Електротехнички факултет Универзитета у Београду — Катедра за Електронику

Допуштене таблице и формуле на колоквијуму и испитима из Сигнала и система

[Последња измена од **17. јун 2021. 01:00h**]

Број индекса (година/број)	Име и презиме	Параф дежурног наставника
/		

Напомене. Дозвољено је понети овај лист на све облике испита или колоквијума. Лист штампати двострано. Потребно је попунити податке у таблици. Дежурни наставник парафира лист на одговарајућем месту. Није дозвољено писати по овом листу. Лист се мора предати заједно са вежбанком и формуларом.

Конволуција континуалних сигнала.

$x(t)$	$y(t)$	$x * y(t)$
$e^{\lambda t}\,u(t)$	$e^{\lambda t}\,u(t)$	$\frac{1}{2} t e^{\lambda t}\,u(t)$
$t^N\,u(t)$	$e^{\lambda t}\,u(t)$	$\left(\frac{N! e^{\lambda t}}{\lambda^{N+1}} - \sum_{k=0}^{N} \frac{N! t^{N-k}}{\lambda^{k+1}(N-k)!}\right) u(t)$
$t^M\,u(t)$	$t^N\,u(t)$	$\frac{M!N!}{(N+M+1)!} t^{N+M+1}\,u(t)$
$t e^{\lambda_1 t}\,u(t)$	$e^{\lambda_2 t}\,u(t)$	$\frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t} + (\lambda_1-\lambda_2) t e^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\,u(t)$
$t^M e^{\lambda t}\,u(t)$	$t^N e^{\lambda t}\,u(t)$	$\frac{M!N!}{(N+M+1)!} t^{N+M+1} e^{\lambda t}\,u(t)$
$e^{-\sigma t}\cos(\omega t+\theta)\,u(t)$	$e^{\lambda t}\,u(t)$	$\frac{\cos(\psi) e^{\lambda t} - e^{-\sigma t}\cos(\omega t+\psi)}{\sqrt{\omega^2+(\sigma+\lambda)^2}}\,u(t)$ где су $\phi = \arg((\sigma+\lambda)+j\omega)$, и2 $\psi = \theta - \phi$

Конволуција дискретних сигнала.

$x[n]$	$y[n]$	$x * y[n]$
$\lambda^n\,u[n]$	$\lambda^n\,u[n]$	$(1+n)\lambda^n\,u[n]$
$n\,u[n]$	$\lambda^n\,u[n]$	$\frac{\lambda^{n+1} - \lambda(1+n) + n}{(\lambda-1)^2}\,u[n]$
$n\lambda_1^n\,u[n]$	$\lambda_2^n\,u[n]$	$-\frac{\lambda_1\left(\lambda_1^n\lambda_2 n + \lambda_1^n\lambda_2 - \lambda_1^{n+1} n - \lambda_2^{n+1}\right)}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\,u[n]$
$n\lambda^n\,u[n]$	$\lambda^n\,u[n]$	$\frac{\lambda^n n(n+1)}{2}\,u[n]$

Неки формални развоји.

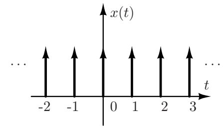
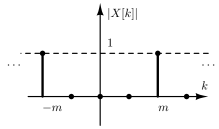
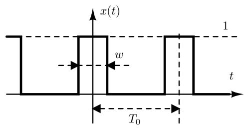
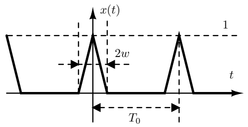
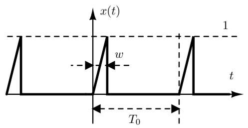
За $|a| < 1$ важе развоји на основном периоду $T_F = T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\frac{a\sin(\omega t)}{1-2a\cos(\omega t)+a^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \sin(k\omega t),$$

$$\frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega t)+a^2} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(k\omega t),$$

$$\frac{1-a\cos\omega t}{1-2a\cos(\omega t)+a^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(k\omega t),$$

Фуријеови редови континуалних сигнала.

