BROJNI KODOVI

Zadatak 1

a) Predstaviti sledeće decimalne brojeve u BCD kôdu, kôdu više 3, *Gray*-ovom BCD kôdu, BCD 2421 kôdu i *Gray*-ovom binarnom kôdu: 43, 0, 15, 49, 62. Za svaki od pomenutih kôdova odrediti težinske koeficijente bita.
b) Brojeve 101001.100101, 10010011.1110101 i 1011.101001 prebaciti u decimalni brojni sistem ukoliko se interpretiraju kao brojevi zapisani u BCD kôdu, kôdu više 3, *Gray*-ovom BCD kôdu, BCD 2421 kôdu i *Gray*-ovom binarnom kôdu.

REŠENJE:

U tabeli su prikazane cifre od 0 do 9 prikazane u BCD (8421) kôdu, BCD 2421 kôdu, kôdu više 3 i *Gray*-ovom BCD kôdu.

Cifra	BCD (8421)	BCD 2421	Više 3	*Gray* BCD
0	0000	0000	0011	0000
1	0001	0001	0100	0001
2	0010	0010	0101	0011
3	0011	0011	0110	0010
4	0100	0100	0111	0110
5	0101	1011	1000	0111
6	0110	1100	1001	0101
7	0111	1101	1010	0100
8	1000	1110	1011	1100
9	1001	1111	1100	1000

Kôdovi prikazani u tabeli predstavljaju kôdne reči. Ono što može da se primeti je da za svaki način kodovanja postoji više mogućih kôdova nego što ima kôdnih reči.

Dalje, vidi se su kôdovi BCD 2421 i kôd više 3 samokomplementirajući, odnosno kôdne reči cifara 0-4 i cifara 9-5 predstavljaju komplementne vrednosti u komplementu maksimalne vrednosti.

Lepa osobina *Gray*-ovog BCD kôda je da se uzastopne kodne reči razlikuju samo u jednom bitu, zbog čega je ovaj kod pogodan za realizacije sistema gde je bitno da prilikom rada ne dolazi do gličeva.

Još jedan način kodovanja je *Gray*-ov binarni kôd. On se razlikuje od *Gray*-ovog BCD kôda jer važi za proizvoljne brojeve i veličine kodnih reči.

Jednobitni *Gray*-ov binarni kôd predstavljaju samo cifre 1 i 0.

Dvobitni *Gray*-ov binarni kôd se dobija tako što je za prve dve kôdne reči bit najveće težine 0, a preostali bit se dobija prepisivanjem jednobitnog *Gray*-ovog kôda, dok je za druge dve kodne reči bit najveće težine 1 a preostali bit se dobija prepisivanjem jednobitnog *Gray*-ovog kôda u obrnutom redosledu.

Na isti način se dobijaju kodne reči *Gray*-ovog binarnog kôda i za proizvoljnu dužinu n:

1) prvih 2^{n-1} kôdnih reči se dobija tako što se za bit najveće težine uzme 0, a preostali biti predstavljaju kôdne reči $n-1$-bitnog *Gray*-ovog kôda
2) drugih 2^{n-1} kôdnih reči se dobija tako što se za bit najveće težine uzme 1, a preostali biti predstavljaju kôdne reči $n-1$-bitnog *Gray*-ovog kôda zapisane u obrnutom redosledu.

U nastavku su prikazane kôdne reči za 1-bitni, 2-bitni i 3-bitni *Gray*-ov binarni kôd

1-bitni	2-bitni	3-bitni
0	00	000
1	01	001
	11	011
	10	010
		110
		111
		101
		100

Drugi način za dobijanje *Gray*-ovog binarnog kôda iz binarnog kôda je sledeći:

1) cifre datog binarnog broja se posmatraju s desna nalevo i numerišu sa $0 \dots n-1$
2) smatra se da se na poziciji n nalazi 0
3) cifra na poziciji i u broju u *Gray*-ovom binarnom kôdu se dobija tako što se uradi XOR cifara na mestima i i $i+1$ u broju u binarnom kôdu.

