Сигнали и системи (19Е042СИС) 09. март 2022.

Вежбе (II) – Задаци

2 Континуални и дискретни сигнали

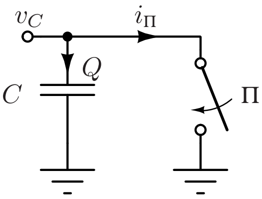
Дираков делта импулс и Хевисајдова одскочна функција

1. Скицирати временске дијаграме следећих сигнала

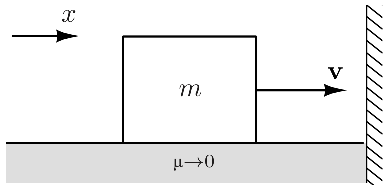
(а) $x(t) = \delta(t^2 - 1)$; (б) $x(t) = \delta(\sin t)$; (в) $x(t) = \mathrm{rect}(t) \cdot \mathrm{tri}(t) \cdot \mathrm{u}(t)$,

где је $\delta(t)$ Дираков импулс.

2. У колу са слике познато је $C = 1\,\mu\mathrm{F}$. Идеалан прекидач П је отворен, а кондензатор је оптерећен количином наелектрисања $Q = 1\,\mu\mathrm{C}$. У тренутку $t_0 = 0$ затвара се прекидач. Одредити $v_C = v_C(t)$ и $i_\Pi = i_\Pi(t)$, за $-\infty < t < \infty$.



3. На слици је приказано круто тело масе m које може да се креће по подлози без трења. Брзина тела дата је као $\mathbf{v} = v(t)\,\mathbf{i}_x$. У тренутку $t_0 = 0$ блок се апсолутно еластично судара са непокретним зидом након чега се креће брзином $v(t) = -v_0$. (а) Одредити и изразити $v(t)$ за $-\infty < t < \infty$. (б) Одредити и нацртати временски дијаграм силе којом зид делује на блок $\mathbf{N} = N(t)\mathbf{i}_x$.



4. Нека је дат континуалан сигнал

$$x(t) = \mathrm{e}^{\sigma t} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \right) \mathrm{u}(t + \varepsilon) \qquad (0 < \varepsilon < T).$$

(а) Одредити услов које треба да задовољава параметар $\sigma \in \mathbb{R}$ тако да интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{d}t$ конвергира, и у том случају (б) израчунати тај интеграл.

Основне трансформације сигнала

5. Нацртати следеће континуалне сигнале:

(а) $x(t) = 2\mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-1)$, и $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$;

(б) $x(t) = \mathrm{u}(t+2) - 2\mathrm{u}(t) + \mathrm{u}(t-1)$, и $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$;

(в) $x(t) = \cos(\pi t)[\delta(t+1) + \delta(t-1)]$, и $\int\limits_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$;

(г) $x(t) = \text{Ш}_T(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{n} \delta(t - kT)$,

где су $\mathrm{u}(t)$ и $\delta(t)$ јединична одскочна функција и Дираков импулс редом.

6. Нацртати следеће дискретне сигнале $x = x[n]$:

(а) $x[n] = \mathrm{u}[n] - 2\mathrm{u}[n-4]$, и $y[n] = x[n] - x[n-1]$;

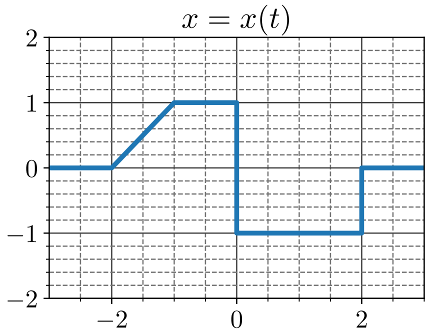
(б) $x[n] = n^2(\delta[n+2] - 2\delta[n-2])$, и $\sum\limits_{k=-\infty}^{n} x[k]$

(в) $x[n] = (1-n)(\mathrm{u}[n+2] - \mathrm{u}[n-3])$

(г) $x[n] = \cos\dfrac{\pi n}{N} \left(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] \right) \mathrm{u}[n]$, за $N = 3$;

где су $\mathrm{u}[t]$ и $\delta[n]$ дискретни јединични низ и дискретни јединични импулс редом.

