Увод и основни појмови.

1.[1] За следеће системе испитати да ли су стабилни у *BIBO* смислу, линеарни, временски инваријантни, са меморијом и каузални:

(а) $y(t)=\sum_{k=0}^{\infty} x(t-kT)$,

(б) $y(t)=\sqrt{2}x(t)$,

(в) $y(t)=t\,x(t-1)^2$,

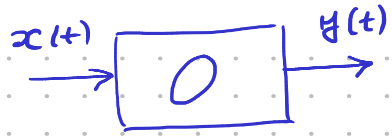
(г) $y(t)=\int_{\tau=-\infty}^{t} x(\tau)\sin(\tau)\,\mathrm{d}\tau$,

(д) $y(t)=\frac{\mathrm{d}x(t+1)}{\mathrm{d}t}$,

(ђ) $y(t)=te^{x(t)-t}$,

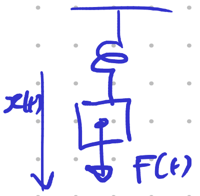
где је $y(t)=O\{x(t)\}$ одзив посматраног система.

	а	б	в	г	д	ђ
BIBO	✗	✓	✗	✗	✗	
Лин	✓	✓	✗	✓		
Стац.	✓	✓	✗	✗		
Мем	✓	✗	✓	✓		
Кауз.	✓	✓	✓	✓		



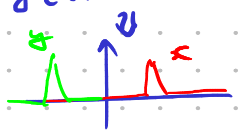
$y(t)=O\{x(t)\}$

1° BIBO стабилност: $|x(t)|<B_x \Rightarrow |y(t)|<B_y$



2° Стационарност $y(t)=O\{x(t)\} \Rightarrow$

$y(t)=x(t-t)$ $\quad\Rightarrow y(t-\tau)=O\{x(t-\tau)\}, \forall\tau.$

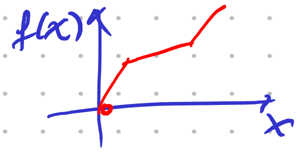


3° Линеарност $O\{a x_1(t)+b\,x_2(t)\}=a\,O\{x_1(t)\}+b\cdot O\{x_2(t)\}$

Адитивност $O\{x_1(t)+x_2(t)\}=O\{x_1(t)\}+O\{x_2(t)\}$

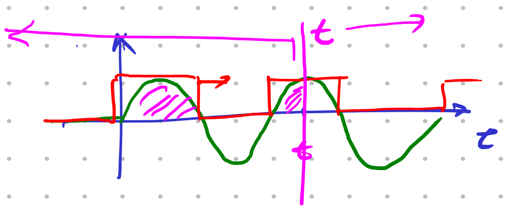
Хомогеност $O\{k x_1(t)\}=k\,O\{x_1(t)\}$

4° Меморија $y(t)=f(x(t))$ без меморије



5° Каузалност; $y(t)$ не зависи од $x(t+\tau)$, $\tau>0$

(г) $y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\sin(\tau)\,d\tau$



Хомогеност!

• $\int_{-\infty}^{t} k\,x(\tau)\sin(\tau)\,d\tau = k\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\sin(\tau)\,d\tau$

• $\int_{-\infty}^{t} (x_1(\tau)+x_2(\tau))\sin(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\sin(\tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)\sin(\tau)\,d\tau$ Адитиван!

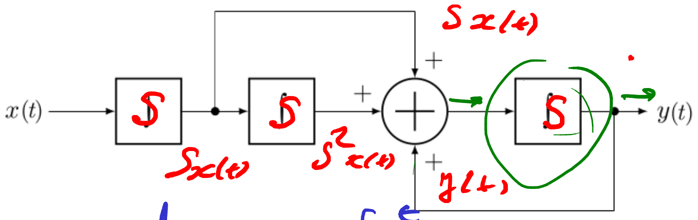
$\int_{0}^{\infty} x(t-\tau)\,d\tau \leftarrow$ Каузално!

3. У систему са слике употребљени су идеални блокови за интеграљење и суматори. Улаз система је континуалан сигнал $x = x(t)$ а излаз је континуалан сигнал $y = y(t)$.

