$\mathcal{L}$ $\quad P(\lambda)$

1. Нека је континуалан LTI систем дефинисан диференцијалном једначином $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+3y=x}$ где су $x=x(t)$ и $y=y(t)$ једини улаз и излаз тог система редом. Користећи се Лапласовом транформацијом, одредити сопствени и принудни одзив овог система за побуду $x(t)=\big(1-\cos(3t)\big)\,\mathrm{u}(t)$ ако је познато $2y(0^+)=\frac{\mathrm{d}y(0^+)}{\mathrm{d}t}=2$.

3	Diferenciranje	$\frac{d}{dt}f(t)$	$\underbrace{sF(s)-f(0^-)}_{\times s}$
4		$\frac{d^2}{dt^2}f(t)$	$s^2F(s)-sf(0^-)-f'(0^-)$

d/dt

$$\frac{d^3}{dt^3}f(t) = s^3F - s^2f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$$

$\Rightarrow$ $y(t) \mapsto Y = Y(s)$

$x(t) \mapsto X = X(s)$

$$s^2Y - sy(0^-) - y'(0^-) + 4\big(sY - y(0^-)\big) + 3Y = X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s^2+4s+3) - sy(0^-) - y'(0^-) - 4y(0^-) = X \Rightarrow$$

$$Y = \underbrace{\boxed{\frac{1}{s^2+4s+3}}}_{H(s)} \cdot X + \boxed{\frac{sy(0^-)+y'(0^-)+4y(0^-)}{s^2+4s+3}}$$

$\mathcal{L}$ сопственог одзива!

$$x(t) = [1-\cos(3t)]u(t) = \overbrace{\boxed{u(t)}}^{x_1(t)} - \overbrace{\boxed{\cos(3t)u(t)}}^{x_2(t)}.$$

$$Y_1(s) = H(s)\cdot X_1(s) = \frac{1}{(s^2+4s+3)s} = \frac{1}{(s+1)(s+3)s} = \frac{-\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{6}}{s+3} + \frac{\frac{1}{3}}{s}$$

$$\Rightarrow y_1(t) = \left(-\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{1}{3}\right)u(t)$$

$\cos(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$ $\quad \omega=3$	$\frac{s}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+9}$

$$Y_2(s) = H(s)\cdot X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}\cdot\frac{s}{(s^2+9)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} + \frac{C+Ds}{s^2+9}$$

$$Y_2(s) = \frac{s}{(s+1)(s+3)(s+j3)(s-j3)} = \frac{-\frac{1}{20}}{s+1} + \frac{+\frac{1}{12}}{s+3} + \frac{-\frac{1}{60}+j\frac{1}{30}}{s+j3} + \frac{-\frac{1}{60}-j\frac{1}{30}}{s-j3}$$

$$\frac{A}{s+j\omega_0} + \frac{A^*}{s-j\omega_0} \xrightarrow{\mathcal{L}} Ae^{j\omega_0 t} + \left(Ae^{j\omega_0 t}\right)^* = 2\,\mathrm{Re}\,A\,e^{j\omega_0 t} = 2\,\mathrm{Re}\left(-\frac{1}{60}+j\frac{1}{30}\right)\left(\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t\right)$$

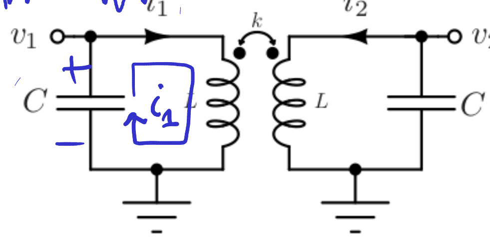
$\omega_0 = 3$

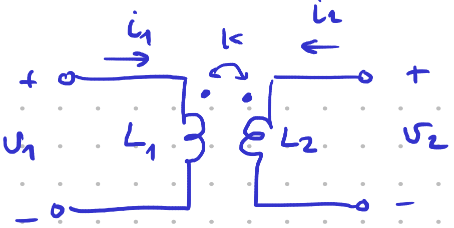
$$z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\,z$$

$$= 2\left(-\frac{1}{60}\cdot\cos 3t - \frac{1}{30}\sin 3t\right)$$

$$y_2(t) = \left(-\frac{1}{20}e^{-t} + \frac{1}{12}e^{-3t} - \frac{1}{30}\cos 3t - \frac{1}{15}\sin 3t\right)u(t).$$