7. Сигнал $x(t)$ дат је на слици. На истој слици скицирати његову парну и непарну компоненту.



Парност сигнала

8. Одредити парну и непарну компоненту континуалних сигнала $x = x(t)$ за:

(а) $x(t) = \mathrm{e}^{kt}$; (б) $x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$; (в) $x(t) = \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{3}\right)$,

где су k и ω_0, познате реалне константе.

9*. Полазећи од дефиниција парне и непарне функције извести услов за парност сигнала

$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \cdot x_3(t) \cdots x_n(t) = \prod_{k=1}^{n} x_k(t),$$

где је сваки од сигнала $x_k(t)$ за $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ или паран или непаран.

10.[1] Применом својстава парних и непарних сигнала израчунати вредност интеграла

(а) *(јул 2021, К-П1а)* $I_0 = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos t}{1+\mathrm{e}^{\sin 2t}}\mathrm{d}t$; (б) *(јун 2021, К-П3б)* $I_0 = \displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1-t+2t^3-t^5+2t^7}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

Периодичност сигнала

11.[2] Утврдити да ли су следећи сигнали периодични и за оне који јесу израчунати основни период:

(а) $x(t) = \cos(3t) + \sin(5t)$; (б) $x(t) = \cos(6t) + \sin(\pi t)$; (в) $x(t) = \cos(6t) + \sin(8t) + \mathrm{e}^{\mathrm{j}2t}$.

12. Реална дискретна синусоида дефинисана је у облику $x[n] = A\cos(\Omega_0 n + \phi)$, где је $A \geqslant 0$, $|\Omega_0| \leqslant \pi$ и $|\phi| \leqslant \pi$. Ако дата секвенца

(а) $\{0,1,0,-1\}$; (б) $\{0,1,1,0,-1,-1\}$; (в) $\{1,0,-1,-\sqrt{2},-1,0,1,\sqrt{2}\}$

представља основни период ове синусоиде, при чему је први члан $x[0]$, одредити параметре A, Ω_0 и ϕ.

Енергија и снага сигнала

13. Познато је да су енергије сигнала $x = x(t)$ и $y = y(t)$, W_x и W_y редом, коначне. Одредити (а) услов, који треба да задовољавају сигнали x и y, под којим је снага сигнала $z = x(t) + y(t)$ једнака $W_z = W_x + W_y$. На основу резултата из претходне тачке (б) доказати једнакост:

$$W\{x\} = W\{\mathrm{Ev}\{x\}\} + W\{\mathrm{Od}\{x\}\},$$

[1] Видети и задатак 1.13 из референтне збирке задатака.
[2] Видети и задатак 1.25. из референтне збирке задатака.

где $W\{x\}$ означава енергију сигнала x.

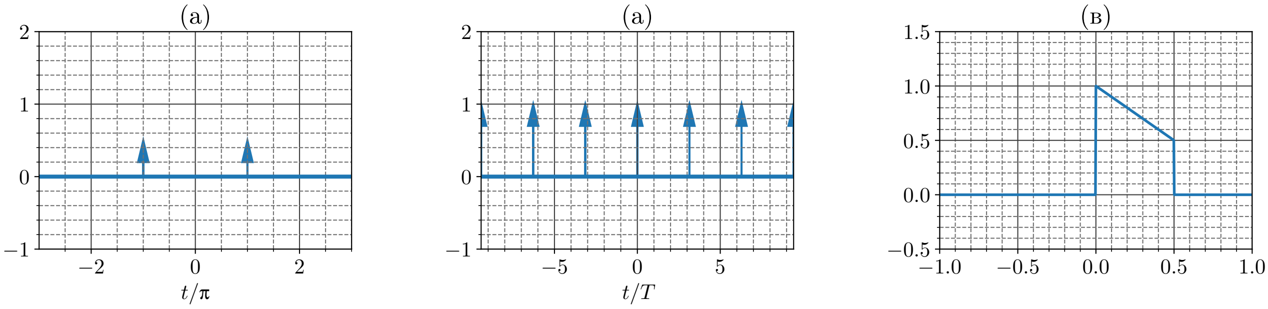
14. Извести израз за снагу сигнала:

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \cdots + a_n \cos(n\omega_0 t), \qquad (n \in \mathbb{N})$$

где су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ познате реалне константе.