Kada se vraća iz *Gray*-ovog binarnog kôda u binarni kôd, postupak je sledeći:

1) cifra najveće težine se prepisuje
2) sledeća cifra se dobija tako što se uradi XOR prethodne dobijene cifre i cifre koja se nalazi na odgovarajućem težinskom mestu u broju u *Gray*-ovom binarnom kôdu.

a) Koristeći gore navedenu tabelu, dobija se

Broj	BCD	Više 3	*Gray* BCD	BCD 2421	*Gray* binarni
43	01000011	01110110	01100010	01000011	$101011_B = 111110_G$
0	0000	0011	0000	0000	0
15	00010101	01001000	00010111	00011011	$1111_B = 1000_G$
49	01001001	01111100	01101000	01001111	$110001_B = 101001_G$
62	01100010	10010101	01010011	11000010	$111110_B = 100001_G$

b) Prilikom tumačenja binarnih brojeva kao decimalnih brojeva zadatih u određenom kôdu, potrebno je obratiti pažnju na to da li dobijeni kôdovi pripadaju kodnim rečima. Ukoliko pripadaju, moguće je uraditi, ali ako neki kôd ne pripada kôdnim rečima, nije moguće.

Kod rada sa decimalnom tačkom, cifre se gledaju u odnosu na decimalnu tačku, dok se samo kod *Gray*-ovog binarnog decimalna tačka zanemaruje, pa se nakon konverzije dodaje na odgovarajuće mesto.

Broj	BCD	Više 3	*Gray* BCD	BCD 2421	*Gray* binarni
101001.100101	29.94	–	–	–	$110001.000110_2 = 49.09375$
10010011.1110101	–	–	–	–	$11100010.1011001_2 = 226.6953125$
1011.101001	–	8.71	–	–	$1101.001110_2 = 13.21875$

Zadatak 2

Izvršiti sledeća sabiranja decimalnih brojeva u BCD kodu: $34 + 13$, $35 + 86$, $1026 + 192$, $529 + 432$.

REŠENJE:

Sabiranje BCD brojeva se vrši BCD cifru po BCD cifru, sabirajući ih binarno. Ukoliko je neka od BCD cifara veća od 1001 (tj. 9), tada je potrebno dodati na tu cifru vrednost korekcije 0110 (tj. 6).

$34 + 13$:

```
         0011 0100
+        0001 0011
----------------------
              0 0111 (nema korekcije)
         0011
+        0001
----------------------
         0100 0111 (nema korekcije) (= 47)
```

$35 + 86$:

```
              0011 0101
+             1000 0110
------------------------
                  0 1011 (potrebna korekcija)
+                   0110 (korekcija)
------------------------
                  1 0001
              0011
+             1000
------------------------
              1100 0001 (potrebna korekcija)
+             0110       (korekcija)
------------------------
            1 0010 0001 (= 121)
```

$1026 + 192$:

```
              0001 0000 0010 0110
+             0000 0001 1001 0010
------------------------------------
                            0 1000 (nema korekcije)
                        0010
                   +    1001
                   ----------------
                        1011 1000 (potrebna korekcija)
                   +    0110       (korekcija)
                   ----------------
                      1 0001 1000
                   0000
              +    0001
              ---------------------
                 0 0010 0001 1000 (nema korekcije)
              0001
+             0000
------------------------------------
              0001 0010 0001 1000 (nema korekcije) (= 1218)
```

529 + 432:

```
          0101 0010 1001
+         0100 0011 0010
                    1011 (potrebna korekcija)
                 +  0110 (korekcija)
                  1 0001
               0010
            +  0011
             0 0110 0001 (nema korekcije)
          0101
+         0100
          1001 0110 0001 (nema korekcije) (= 961)
```

Zadatak 3

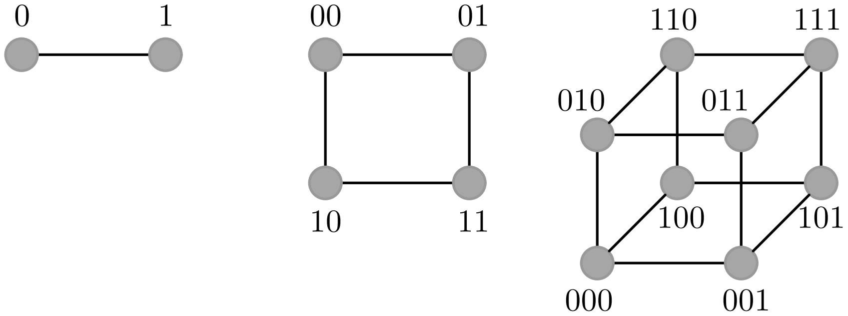
a) Odrediti *Hamming*-ovo rastojanje kôdnih reči 100 i 101, 110 i 011, 011 i 100.
b) Dati geometrijsku interpretaciju *Hamming*-ovog rastojanja.
c) Koliko je *Hamming*-ovo rastojanje dva uzastopna broja u *Gray*-ovom kôdu?
d) Za dekadni broj 23, odrediti sve brojeve koji su na *Hamming*-ovom rastojanju 1 od njega, ukoliko je broj predstavljen u BCD kôdu, kôdu više 3, *Gray*-ovom BCD kôdu, BCD 2421 kôdu i *Gray*-ovom binarnom kôdu.

