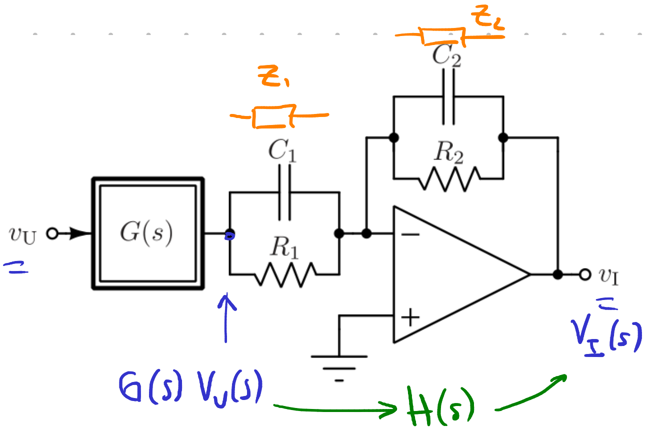
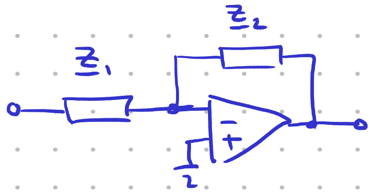
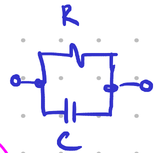
2. *(Јул 2021)* У колу са слике познато је $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, операциони појачавач је идеалан а употребљен је и напонски појачавач чија је функција преноса $G(s) = \frac{s+\omega_1}{s+\omega_2}$, где су $\omega_1 = 100\omega_2 = 1\,\frac{\mathrm{Mrad}}{\mathrm{s}}$. Ако амплитудска фреквенцијска карактеристика система не зависи од учестаности и износи $|H(\mathrm{j}\omega)| = \left|\frac{V_\mathrm{I}(\mathrm{j}\omega)}{V_\mathrm{U}(\mathrm{j}\omega)}\right| = 50$, израчунати: (а) отпорност R_2; (б) однос капацитивности $\frac{C_2}{C_1}$; и (в) вредности капацитивности C_1 и C_2.



$H(s)$:



$$H(s) = -\frac{Z_2}{Z_1}$$



$$Z = R \| \frac{1}{sC} = \frac{R\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}} \Rightarrow Z = \frac{R}{1+sRC}$$

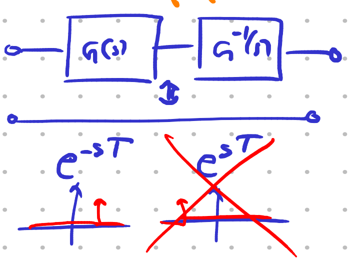
$$\Rightarrow H(s) = -\frac{\frac{R_2}{1+sC_2R_2}}{\frac{R_1}{1+sC_1R_1}} = -\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1+sC_1R_1}{1+sC_2R_2}\quad \begin{matrix} s_n = -1/R_1C_1 \\ s_p = -1/R_2C_2. \end{matrix}$$

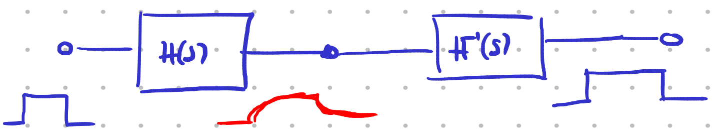
$$G(s)\cdot H(s) = -\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1+sC_1R_1}{1+sC_2R_2}\cdot\frac{s+\omega_1}{s+\omega_2} = -\frac{\cancel{R_2}}{\cancel{R_1}}\cdot\frac{C_1\cancel{R_1}\left(\frac{1}{R_1C_1}+s\right)}{C_2\cancel{R_2}\left(\frac{1}{R_2C_2}+s\right)}\cdot\frac{s+\omega_1}{s+\omega_2}$$

$$\Rightarrow G(s)\,H(s) = -\underbrace{\frac{C_1}{C_2}\cdot\frac{\cancel{\frac{1}{R_1C_1}+s}}{\cancel{\frac{1}{R_2C_2}+s}}}_{H(s)}\cdot\underbrace{\frac{\cancel{s+\omega_1}}{\cancel{s+\omega_2}}}_{G(s)} = -50$$