Основни период $x(t)$	$X[k] = \mathcal{FS}\{x(t)\}$	Услов
$\delta(t)$ 	$\mathrm{comb}_m[k]$ 	$T_F = m\,T_0$
$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{w}\right)$ 	$\frac{w}{T_0}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k\,w}{T_0}\right)$	$T_F = T_0$
$\mathrm{tri}\left(\frac{t}{w}\right)$ 	$\frac{w}{T_0}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k\,w}{T_0}\right)$	$T_F = T_0$
$\frac{t}{w}\left(u(t) - u(t-w)\right)$ 	$\frac{e^{-jkw\omega_0}}{wk^2\,T_0\,\omega_0^2}\left(1 - e^{jlw\omega_0} + jkw\omega_0\right)$	$T_F = T_0$
$\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{w}\right)$	$\frac{w}{T_0}\,\mathrm{rect}\left(\frac{k\,w}{T_0}\right)$	$T_F = T_0$

Неки таблични интеграли.

1. $\int e^{at} P_n(t)\,dt = C + \frac{e^{at}}{a}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{a^k}\frac{d^k P_n(t)}{dt^k}$, где је P_n полином n-тог реда
2. $\int e^{at}\cos(bt)\,dt = C + \frac{e^{at}\left(a\cos(bt) + b\sin(bt)\right)}{a^2+b^2}$
3. $\int e^{at}\sin(bt)\,dt = C + \frac{e^{at}\left(-b\cos(bt) + a\sin(bt)\right)}{a^2+b^2}$
4. $\int e^{at} b^t\,dt = C + \frac{b^t e^{at}}{a+\ln(b)}$, $b > 0$, $a \neq -\ln(n)$

Фуријеове трансформације континуалних сигнала.

$x(t)$	$X(j\omega) = \mathcal{FT}\{x(t)\}$
1	$2\pi\,\delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$
$\mathrm{rect}(t)$	$\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$\mathrm{sinc}(t)$	$\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$\mathrm{comb}(t)$	$\mathrm{comb}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\left(\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)\right)$
$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi\left(\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)\right)$
$\mathrm{sinc}^2(t)$	$\mathrm{tri}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$\mathrm{tri}(t)$	$\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$e^{-at}\,u(t)$, $\Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a+j\omega}$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}\,u(t)$, $\Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$
$e^{-at}\cos(\omega_0 t)\,u(t)$, $\Re\{a\} > 0$	$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$
$e^{-at}\sin(\omega_0 t)\,u(t)$, $\Re\{a\} > 0$	$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$

Посебно је

$$\mathcal{FT}^{-1}\left\{\frac{j\omega A + B}{(j\omega+a)^2+\omega_0^2}\right\} = e^{-at}\left(A\cos(\omega_0 t) + \frac{B-aA}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right) u(t)$$

У свим изразима је: $\mathrm{sinc}(t) \triangleq \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

Унилатерарне Лапласове трансформације.

$x(t)$	$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$
$\delta(t)$	1
$\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{1}{s}$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}$
$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}\,\mathrm{u}(t)$	$s^{-\frac{3}{2}}$
$\dfrac{t^n}{n!}\,\mathrm{u}(t), \quad n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{1}{s^{n+1}}$
$\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{1}{s+a}$
$\dfrac{t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-at}}{(n-1)!}\,\mathrm{u}(t), \quad n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{1}{(s+a)^n}$
$\cos(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$
$\sinh(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$\dfrac{t}{2\omega}\,\sin(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\dfrac{\sin(\omega t)-\omega t\,\cos(\omega t)}{2\omega}\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega t)\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Фуријеова трансформација дискретног сигнала.

