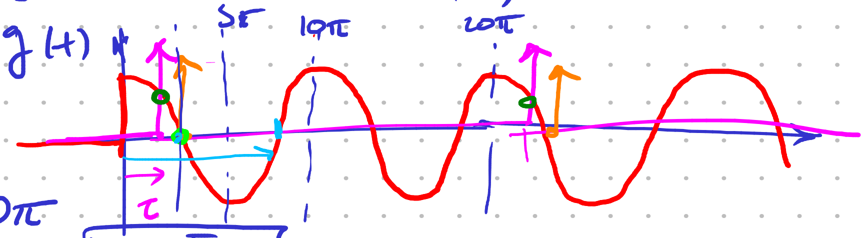
$g'(t) = A \sin\left(\frac{t}{5}\right) + B\cos\left(\frac{t}{5}\right) \qquad Dg'(0^+) = 1, \quad \boxed{g'(0^+) = 0}$

$g'(0) = B\cos\left(\frac{t}{5}\right) \Rightarrow \boxed{B = 0} \qquad Dg' = \frac{A}{5}\cos\left(\frac{t}{5}\right) \xRightarrow{t=0} 1 = \frac{A}{5} \Rightarrow A = 5$

$g'(t) = 5\sin\left(\frac{t}{5}\right)\cdot u(t)$

$g(t) = D\, g'(t) = \cos\left(\frac{t}{5}\right) u(t)$





$T = \frac{2\pi}{\omega} = 10\pi$

$\boxed{\tau = \frac{5}{2}\pi}$

2. (а) **[1п]** Ако је систем описан једначином $\mathrm{D}y[n] - \Delta x[n-1] = 3x[n+1] + 2\mathrm{D}x[n-1]$ одредити његов импулсни одзив, $h[n]$;

(б) **[6п]** Одредити принудни одзив, y_f, система описаног диференцном једначином

$$(n+3)(n+2)y[n] - (n+2)(n+1)y[n-1] = x[n]$$

на побуду $x[n] = 11\,\mathrm{u}[n]$.

(в) **[2п]** Ако је одзив дискретног LTI система на побуду облика $x[n] = 4\,\mathrm{u}[n]$, једнак $y[n] = 2^n\,\mathrm{u}[n]$, одредити импулсни одзив тог система, $h[n]$.

(а)	(б)	(в)
$h[n] = 3\delta[n+2] + \delta[n+1] - \delta[n] + 2\delta[n-1]$	$y_f[n] =$	$h[n] = \frac{1}{8}\left(2^n u[n] + \delta[n]\right)$

$x[n] = \boxed{4\,u[n]} \Rightarrow y[n] = 2^n u[n]$

$\delta[n] = u[n] - u[n-1] = \nabla u[n]$

$\delta[n] = \frac{1}{4}\nabla x[n] \Rightarrow h[n] = \frac{1}{4}\nabla 2^n u[n]$

$\delta[n] = \nabla \frac{1}{4}\left(\boxed{4u[n]}\right)$

$x(t) = u(t) \Rightarrow y(t)$

$h(t) = \frac{dy(t)}{dt}$

7. Дискретни систем описан је диференцном једначином $2y[n+2] - y[n+1] - y[n] = x[n]$. Одредити (а) импулсни одзив овог система Одредити (б) одзив на побуду и (в) сопствени одзив одзив система ако су дати побуда и помоћни услови:

$\boxed{(i)\;\; x[n] = (-2)^{-n}\,\mathrm{u}[n],\; y[1]=1,\; y[0]=0}$

$\boxed{(ii)\;\; x[n] = (-2)^{-n}\,\mathrm{u}[n-3],\; y[1]=1,\; y[0]=0}$

$\boxed{(iii)\;\; x[n] = (-2)^{-n}\,\mathrm{u}[n],\; y[0]=2,\; \lim_{n\to\infty} y[n] = 4}$

преиницијална!