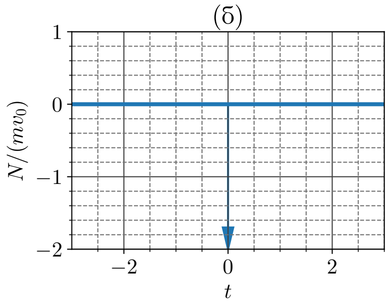
Решења

1.



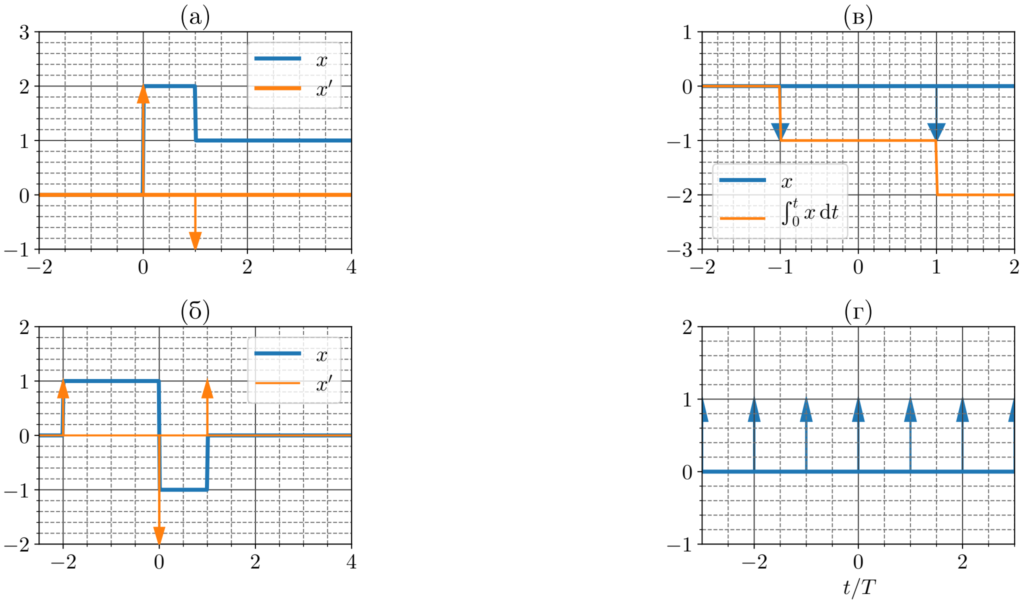
2. $v_C = 1\,\mathrm{V}\,\mathrm{u}(-t) = 1\,\mathrm{V}(1 - \mathrm{u}(t)), \quad i_\Pi(t) = 1\,\mu\mathrm{C}\,\delta(t)$