$x[n]$	Основни период ($0 \le \Omega < 2\pi$) $X(\mathrm{j}\Omega) = \mathcal{FT}\{x[n]\}$
$\delta[n]$	1
$\delta[n-N]$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega N}$
$\sum\limits_{p=-\infty}^{+\infty}\delta[n-p\,N]$	$\dfrac{2\pi}{N}\ \mathrm{rep}_{\frac{2\pi}{N}}\,\delta(\Omega)$
1	$2\pi\,\mathrm{rep}_{2\pi}\,\delta(\Omega)$
$\mathrm{sgn}[n]$	$\dfrac{2}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}$
$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n}$	$2\pi\,\mathrm{rep}_{2\pi}\,\delta(\Omega-\Omega_0)$
$\cos(\Omega_0 n+\Theta)$	$\pi\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Theta}\,\mathrm{rep}_{2\pi}\big(\delta(\Omega-\Omega_0)+\,\delta(\Omega+\Omega_0)\big)$
$\sin(\Omega_0 n+\Theta)$	$\dfrac{\pi}{\mathrm{j}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Theta}\,\mathrm{rep}_{2\pi}\big(\delta(\Omega-\Omega_0)-\,\delta(\Omega+\Omega_0)\big)$
$\mathrm{u}[n]$	$\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}+\pi\ \mathrm{rep}_{2\pi}\,\delta(\Omega)$
$a^n\,\mathrm{u}[n]$	$\dfrac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}$
$(n+1)\,a^n\,\mathrm{u}[n]$	$\dfrac{1}{\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}\right)^2}$
$\dfrac{(n+r-1)!}{n!\,(r-1)}\,a^n\,\mathrm{u}[n]$	$\dfrac{1}{\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}\right)^r}$
$\mathrm{rect}_N[n]$	$\dfrac{\sin\left(\Omega\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$
$\dfrac{\sin(\Omega_0 n)}{\pi n}$ $0<\Omega_0<\pi$	$\mathrm{rep}_{4\pi\Omega_0}\,\mathrm{rect}\left(\dfrac{\Omega}{2\Omega_0}\right)$
$\mathrm{tri}_N[n]$	$\dfrac{1}{N+1}\left(\dfrac{\sin\left(\Omega\frac{N+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}\right)^2$
$\sum\limits_{p=\langle N\rangle} a_p\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}p\,\frac{2n\pi}{N}}$	$2\pi\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\,\delta\left(\Omega-\dfrac{2k\pi}{N}\right)$

где је $\mathrm{rep}_\alpha\,X(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(\Omega+m\alpha)$, периодично продужење функције $X(\Omega)$. $|a|<1$. $N \in \mathbb{N}$.

$\mathrm{rect}_N[n] \triangleq \sum_{k=-N}^{N}\delta[n-k]$.

$\mathrm{tri}_N[n] \triangleq \left(1-\dfrac{|n|}{N+1}\right)\mathrm{rect}_N[n]$.

$\mathcal{Z}$ трансформација.

$x[n]$	$\mathcal{Z}\{x[n]\}$
$\delta[n]$	1
$a^n\,\mathrm{u}[n]$	$\dfrac{z}{z-a}$
$n\,a^n\,\mathrm{u}[n]$	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$
$\dfrac{n\,(n+1)}{2}\,\mathrm{u}[n]$	$\dfrac{z^2}{(z-1)^3}$
$\binom{n+k}{k}\,a^n\,\mathrm{u}[n]$	$\left(\dfrac{z}{z-a}\right)^{k+1}$
$\binom{n+m}{k}\,\mathrm{u}[n], \quad m \ge 0$	$\dfrac{z^{m+1}}{(z-1)^{k+1}}$
$(-1)^n\,\binom{m}{n}\,\mathrm{u}[n], \quad m \ge 0$	$\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^m$
$a^n\ \cos[n\theta]\,\mathrm{u}[n]$	$\dfrac{z\,(z-a\cos(\theta))}{z^2-2az\,\cos(\theta)+a^2}$
$a^n\ \sin[n\theta]\,\mathrm{u}[n]$	$\dfrac{az\,\sin(\theta)}{z^2-2az\,\cos(\theta)+a^2}$
$a^n\ \cosh[n\theta]\,\mathrm{u}[n]$	$\dfrac{z\,(z-a\cosh(\theta))}{z^2-2az\,\cosh(\theta)+a^2}$
$a^n\ \sinh[n\theta]\,\mathrm{u}[n]$	$\dfrac{az\,\sinh(\theta)}{z^2-2az\,\cosh(\theta)+a^2}$