4. У колу са слике познати су L, C и коефицијент магнетске спреге $k \ll 1$. У почетном тренутку су познати $i_2(0) = v_1(0) = v_2(0) = 0$ и $i_1(0) = I_0$. Поставити (а) систем интегро-диференцијалних једначина кола по струјама i_1 и i_2. Помоћу Лапласове трансформације (б) одредити струју $i_1(t)$. Скицирати (в) временски дијаграм добијеног одзива $i_1(t)$ за $t > 0$.





$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{21}\frac{di_2}{dt}$$
$$v_2 = L_{12}\frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$L_1 = L_2 = L$

$L_{12} = L_{21} = k\sqrt{L_1 L_2} = kL$

$$i_1 = -C\frac{dv_1}{dt} \Rightarrow \left\{ v_1 = -\frac{1}{C}\int_0^t i_1(t)\,dt \qquad \left\{ v_2 = -\frac{1}{C}\int_0^t i_2(t)\,dt \right.\right.$$

$$\left.\begin{aligned} L\frac{di_1}{dt} + kL\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i_1(t)\,dt &= 0 \\ kL\frac{di_1}{dt} + L\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i_2(t)\,dt &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} LC\boxed{\frac{di_1}{dt}} + kLC\frac{di_2}{dt} + \int_0^t i_1(t)\,dt &= 0 \quad (1^\circ) \\ kLC\boxed{\frac{di_1}{dt}} + LC\frac{di_2}{dt} + \int_0^t i_2(t)\,dt &= 0 \quad (2^\circ) \end{aligned}\right\}$$

$LC = \tau^2$, $\quad \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0\ [s^{-1}]$

$I_1 = I_1(s)$, $\quad I_2 = I_2(s)$

1°

$$\mathcal{L} \Rightarrow \tau^2(sI_1 - I_0) + k\tau^2(sI_2 - 0) + \frac{1}{s}I_1 = 0 \quad \Big| \cdot s$$

$$\boxed{(1+\tau^2 s^2)I_1 + k\tau^2 s^2 I_2(s) = \tau^2 s I_0}$$

$$I_2(s) = \int_{s=0}^{\infty} i_2(t)\,e^{-st}\,dt$$

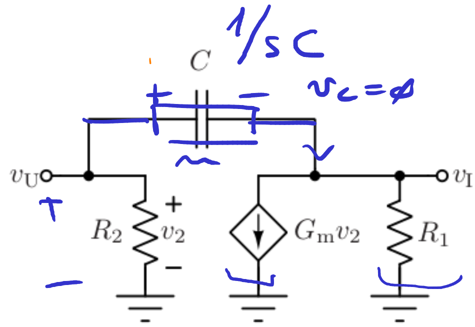
2° $\quad k\tau^2(sI_1 - I_0) + \tau^2 s I_2 + \frac{1}{s}I_2 = 0 \quad \Big| \cdot s$

$$k\tau^2 s^2 I_1 - k\tau^2 s I_0 + \tau^2 s^2 I_2 + I_2 = 0$$

$$\boxed{k\tau^2 s^2 I_1 + (1+\tau^2 s^2) I_2 = k\tau^2 s I_0}$$

$$I_1 = \frac{D_{I1}}{D} = \frac{\tau^2 s\,(1+(\tau s)^2) - k\tau^2 s^2 \cdot k\tau^2 s}{(1+(\tau s)^2)^2 - (k(\tau s)^2)^2} = \dots; \quad i_1(t) = ?$$