$P(\lambda) = 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda \in \{1, -\frac{1}{2}\}.$

$y_h = C_1 + C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n;$

$\boxed{2y[n] - y[n-1] - y[n-2] = x[n-2]}$

(i) $x[n] = (-2)^{-n}u[n], \; n \geq 0$

$y_s = C_1^{(s)} + C_2^{(s)}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \; y_s[1]=1, \; y_s[0]=0 \leftarrow$ Сопствени

$y_f = C_1^{(f)} + C_2^{(f)}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + y_{f,p}[n], \; y_f[1]=0, \; y_f[0]=0$

$y_{f,p}[n] = \frac{(-2)^{-n}}{P(-\frac{1}{2})}.$

$\cos(\Omega n) = e^{j\Omega n} = \left(e^{j\Omega}\right)^n$

$P(e^{j\Omega}) \xrightarrow{\mathrm{Re}}$

(iii)

$y[n] = C_1 + C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{(-2)^{-n}}{\cancel{P(-\frac{1}{2})}\; 1}$

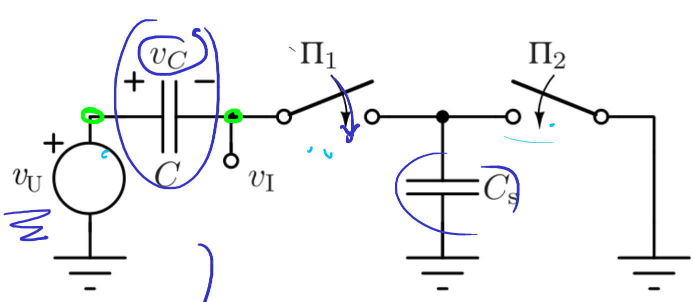
$y[0]=2 \qquad \boxed{y[\infty]=4} \qquad y[\infty] = \boxed{C_1 = 4}$

$y[n] = 4 + \boxed{C_2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \boxed{\frac{(-2)^{-n}}{1}}$

$y_f[1]=0, \quad y_f[0]=0.$

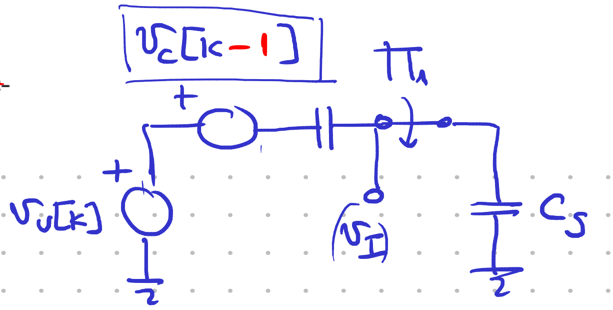
$y_f = C_1 + C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{(-2)^{-n}}{1}$

8. У колу са слике познато је $\boxed{C = C_s = 100\,\mathrm{pF}}$. У почетном тренутку оба кондензатора су неоптерећена. Прекидачи су идеални и затварају се наизменично, *краткотрајно*, и то прво прекидач Π_1 па прекидач Π_2. Напон генератора v_U не мења вредност осим када је прекидач Π_2 затворен.



(а) Одредити диференцну једначину система чији је једини улаз напон побудног генератора $\boxed{v_U[k]}$ а једини излаз напон $v_I[k]$ одређени након $k \geqslant 0$ затварања прекидача Π_1.

(б) Одредити импулсни одзив добијеног система и ~~ис-питати његову асимптотску стабилност~~.



$$v_I[k] = \frac{v_U[k] - v_C[k-1]}{2}$$

$$\boxed{v_C[k] = v_U[k] - v_I[k]}$$

$$2v_I[k] = v_U[k] - v_U[k-1] + v_I[k-1].$$

$$\boxed{2v_I[k] - v_I[k-1] = v_U[k] - v_U[k-1]} = (1-D)v_U[k] \qquad v_U[k] = \delta[k]$$

$$\boxed{p(\epsilon)}$$

$$2p[k] - p[k-1] = \delta[k] \qquad v_I[k] = (1-D)\,p[k].$$

$$2 - \lambda^{-1} = 0 \Rightarrow \lambda^{-1} = 2 \Rightarrow \boxed{\lambda = \tfrac{1}{2}}$$