(а) Описати систем одговарајућом диференцијалном једначином,

(б) одредити импулсни одзив тог система, $h(t)$, и

(в) испитати стабилност тог система у *BIBO* смислу.



$D = \frac{d}{dt}$, $S = \int_{-\infty}$; $D \cdot S = 1$. $S \cdot D = 1$.

$x(-\infty) = \phi$.

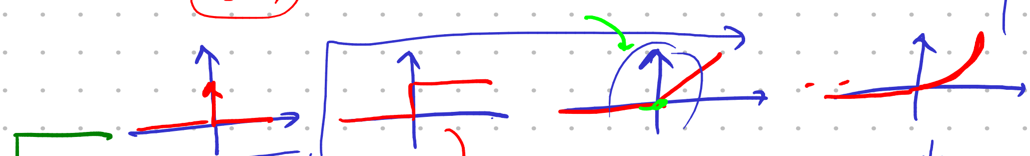
$S\left(S\,x(t) + S^2 x(t) + y(t)\right) = y(t)$

$S^2 x(t) + S^3 x(t) + S y(t) = y(t) \Rightarrow S^3 x(t) + S^2 x(t) = y(t) - S y(t)$

$\Rightarrow (S^3 + S^2) x(t) = (1 - S)\, y(t) \quad \Big| \cdot D^3$

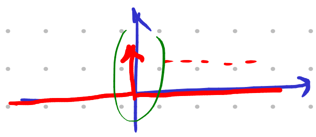
$(1 + D)\, x(t) = (D^3 - D^2)\, y(t) \Rightarrow \boxed{D^2 (D-1)\, y(t) = (1 + D)\, x(t)}$

$\delta(t)$ $\quad \delta(t), \cancel{\delta'(t)}$ $\quad \delta(t)$



$\boxed{a_n y^{(n)}} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \delta(t)$; $\quad y = y(t)$

$\delta(t) \begin{cases} \delta(t \neq 0) = \phi \\ \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt = 1 \end{cases}$



$t > \phi$: $\quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \phi$

Пример: $y(t) = \boxed{C_1} e^{\lambda_1 t} + \boxed{C_2} e^{\lambda_2 t} + \dots + \boxed{C_n} e^{\lambda_n t}$

$a_n \int_{0^-}^{0^+} y^{(n)} dt + a_{n-1} \int_{0^-}^{0^+} y^{(n-1)} dt + \dots + a_0 \int_{0^-}^{0^+} y\, dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt$ $\quad 0 \quad 0 \quad 1$

$\Rightarrow \boxed{a_n y^{(n-1)}(0^+) - a_n y^{(n-1)}(0^-) = 1}$.

$\boxed{y^{(m)}(0^+) = \boxed{y^{(m)}(0^-)}, \; 0 \le m \le n-2}$

* Импулсни одзив: $y^{(m)}(0^-) = \phi$

$\begin{cases} y(0^+) = 0 \\ y'(0^+) = 0 \\ \vdots \\ \boxed{y^{(n-1)}(0^+) = 1/a_n} \end{cases}$

Linear Time Invariant

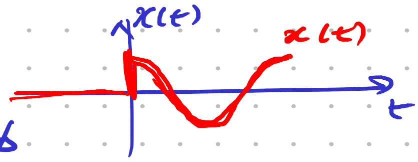
Континуални LTI системи.

4.[2] Континуалан систем је диференцијалном једначином у облику

$$\boxed{(\mathrm{D}+1)y(t) = x(t),}$$

где су $x = x(t)$ и $y = y(t)$ побуда и одзив тога система, а $\mathrm{D} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ је оператор диференцирања. Познат је преиницијални услов одзива $y(0^-) = 1$. Побуда је дата изразом $x(t) = \cos(t)\mathrm{u}(t)$. Одредити сопствени ($y_\mathrm{a}$), принудни ($y_\mathrm{f}$), комплетни ($y$), прелазни ($y_\mathrm{t}$), и устаљени ($y_\mathrm{ss}$) одзив система за задату побуду.