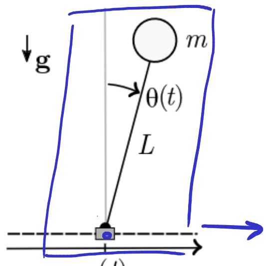
$$\omega_1 = 1/R_2C_2 = 1/(R_2C_2)$$
$$\omega_2 = 1/R_1C_1 = 1/(R_1\,50\,C_2)$$
$$C_1/C_2 = 50 \Rightarrow C_1 = 50\,C_2$$

Инв. филтрирање.





8. У механичком систему са слике 1 приказано је инверзно клатно причвршћено за ослонац који може да се креће дуж x осе. Клатно је сачињено из кугле масе m, чији је центар на растојању L од ослонца, а слободно је да се креће у равни цртежа. Познато је и $g = |\mathbf{g}|$.

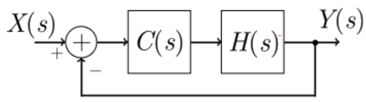


Слика 1.

(а) Одредити функцију преноса система $H(s)$ чији је улаз тренутни положај ослонца клатна $x = x(t)$ а излаз тренутни угаони отклон клатна $\theta = \theta(t)$. *Сматрати да је отклон клатна мали тако да је* $\sin\theta \approx \theta$.

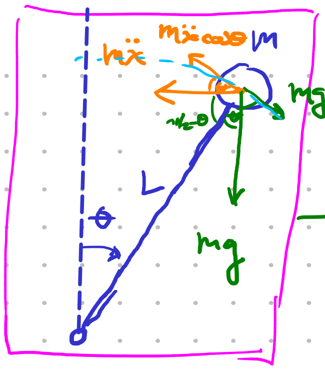
(б) Испитати асимптотску стабилност посматраног система $H(s)$.

(в) У сложеном систему са слике 2 употребљен је систем $H(s)$ а преносна функција другог система је $C(s) = K$, где је K константа. Одредити функцију преноса $W(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$.



Слика 2.

(г) Испитати асимптотску стабилност система $W(s)$ у функцији параметра K.



$a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

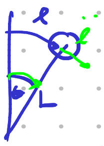
(а)

$ma = F \Rightarrow$

$\cancel{m}L\ddot{\theta} = \cancel{m}g\,\sin\theta - \cancel{m}\ddot{x}\cos\theta$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} \sin\theta \sim \theta \\ \cos\theta \sim 1 \end{array} \right.$

$L\ddot{\theta} = g\theta - \ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = g\theta - L\ddot{\theta}$

$\overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \quad s^2X(s) = (g - s^2L)\,\Theta(s) \Rightarrow H(s) = \dfrac{\Theta(s)}{X(s)} = \boxed{\dfrac{s^2}{g - s^2L}} \Rightarrow$

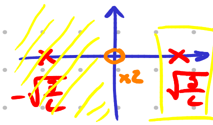


$\ell = L\cdot\theta$

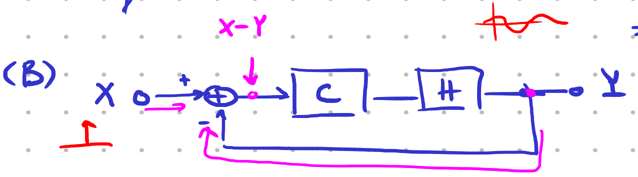
$\ddot{\ell} = L\ddot{\theta}$

(б) $H(s) = \dfrac{s^2}{g - s^2L}$ $\quad s_n = 0 \ (2\times)$

$g - s^2L = 0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{\dfrac{g}{L}}$



(в)



$\Rightarrow (X - Y)\,CH = Y \Rightarrow CH\cdot X = Y + CH\cdot Y$

$\Rightarrow W(s) = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{CH}{1 + CH}$; $C(s) = K$. $H(s)$