$$p[k] = C\left(\tfrac{1}{2}\right)^n; \qquad \delta[k<0] = 0 \Rightarrow \boxed{p[k<0] = 0.}$$

$$k=0:\quad 2p[0] - \cancel{p[-1]}^{\,0} = \delta[0] = 1 \Rightarrow \boxed{p[0] = \tfrac{1}{2}.}$$

$$p[0] = C\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^0 = C = \tfrac{1}{2} \Rightarrow p[k] = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k u[k]$$

$$v_I[k] = (1-D)\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+1} u[k]\right] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+1} u[k] - \left(\tfrac{1}{2}\right)^k u[k-1].$$

$$u[k] = \delta[k] + u[k-1] \qquad = \underbrace{\cancel{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+1}}\,\delta[k]}_{k=0} + \boxed{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+1} u[k-1]} \boxed{-\left(\tfrac{1}{2}\right)^k u[k-1]}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+1} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k\left(\tfrac{1}{2} - 1\right) = -\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\delta[k] - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+1} u[k-1]$$

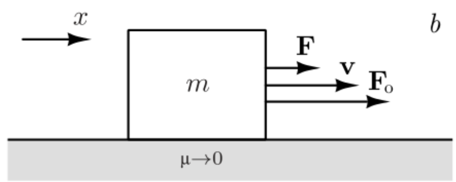
$$f(t) * \delta(t) = f(t) \qquad f[n] * \delta[n] = f[n]$$

побуда   имп. одз

$$\boxed{f(t)} * \underbrace{\delta(t-1)} = \boxed{f(t-1)},$$

$$\underbrace{\delta(n-1)}_{h} * \underbrace{\boxed{\delta(n-3)}}_{x} = \delta[n-4].$$

4. *(Фебруар 2022, мод.)* На слици је приказан крути блок масе $m = 100\,\mathrm{g}$ постављен на глатку подлогу по којој може да клизи без трења ($\mu \to 0$). На блок делује вектор стране силе $\mathbf{F} = F(t)\,\mathbf{i}_x$ а тренутна брзина блока је $\mathbf{v} = v(t)\,\mathbf{i}_x$. Сила отпора средине која делује на блок при кретању је једнака $\mathbf{F}_o = -b\mathbf{v}$, где је $b = 1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$. На блок не делују друге силе. Посматра се систем чији је једини улаз алгебарски интензитет стране силе која делује на блок $F(t)$ а једини излаз алгебарски интензитет брзине блока $v(t)$. У почетном тренутку систем је у мировању, $v(0) = 0$.



(а) Написати оператор датог система.

~~(б)~~ Испитати *BIBO* стабилност датог система на основу корена карактеристичног полинома одговарајуће диференцијалне једначине.

(в) Одредити одзив датог система на импулсну побуду $\boxed{F(t) = P_0\delta(t)}$, где је $P_0 = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$, и скицирати временски дијаграм тог одзива.

(г) Израчунати кружну учестаност простопериодичне побуде ω_0 тако да устаљени одзив фазно касни у односу на ту побуду за $\phi = \frac{\pi}{4}$.

$F_0 \cos(\omega_0 t)$

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_o \Rightarrow m\cdot\vec{a} = F(t)\,\vec{i}_x - b\,v(t)\,\vec{i}_x, \quad \vec{a} = a(t)\,\vec{i}_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\,a(t) = F(t) - b\,v(t), \quad a(t) = D\,v(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\cdot D\,v(t) = F(t) - b\,v(t) \Rightarrow (mD + b)\,v(t) = F(t) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{mD+b}}\,F(t) = v(t); \qquad \boxed{L = \frac{1}{mD+b}}$$

(в) $\underbrace{(mD + b)}^{n=1}\,v(t) = P_0\,\delta(t)$ $\qquad \boxed{v(t) = \frac{P_0}{m}\,e^{-\frac{b}{m}t}\,u(t)}$