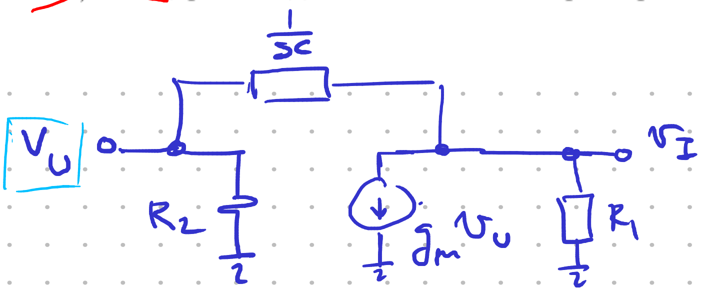
7. У колу са слике познато је $C = 0{,}1\,\mu\mathrm{F}$, $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $G_\mathrm{m} = 2\,\mathrm{mS}$ и $R_2 = 25\,\mathrm{k\Omega}$.



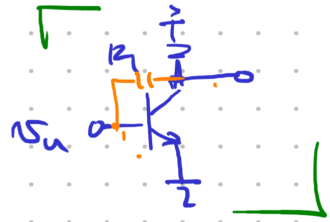
(а) Одредити функцију преноса, $H(s)$, датог кола ако је v_U улазна величина а напон v_I излазна величина посматраног система.

(б) Одредити и нацртати одзив кола за побуду $v_U(t) = 1\,\mathrm{V}\,\mathrm{u}(t)$

~~(в)~~ Скицирати Бодеове асимптотске карактеристике датог система.



$u(t) \longmapsto \frac{1}{s}$



$$v_I = V_U \cdot \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{sC}} - g_m V_U \cdot \frac{\frac{1}{sC} \cdot R_1}{\frac{1}{sC} + R_1} = V_U \frac{sCR_1}{1+sCR_1} - g_m V_U \cdot \frac{R_1}{1+sCR_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_I(s) = V_U(s) \cdot \underbrace{\boxed{\frac{R_1(sC - g_m)}{1+sCR_1}}}_{H(s)}$$

$$H(s) = R_1 \frac{sC - g_m}{1 + sCR_1}$$

$$\boxed{s_n = +\frac{g_m}{C}}, \quad s_p = -\frac{1}{R_1 C},$$

$$V_U(s) = \frac{1}{s} \cdot V_0, \quad V_0 = 1\,V$$

$$V_I(s) = \frac{R_1(sC - g_m)V_0}{(1 + sCR_1)s} = \frac{A}{1 + sCR_1} + \frac{B}{s}$$

$$A = \frac{R_1(sC - g_m)V_0}{s}\Bigg|_{1+sCR_1 = 0} = \frac{R_1\left(-\frac{1}{R_1} - g_m\right)V_0}{-\frac{1}{R_1 C}}$$

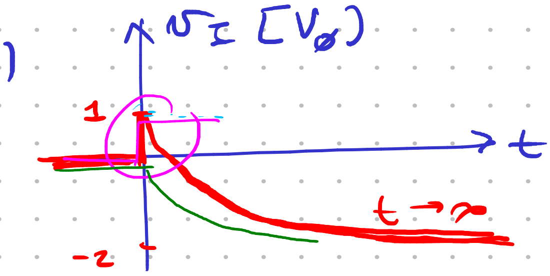
$$s = -1/R_1 C$$

$$\Rightarrow A = (1 + g_m R_1) R_1 C \cdot V_0; \quad B = \frac{R_1(sC - g_m)}{1 + sCR_1}\Bigg|_{s=0} = \frac{-g_m R_1}{1} V_0$$

$$V_I(s) = \left(\frac{(1 + g_m R_1)}{s + \frac{1}{R_1 C}} - \frac{g_m R_1}{s} \right) V_0$$

$$\Rightarrow \boxed{v_I(t) = \left((1 + g_m R_1)\, e^{-\frac{t}{R_1 C}} - \boxed{g_m R_1} \right) V_0 \, u(t)}$$

$$v_I(t) = \left(3e^{-\frac{t}{R_1C}} - 2\right) V_\phi\, u(t)$$



$t = 0^+$