$\Rightarrow \boxed{W(s)} = \dfrac{K\cdot\frac{s^2}{g - s^2L}}{1 + K\frac{s^2}{g - s^2L}} = \dfrac{Ks^2}{g - s^2L + Ks^2} = \boxed{\dfrac{Ks^2}{g - s^2(L - K)}}$

$W(s)\Big|_{L=K} = \dfrac{Ls^2}{g}$

(г) Полови ? $\Rightarrow g - s^2(L - K) = 0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{\dfrac{g}{L - K}}$

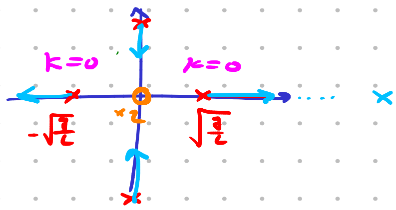
$K < L \Rightarrow s = \pm\sqrt{\dfrac{g}{L - K}}$ (нестабилан)

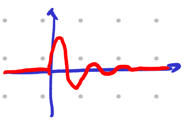
$K = L \Rightarrow$ полова нема

$K > L \Rightarrow s = \pm j\sqrt{\dfrac{g}{K - L}}$ (марг. стаб.)

$= \pm j\,\omega_0$

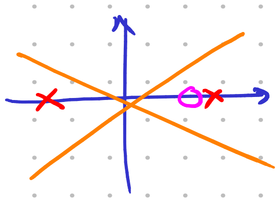
Полови $W(s)$



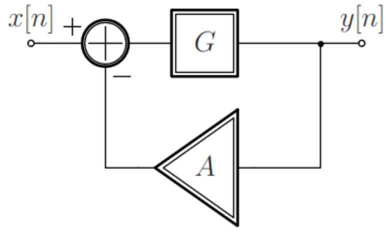


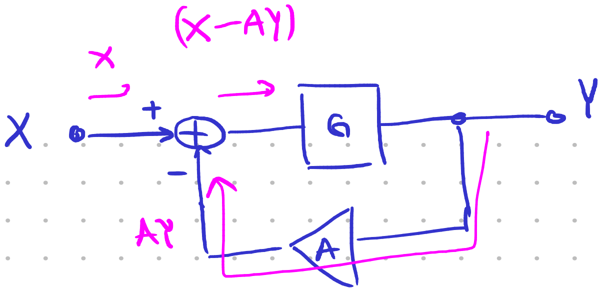
$C = K + K_d\cdot s$

(PD регулатор)



5. У блок дијаграму дискретног система са слике позната је преносна функција $G(z) = \frac{1}{z-2}$. Одредити појачање A идеалног појачавача тако да је дати систем представљен дијаграмом, $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$, асимптотски стабилан.





$(X - AY)\,G = Y$

$\Rightarrow XG = Y + AYG = Y(1+AG)$

$\Rightarrow H = \frac{Y}{X} = \frac{G}{1+AG}. \Rightarrow$

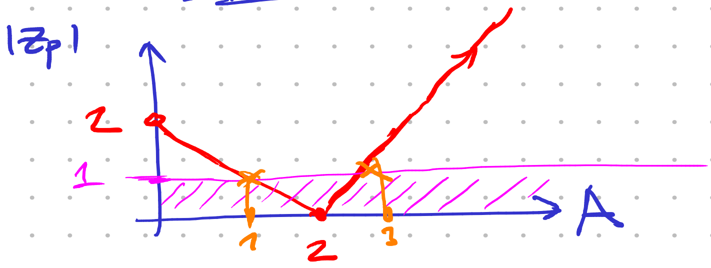
$\Rightarrow H = \frac{\frac{1}{z-2}}{1+A\frac{1}{z-2}} = \frac{1}{z-2+A}, \Rightarrow$

Пол:

$z - 2 + A = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{z_p = 2 - A}$

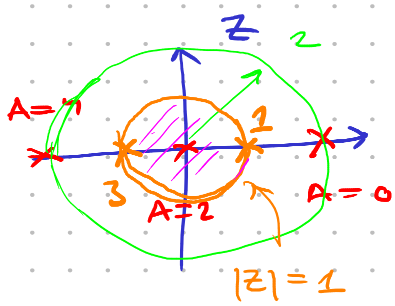
$|z_p| < 1;$



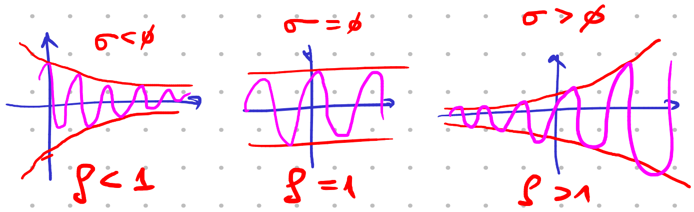
$1 < A < 3 \Rightarrow$ Стабилан

$A \in \{1, 3\} \Rightarrow$ Марг. стаб.

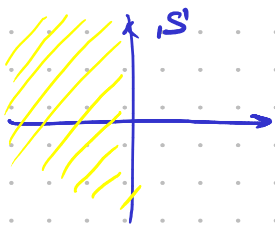
$A \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty) \Rightarrow$ Нестабилан!

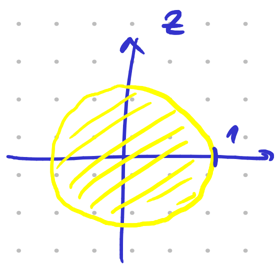


$e^{st} \sim e^{\sigma t} \cdot \cos \omega t$, $\sigma = \mathrm{Re}\{s\}$

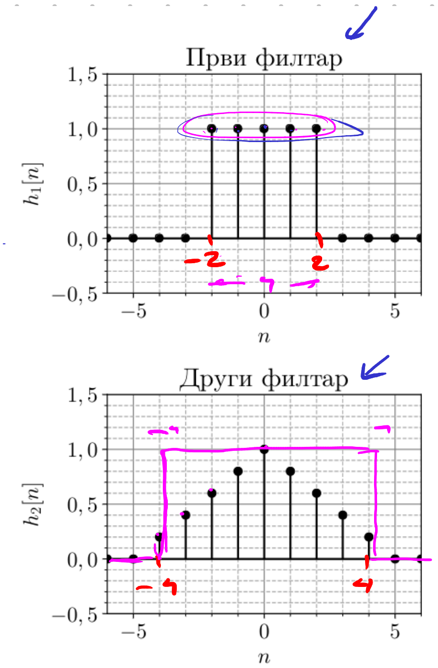


$z^n \sim \rho^n \cos(n\phi)$, $\rho = |z|$





2. [25п] На слици су приказани импулсни одзиви два дискретна филтра $h_1[n]$ и $h_2[n]$. Ван приказаног временског интервала, све вредности одбирака импулсних одзива филтара равни су нули. Одредити (а)**[5п]** амплитудске фреквенцијске карактеристике ових филтара $|H_1(\mathrm{j}\Omega)|$ и $|H_2(\mathrm{j}\Omega)|$. Израчунати (б)**[5п]** дискретне кружне учестаности на којима је амплитудско појачање равно нули и приближно израчунати (в)**[5п]** дискретне кружне учестаности из опсега $\boxed{0 < \Omega < \pi}$ на којима појачања филтара имају локалне максимуме и вредности тих максимума. Користећи резултате из претходних тачака (г)**[5п]** скицирати обе амплитудске фреквенцијске карактеристике на истом дијаграму, у опсегу дискретних кружних учестаности $0 \le \Omega \le \pi$. Оба филтра се побуђују одговарајућим простопериодичним сигналима, јединичне амплитуде, $x_1[n] = \cos(\Omega_1 n)$ и $x_2[n] = \cos(\Omega_2 n)$, и дискретне кружне учестаности из опсега $\frac{2\pi}{5} \le \Omega_1, \Omega_2 \le \pi$ тако да су амплитуде сигнала на излазу филтара, $Y_{1\mathrm{m}}$ и $Y_{2\mathrm{m}}$, максималне. Приближно (д)**[5п]** израчунати однос амплитуда устаљених одзива ових филтара за такве побуде $\rho = \frac{Y_{1\mathrm{m}}}{Y_{2\mathrm{m}}}$.