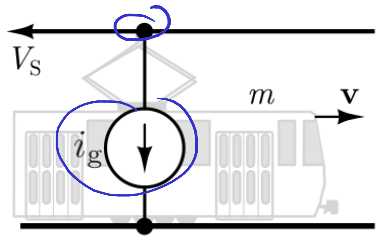
$$P(D) = 0 : \; D = -\frac{b}{m}; \qquad v(0^+) = \frac{P_0}{m}$$

$$v(t) = \underbrace{A\,e^{-\frac{b}{m}t}}, \quad v(0) = A = \frac{P_0}{m} \qquad v_p(t) = \mathrm{Re}\left\{\boxed{\frac{F_0 e^{j\omega_0 t}}{P(j\omega_0)}}\right\}$$

$$\frac{e^{j\omega_0 t}}{j\omega_0 m + b} = \frac{e^{j\omega_0 t}}{\sqrt{b^2+(\omega_0 m)^2}\; e^{j\arctan\frac{\omega_0 m}{b}}} = \frac{e^{j\left(\omega_0 t - \arctan\frac{\omega_0 m}{b}\right)}}{\sqrt{b^2+(\omega_0 m)^2}}$$

$$v_{us}(t) = \frac{F_\phi}{\sqrt{b^2+(\omega_0 m)^2}}\cdot \cos\Big(\omega_0 t - \underbrace{\arctan\frac{\omega_0 m}{b}}_{\frac{\pi}{4}}\Big) \qquad \frac{\omega_0 m}{b} = 1 \qquad \boxed{\omega_0 = \frac{b}{m}}.$$

5. На слици приказан је упрошћени модел електричног трамваја масе $m = 20\,\mathrm{t}$ који се креће по равној прузи. Трамвај се напаја из контактне мреже константног напона $V_\mathrm{S} = 650\,\mathrm{V}$. Мотор трамваја се представља идеалним струјним генератором, струје $i_\mathrm{g} = i_\mathrm{g}(t)$, која се може контролисати. Претпоставити да се сва снага коју контактна мрежа предаје мотору, без губитака, претвара у механичку енергију посредством механичке силе. На трамвај делује и сила отпора ваздуха дата изразом $\boxed{\mathbf{F}_\mathrm{ov} = -b\mathbf{v},}$ где је $b = \frac{5}{18}\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{km/h}}$ а $v = v(t)$ је алгебарски интензитет брзине трамваја.



Посматра се систем чији једини улаз представља струја i_g а једини излаз тренутна брзина v трамваја.

(а) Ако је познато да се тај систем може представити као каскадна (серијска) веза једног *LTI* система чији је импулсни одзив $h(t)$ и једног нелинеарног система без меморије чија је статичка преносна карактеристика $f = f(u)$, одредити једно решење за $h(t)$ и $f(u)$.

(б) Испитати да ли је посматрани систем у целини линеаран и да ли је временски инваријантан.

(в) Нацртати временски дијаграм тренутне брзине трамваја ако је управљачка струја дата изразом $\boxed{i_\mathrm{g} = I_0 \,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)}$, где су $I_0 = 250\,\mathrm{A}$ и $T = 10\,\mathrm{s}$, а трамвај полази из мировања.

$$i_g \longrightarrow \boxed{LTI} \xrightarrow{E_k} \boxed{f(u)} \longrightarrow$$

$$P_g = F\cdot v$$

$$P_g = V_s \cdot \boxed{i_g}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$$

$$P_{ov} = -bv\cdot v = -bv^2$$

$$\frac{dE_k}{dt} = P_g + P_{ov} = V_s\cdot i_g - bv^2 = V_s i_g - b\frac{2}{m}\cdot\overbrace{\boxed{\frac{mv^2}{2}}}^{E_k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dE_k}{dt} = V_s i_g - \frac{2b}{m}E_k}\;; \qquad \boxed{f(u) = \sqrt{\frac{2u}{m}}}$$