$(D+1)\,y(t) = x(t)$; $y(0^-) = 1$. $\quad x(t) = \cos(t)\,u(t)$



1° Сопствени $\quad (D+1)\,y_a(t) = \emptyset$, $y(0^-) = 1$

2° Принудни $\quad (D+1)\,y_f(t) = x(t)$, $y(0^-) = \emptyset$

3° Комплетни $\quad (D+1)\,y(t) = x(t)$; $y(0^-) = 1$; $\quad \boxed{y = y_a + y_f}$

4° Устаљени $\quad e^{-\lambda t}$, $\cos t$, $\sin t$, 1, . $\leftarrow$

5° Прелазни $\quad e^{-\lambda t}$, $\cos t$, $\sin t$, 1, . . . $\quad \boxed{y = y_{ss} + y_t}$

$(D+1)\,y(t) = x(t)$, $\quad y(0^-) = 1$; $\qquad P(D)\,y(t) = x(t)$

$P(D) = D+1$, $\quad P(-1) = \emptyset$

1° Сопствени

$(D+1)\,y_a(t) = \emptyset$, $\quad y(0^-) = 1 \qquad \Rightarrow \quad y_h(t) = C e^{-t}$

$y_a(t) = C e^{-t} \Rightarrow 1 = C e^{-\emptyset}$, $C = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_a(t) = e^{-t} u(t)}$

2° Принудни $\quad y_f = C e^{-t} + y_{fp}$, $\quad \boxed{x(t) = \cos t}$

$\Rightarrow y_f = \boxed{C} e^{-t} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)\Big|\, u(t) \qquad x(t) = \mathrm{Re}\left\{e^{jt}\right\}$

$y_f = 0 \;@\; t = \emptyset \Rightarrow C + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \qquad y_{fp} = \mathrm{Re}\left\{\dfrac{e^{jt}}{P(j)}\right\} =$

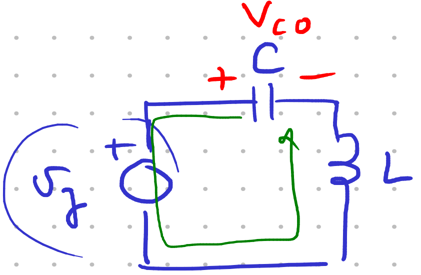
$\Rightarrow C + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{C = -\dfrac{1}{2}} \qquad = \mathrm{Re}\left\{\dfrac{e^{jt}}{j+1}\right\} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)$

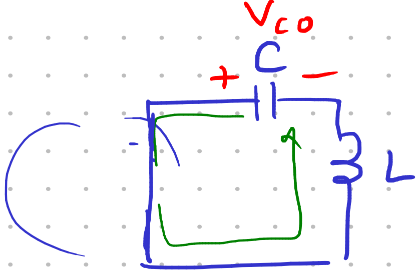
3° Комплетан:

$$\boxed{y = \left[\frac{1}{2} e^{-t} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right] \cdot u(t)}$$

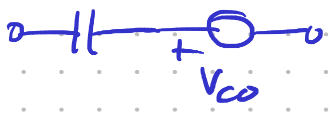
Комплетни!

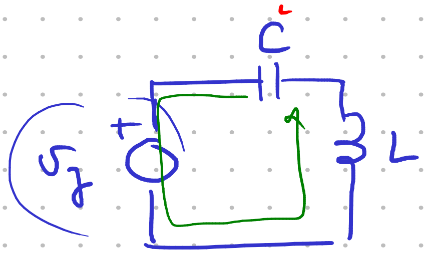
прелазни $\qquad$ устаљени!





$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \to y_h$

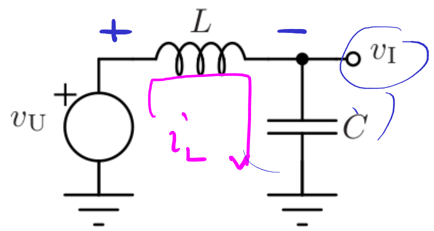




$\omega_g = \frac{2}{\sqrt{LC}} \to y_{fp}$

5. У колу са слике познати су $L = 100\,\mu\mathrm{H}$ и $C = 1\,\mu\mathrm{F}$. Посматра се систем чији је улаз напон побудног генератора $v_U = v_U(t)$ а излаз напон у колу $v_I = v_I(t)$.