REŠENJE:

Hamming-ovo rastojanje predstavlja broj bita u kojima se razlikuju dve kodne reči.

a) Odatle sledi da je Hamming-ovo rastojanje reči
$10\underline{0}$ i $10\underline{1} \longrightarrow Hd = 1$
$\underline{1}1\underline{0}$ i $\underline{0}1\underline{1} \longrightarrow Hd = 2$
$\underline{011}$ i $\underline{100} \longrightarrow Hd = 3$
b) Geometrijsku interpretaciju *Hamming*-ovog rastojanja predstavljaju tzv. n-kocke. n-kocke predstavljaju oblike koji imaju onoliko čvorova koliko ima kôdova, a spojeni su samo oni čvorovi između kojih je *Hamming*-ovo rastojanje kodova $Hd = 1$.

Za jednobitni kôd, n-kocka se svodi na duž. Za dvobitni, svodi se na kvadrat. Za trobitni predstavlja kocku.



Slika 3.1: n-kocke

c) Pošto se uzastopni brojevi u *Gray*-ovom kôdu razlikuju samo u jednom bitu, onda je *Hamming*-ovo rastojanje uzastopnih brojeva u *Gray*-ovom kôdu $Hd = 1$.

d) Da bismo odredili koji su sve brojevi na *Hamming*-ovom rastojanju 1 od broja 23 u različitim predstavama, potrebno je da broj 23 napišemo u odgovarajućoj binarnoj predstavi, a da zatim menjamo jedan po jedan bit, i ukoliko dobijena vrednost predstavlja kôdnu reču u datoj predstavi, onda se taj broj prihvata.

Kôd	BCD	Više 3	*Gray* BCD	BCD 2421
23	00100011	01010110	00110010	00100011
Brojevi na $Hd = 1$	$00100010 = 22$	$01010111 = 24$	$00110011 = 22$	$00100010 = 22$
	$00100001 = 21$	$01010100 = 21$	$00110000 = 20$	$00100001 = 21$
	$00100111 = 27$	~~01010010~~	$00110110 = 24$	~~00100111~~
	~~00101011~~	~~01011110~~	~~00111010~~	$00101011 = 25$
	$00110011 = 33$	$01000110 = 13$	$00100010 = 33$	$00110011 = 33$
	$00000011 = 3$	$01110110 = 43$	$00010010 = 13$	$00000011 = 3$
	$01100011 = 63$	~~00010110~~	$01110010 = 53$	~~01100011~~
	~~10100011~~	~~11010110~~	~~10110010~~	~~10100011~~

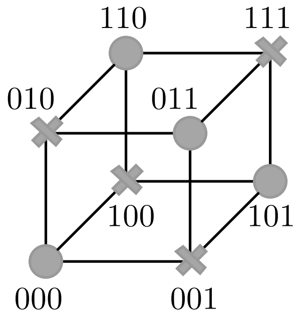
Kôd	*Gray* binarni
23	$10111_B = 11100_G$
Brojevi na $Hd = 1$	$11101_G = 10110_B = 22$
	$11110_G = 10100_B = 20$
	$11000_G = 10000_B = 16$
	$10100_G = 11000_B = 24$
	$01100_G = 01000_B = 8$

Zadatak 4

a) Predstaviti sledeće brojeve u kôdu sa parnom, kao i u kôdu sa neparnom parnošću: 100101, 10101011, 1101011, 110100101.
b) Koliko iznosi minimalno rastojanje između dve kôdne reči date u kodu sa parnom parnošću?
c) Da li kôd sa parnom parnosti ima mogućnost detekcije greške? Da li kôd sa neparnom parnosti ima mogućnost korekcije greške?

REŠENJE:
Kôd sa minimalnim *Hamming*-ovim rastojanjem 1 nam ne pruža mogućnost detekcije grešaka, jer ukoliko dođe do greške u prenosu, kôd koji stigne će opet pripadati kôdnim rečima. Zato je potrebno povećati minimalno *Hamming*-ovo rastojanje.

Pogledajmo na primeru n-kocke za trobitni kôd.



