Rešavanje diferencnih jednačina unilateralnom Z transformacijom

Teoreme o pomeranju argumenata:

a) Ako je signal $x[n]$ kauzalan

$$Z\{x[n-n_0]\} = z^{-n_0} X(z), n_0 > 0$$

b) Predikcija, signal $x[n]$ može, ali ne mora da bude kauzalan

$$\mathrm{Z}\{x[n+n_0]\} = z^{n_0}\left(X(z) - \sum_{k=0}^{n_0-1} x[k] z^{-k} \right), \quad n_0 > 0$$

c) Kašnjenje, signal $x[n]$ nije ali može da bude kauzalan

$$Z\{x[n-n_0]\} = z^{-n_0}(X(z) + \sum_{k=-1}^{-n_0} x[k] z^{-k}), n_0 > 0$$

Ako je $x[n]$ kauzalno, prethodno se svodi se na a) jer je $x[k]=0$ ya $k<0$

Diferencna jednačina N tog reda, koja opisuje diskretni LTI sistem N tog reda, može da bude u u više formi od koje su dve pogodne za direktno rešavanje Z transformacijom:

1. Sa kašnjenjima i preinicijalnim uslovima:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k],$$
$$y[-1], y[-2], \dots y[-N]$$

2. Sa predikcijama i postinicijalnim uslovima:

$$\sum_{k=N}^{0} a_{N-k} y[n+k] = \sum_{k=M}^{0} b_{M-k} x[n+k],$$
$$y[0], y[1], y[N-1]$$

Na prvu jednačinu se primenjuje teorema c) , a na drugu teorema b).

Ukoliko jednačina nije data u nekoj od prethodne dve forme, na primer pomešana su kašnjenja i predikcije, ili pomoćni uslovi nisuni preinicijalni, niti postinicijalni, pogodno je prevesti jednačinu u neku od dve standardne forme, a pomoćne uslove u one koji odgovaraju jednačini: preinicijalni za jednačinu sa kašnjenjem, a postinicijalni za jednačinu sa predikcijama.

Kada se pomoćni uslovi (preinicijalni ili postinicijalni) anuliraju, primenom Z transformacije na bilo koju od jednačina, dobija se *H*(*z*) funkcija prenosa (frekvencijski odziv), a inverzijom impulsni odziv *h*[*n*]

$$y\left[n-m\right]\,u\left[n\right]\leftrightarrow\frac{1}{z^m}Y(z)+0\qquad\qquad x\left[n-m\right]\,u\left[n\right]\leftrightarrow\frac{1}{z^m}X(z)+0$$

$$\left(a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_{N-1}z^{1-N}+a_Nz^{-N}\right)\,Y(z)=\left(b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_{M-1}z^{1-N}+b_Mz^{-M}\right)\,X(z)$$

$$H(z)\equiv\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_{M-1}z^{1-N}+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_{N-1}z^{1-N}+a_Nz^{-N}}\ \text{ for }\ |z|>r_{\max}\ \text{ gde je }r_{\max}=\max_{1\le i\le N}|\text{pol}_i|$$

$$y\left[n+m\right]\ \leftrightarrow z^mY(z)+0\qquad\qquad x\left[n+m\right]\ \leftrightarrow z^mX(z)+0$$

$$\left(a_0z^N+a_1z^{N-1}+\cdots+a_{N-1}z^1+a_N\right)\,Y(z)=\left(b_0z^M+b_1z^{M-1}+\cdots+b_{M-1}z^1+b_M\right)\,X(z)$$

$$H(z)\equiv\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0z^M+b_1z^{M-1}+\cdots+b_{M-1}z^1+b_M}{a_0z^N+a_1z^{N-1}+\cdots+a_{N-1}z^1+a_N}\ \text{ for }\ |z|>r_{\max}\ \text{ gde je }r_{\max}=\max_{1\le i\le N}|\text{pol}_i|$$

Iz prethodnih izraza se dobija i prinudni odziv

$$y(t)=Z^{-1}\left\{X(z)H(z)\right\}=Z^{-1}\left\{Y(z)\right\}$$

Primer, impulsni i prinudni odziv jednačina sa kašnjenjima:

$$y\left[n\right]\ -\ 5y\left[n-1\right]\ +\ 6y\left[n-2\right]\ =\ 3x\left[n-1\right]\ +\ 5x\left[n-2\right]$$

$$Y(z)-5\left(\frac{1}{z}Y(z)\right)+6\left(\frac{1}{z^2}Y(z)\right)=3\left(\frac{1}{z}X(z)\right)+5\left(\frac{1}{z^2}X(z)\right)$$

$$\left(1-\frac{5}{z}+\frac{6}{z^2}\right)Y(z)=\left(\frac{3}{z}+\frac{5}{z^2}\right)X(z)$$

$$\underbrace{\left(z^2-5z+6\right)}_{P(z)}Y(z)=\underbrace{\left(3z+5\right)}_{Q(z)}X(z)$$

$$Y(z)=\overbrace{\underbrace{\left(\frac{3z+5}{z^2-5z+6}\right)}_{H(z)}X(z)}^{prinudni\quad odziv}$$