$\omega_0 = 100\,\frac{krad}{s} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$



(а) Одредити диференцијалну једначину која описује овај систем.

(б) Испитати стабилност овог система у *BIBO* смислу; и

(в) одредити одзив на импулсну побуду $v_U = \Phi_0\delta(t)$ где је $\Phi_0 = 10\,\mu\mathrm{Wb}$.

(г) Одредити одзив на побуду $v_U(t) = 1\,\mathrm{V}\cos(\omega_0 t)\,\mathrm{u}(t)$, где је $\omega_0 = 100\,\frac{\mathrm{krad}}{\mathrm{s}}$.

$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = C\cdot Dv_C$

$v_L = L\frac{di_L}{dt} = LDi_L$

$v_L = LDi_C = LD(C\cdot D)\cdot v_I = D^2LC\,v_I$

$v_U = v_L + v_I \Rightarrow v_U = v_I + D^2LC\,v_I$

$\Rightarrow \boxed{v_U = \underbrace{(D^2LC+1)}_{P(D)}\,v_I}$

$P(D) = 1 + D^2LC, \quad P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm j\overbrace{\boxed{\frac{1}{\sqrt{LC}}}}^{\omega_0}$

K.Ф. $\cos(\omega_0 t)$, $\sin(\omega_0 t)$.

(в) $(D^2LC+1)\,v_I = \Phi_0\,\delta(t)$; $\Rightarrow \Phi$

$n=2$

$(D^2LC+1)\,v_I = \boxed{\delta(t)}$

$v_I(0^+) = 0$

$\boxed{n-1=1}$ $v_I'(0^+) = \frac{1}{LC}$

$t=0$ $\begin{cases} v_I = A\cos(\omega_0 t) + B\,\cancel{\sin(\omega_0 t)} \\ v_I' = \omega_0 A\cdot\cancel{(-\sin\omega_0 t)} + \omega_0 B\cos(\omega_0 t) \end{cases}$

$v_I(0) = A = 0$

$v_I'(0) = \omega_0 B = \frac{1}{LC}$

$v_I = \frac{1}{\omega_0 LC}\sin(\omega_0 t)$

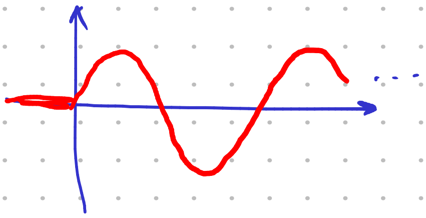
$v_I = \frac{\Phi_0}{\omega_0 LC}\sin(\omega_0 t)$

$LC = \frac{1}{\omega_0^2} \Rightarrow$

$v_I = \Phi_0\omega_0\sin(\omega_0 t)$

$\left(= 10\,\mu Wb\cdot 0{,}1\,\frac{Mrad}{s} = 1V\right)$

$\boxed{v_I = 1V\sin(\omega_0 t)}$



$$\boxed{v_U(t) = 1V \cos(\omega_0 t)}$$

$$\underline{v}_U = 1V\, e^{\boxed{j\omega_0} t}, \quad a = \boxed{j\omega_0}$$

$$v_U = \underbrace{(D^2 LC + 1)}_{P(D)}\, v_I$$

$$\underline{v}_I = \cancel{\frac{e^{j\omega_0 t}}{P(j\omega_0)}} \qquad P(j\omega_0) = 0$$

$$P'(D) = 2DLC$$

$$= \frac{t \cdot e^{j\omega_0 t}}{P'(j\omega_0)} = \frac{t\, e^{j\omega_0 t}}{2 e^{j\frac{\pi}{2}} \omega_0 LC}$$

$$= \frac{t\, e^{j(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})}}{2\omega_0 LC} \Rightarrow$$

$$v_I = \frac{1V \cdot t}{2\omega_0 LC} \cdot \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_I = 50 \frac{mV}{\mu s} \cdot t \cdot \sin(\omega_0 t)}$$