3. (а) $v(t) = v_0(1 - 2\mathrm{u}(t)), \quad N(t) = -2mv_0\delta(t)$

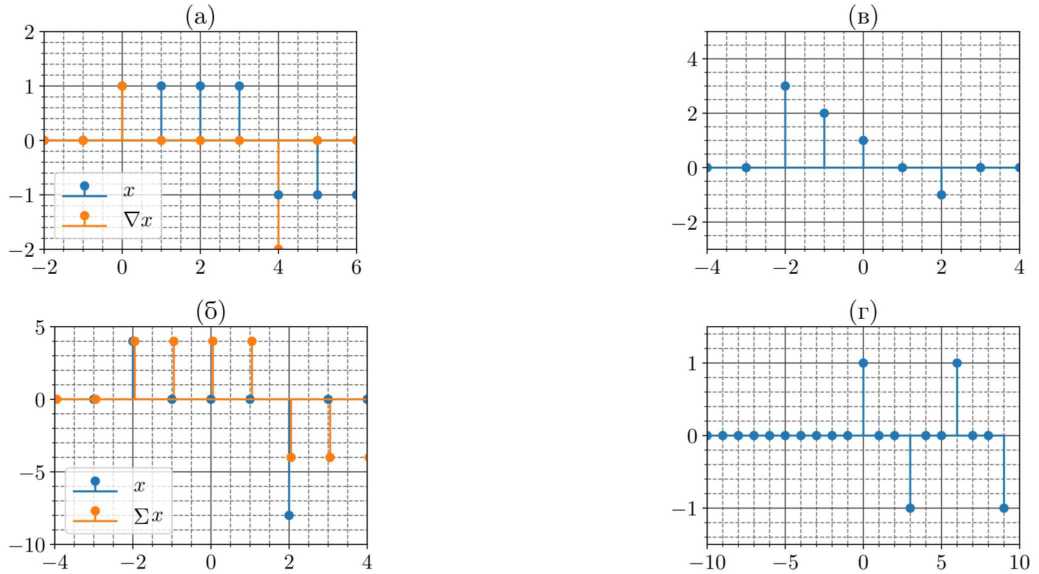


4. (а) $\sigma < 0$, $\qquad$ (б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{\sigma T}}$

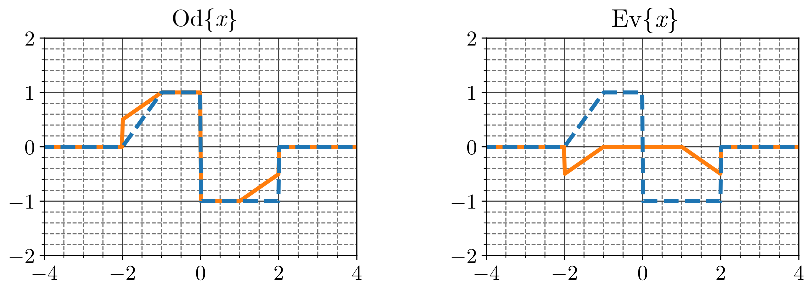
5.



6.



7.



8. (а) $\mathrm{Ev}\{\mathrm{e}^{kt}\} = \cosh(kt)$, $\mathrm{Od}\{\mathrm{e}^{kt}\} = \sinh(kt)$, (б) $\mathrm{Ev}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\} = \cos(\omega_0 t)$, $\mathrm{Od}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\} = \mathrm{j}\sin(\omega_0 t)$

(в) $\mathrm{Ev}\left\{\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{3}\right)\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\omega_0 t)$, $\mathrm{Od}\left\{\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{3}\right)\right\} = \frac{1}{2}\sin(\omega_0 t)$,

9. Сигнал је паран акко је број непарних сигнала из скупа $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ паран.

10. (а) $I_0 = 1$, (б) $I_0 = 2\sqrt{3}$

11. (а) Да, $T = 2\pi$, (б) Не. (в) Да, $T = \pi$.

12. (а) $\Omega_0 = \frac{\pi}{2}$, $\phi = -\frac{\pi}{2}$, $A = 1$ (б) $\Omega_0 = \frac{\pi}{3}$, $\phi = -\frac{\pi}{2}$, $A = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (в) $\Omega_0 = \frac{\pi}{4}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$, $A = \sqrt{2}$

13. (а) Треба да важи $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)\,\mathrm{d}t = 0$, (б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathrm{Ev}\{x(t)\}\mathrm{Od}\{x(t)\}}_{\text{Непарна функција}}\,\mathrm{d}t = 0$ одакле закључак непосредно следи.

14. $P = a_0^2 + \dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{2}$