Напомена. Користити апроксимацију да су одговарајући аргументи локалних максимума функције $\left|\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}\right|$ практично исти као и аргументи максимума функције $|\sin(ax)|$ за $a > 2b$ и $b < 1$.

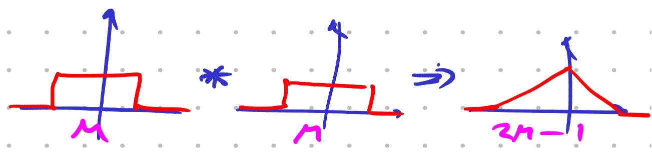
$h_1[n] = \mathrm{rect}_2[n] \Rightarrow H_1(j\Omega) = \dfrac{\sin(2{,}5\Omega)}{\sin(0{,}5\Omega)}$

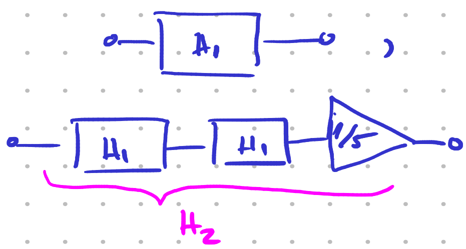
$\mathrm{rect}_N[n]$ $N=2$	$\overset{N=2}{\dfrac{\sin\left(\Omega\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}}$

$|H_2(j\Omega)| \sim |H_1(j\Omega)|^2$

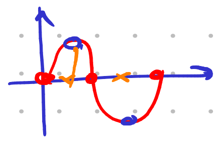
$h_2[n] = \mathrm{tri}_4[n] \Rightarrow H_2(j\Omega) = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{\sin(2{,}5\Omega)}{\sin(0{,}5\Omega)}\right)^2.$

$\mathrm{tri}_N[n]$ $N=4$	$\dfrac{1}{N+1}\left(\dfrac{\sin\left(\Omega\frac{N+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}\right)^2$





$\left|\dfrac{\sin(2{,}5\Omega)}{\sin(0{,}5\Omega)}\right| = 0 \Rightarrow |\sin(2{,}5\Omega)| = 0$



$\frac{5}{2}\Omega = k\pi \Rightarrow \Omega = \frac{2k\pi}{5}, \quad \Omega_0 \in \left\{\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right\}$

$0 \le \Omega < \pi$

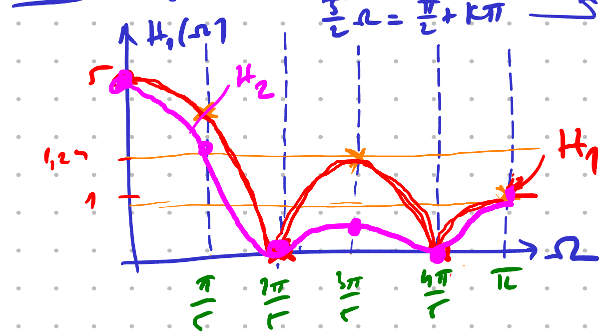
$\Omega \sim 0: \quad \dfrac{\sin(2{,}5\Omega)}{\sin(0{,}5\Omega)} \sim \dfrac{2{,}5\cancel{\Omega}}{0{,}5\cancel{\Omega}} = 5,$

$\underline{H_1(0) = 5}; \quad H_1(j\Omega) = \sum_{\langle N\rangle} x e^{j\Omega n}$

$H_1(0) = \sum_{\langle N\rangle} x.$

max: $\arg\max|\sin(2{,}5\Omega)| = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi\right\}; \quad H_1\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{1}{2}\frac{3\pi}{5}\right)\right|} = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)} \approx 1{,}24$

$\frac{5}{2}\Omega = \frac{\pi}{2} + k\pi$



$H_1(\pi) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1.$