Primer, impulsni i prinudni odziv jednačina sa predikcijama:

$$y\left[n+2\right]\ -\ 5y\left[n+1\right]\ +\ 6y\left[n\right]\ =\ 3x\left[n+1\right]\ +\ 5x\left[n\right]$$

$$z^2Y(z) - 5zY(z) + 6Y(z) = 3zX(z) + 5X(z)$$

$$\underbrace{\left(z^2 - 5z + 6\right)}_{P(z)} Y(z) = \underbrace{\left(3z + 5\right)}_{Q(z)} X(z)$$

$$Y(z) = \overbrace{\underbrace{\left(\frac{3z+5}{z^2 - 5z + 6}\right)}_{H(z)} X(z)}^{prinudni \quad odziv}$$

Kao što se vidi rezultat je identičan.

****

Ako se jednačina sa kašnjenjima rešava zajedno sa preinicijalnim uslovima, dobija se rešenje u kome se u Z domenu mogu razdvojiti prinudni i sopstveni odziv.

Primer:

$$y[n] \; - \; 5y[n-1] \; + \; 6y[n-2] \; = \; 3x[n-1] \; + \; 5x[n-2]$$

$$y[-1] \; = \; 11/6, y[-2] \; = \; 37/36$$

$$x[n] \; = \; 2^{-n}u[n]$$

Rešenje:

Za $x[n]$ se primenjuje teorema a) jer je kauzalno, a $y[n]$ nije kazalan signal jer ima vrednosti za $n < 0$ pa se na njega primenjuje teorema c)

$$Y(z) - 5\left(\frac{1}{z}Y(z) + y[-1]\right) + 6\left(\frac{1}{z^2}Y(z) + \frac{1}{z}y[-1] + y[-2]\right) = 3\left(\frac{1}{z}X(z)\right) + 5\left(\frac{1}{z^2}X(z)\right)$$

$$\left(1 - \frac{5}{z} + \frac{6}{z^2}\right)Y(z) - \left(3 - \frac{11}{z}\right) = \left(\frac{3}{z} + \frac{5}{z^2}\right)X(z)$$

$$\underbrace{\left(z^2 - 5z + 6\right)}_{P(z)} Y(z) - \left(3z^2 - 11z\right) = \underbrace{\left(3z + 5\right)}_{Q(z)} X(z)$$

$$Y(z) = \overbrace{\underbrace{\left(\frac{3z+5}{z^2 - 5z + 6}\right)}_{H(z)} X(z)}^{prinudni \quad odziv} + \overbrace{\frac{3z^2 - 11z}{z^2 - 5z + 6}}^{sopstveni}$$

$$y[n]=\left[\underbrace{5(2)^n-2(3)^n}_{sopstveni}\underbrace{-\frac{22}{3}(2)^n+\frac{28}{5}(3)^n+\frac{26}{15}(0.5)^n}_{prinudni}\right]u[n]$$

$$y[n]=\left[\frac{26}{15}(0.5)^n-\frac{7}{3}(2)^n+\frac{18}{5}(3)^n\right]u[n]$$

Isti sistem može da se opiše jednačinom sa predikcijama

$$y[n+2]\ -\ 5y[n+1]\ +\ 6y[n]\ =\ 3x[n+1]\ +\ 5x[n]$$
$$y[0]\ =\ 3, y[1]\ =\ 7$$
$$x[n]\ =\ 2^{-n}u[n]$$

U ovom slučaju ptrebno je koristiti i postinicijalne vrednosti za $x[n]$ zbog primene teoreme b)

$$\mathrm{Z}\{x[n+1]\}=z\left(X(z)-\underbrace{x[0]}_{1}\right)=zX(z)-z$$

$$\mathrm{Z}\{x[n+n_0]\}=z^{n_0}\left(X(z)-\sum_{k=0}^{n_0-1}x[k]z^{-k}\right),\quad n_0>0$$

$$z^2\left(Y(z)-y[0]-y[1]z^{-1}\right)-5z\left(Y(z)-y[0]\right)+6Y(z)=3\left(zX(z)-z\right)+5X(z)$$
$$y[0]\ =\ 3, y[1]\ =\ 7$$
$$\underbrace{\left(z^2-5z+6\right)}_{P(z)}Y(z)-\left(3z^2+7z\right)+15z=\underbrace{\left(3z+5\right)}_{Q(z)}X(z)-3z$$
$$\underbrace{\left(z^2-5z+6\right)}_{P(z)}Y(z)-\left(3z^2-11z\right)=\underbrace{\left(3z+5\right)}_{Q(z)}X(z)$$
$$Y(z)=\overbrace{\underbrace{\left(\frac{3z+5}{z^2-5z+6}\right)}_{H(z)}X(z)}^{prinudni\quad odziv}+\overbrace{\frac{3z^2-11z}{z^2-5z+6}}^{sopstveni}$$

Rešenje koje se dobija je identično rešenju kada je sistem bio opisan diferencnom jednačinom sa kašnjenjima.