Slika 4.1: Primer n-kocke za trobitni kôd

Ukoliko proglasimo čvorove na slici u kojima se nalaze kružići za kôdne reči u nekom našem kôdu, a čvorove u kojima su iksevi za ne-kôdne reči, dobijamo proizvoljan kôd u kojem je minimalno *Hamming*-ovo rastojanje 2. Na taj način, ukoliko prilikom prenosa dođe do bilo kakve jednobitne greške, moćićemo da je detektujemo. Dakle, ukoliko je minimalno *Hamming*-ovo rastojanje kôdnih reči nekog koda $Hd = 2$, imamo mogućnost detekcije jednobitnih grešaka (preciznije, neparnog broja grešaka).

Na tom principu se zasniva i kôd parnosti (parne i neparne). Kod oba ova kôda se dodaje bit najmanje težine, koji pokazuje da li je u informacionim bitima paran (parna parnost) ili neparan (neparna parnost) broj jedinica. Na taj način se dobija kôd sa $Hd = 2$, jer ukoliko se promeni jedan (ili neparan broj) bit, promeniće se i parnost kôda, čime se detektuje greška. U tabeli je dat primer za 3 informaciona bita.

Informacioni biti	Parna parnost	Neparna parnost
000	000**0**	000**1**
001	001**1**	001**0**
010	010**1**	010**0**
011	011**0**	011**1**
100	100**1**	100**0**
101	101**0**	101**1**
110	110**0**	110**1**
111	111**1**	111**0**

a) Parna parnost:

- 10101011 $\longrightarrow$ 10101011**1**
- 1101011 $\longrightarrow$ 1101011**1**
- 110100101 $\longrightarrow$ 110100101**1**

Neparna parnost:

- 10101011 $\longrightarrow$ 10101011**0**
- 1101011 $\longrightarrow$ 1101011**0**
- 110100101 $\longrightarrow$ 110100101**0**

b) Kao što se može videti iz tabele, minimalno *Hamming*-ovo rastojanje između dve kôdne reči date u kôdu parnosti je $Hd = 2$.

c) Pošto je kôd parnosti (i parne i neparne) kôd sa *Hamming*-ovim rastojanjem 2, onda ima mogućnost detekcije grešaka. Međutim, nema dovoljno informacija za korekciju grešaka, i za to se koriste kôdovi sa *Hamming*-ovim rastojanjem 3 i više.

Zadatak 5

Odrediti mogućnost korekcije i detekcije 1-bitnih, 2-bitnih, 3-bitnih i 4-bitnih grešaka kôda u kome je minimalno *Hamming*-ovo rastojanje kôdnih reči 4. Ponoviti zadatak za slučaj kôda sa minimalnim *Hamming*-ovim rastojanjem kôdnih reči 5.

REŠENJE:

Za kôd sa *Hamming*-ovim rastojanjem m važi formula

$$m = 2c + d + 1$$

gde je c-broj grešaka koje je moguće korigovati, a d-broj grešaka koje je moguće detektovati.

Koristeći tu formula, za kôd u kome je minimalno *Hamming*-ovo rastojanje kôdnih reči 4 se dobija da je moguće:

- $c = 0$, $d = 3$ - detekcija 3-bitnih grešaka, bez korekcije
- $c = 1$, $d = 1$ - korekcija 1-bitne greške i detekcija još 1-bitne greške
- 2-bitne greške je moguće detektovati, ali ne i korigovati, dok nije moguća detekcija (ni korekcija) 4-bitnih grešaka

Za kôd u kome je minimalno *Hamming*-ovo rastojanje kôdnih reči 5 se dobija da je moguće:

- $c = 0$, $d = 4$ - detekcija 4-bitnih grešaka, bez korekcije
- $c = 1$, $d = 2$ - korekcija 1-bitne greške i detekcija još 2-bitne greške
- $c = 2$, $d = 0$ - korekcija 2-bitne greške, bez dodatnih detekcija
- 3-bitne greške je moguće detektovati, ali ne i korigovati, kao i 4-bitne

---

Zadatak 6

a) Izvršiti korekciju greške u prijemu ako je primljena sekvenca $d_7d_6d_5c_4d_3c_2c_1 = 1011100$ kodirana *Hamming*-ovim kôdom sa 3 kontrolna bita.
b) Zaštiti originalnu sekvencu iz prethodne tačke kôdom sa *Hamming*-ovim rastojanjem 4.
c) Koliko je maksimalni broj informacionih bita u kôdnoj reči datoj u *Hamming*-ovom kôdu sa minimalnim *Hamming*-ovim rastojanjem 3, ako imamo ukupno 5 kontrolnih bita?

REŠENJE:

Kao primer kôda kod koga je *Hamming*-ovo rastojanje veće od 2, imamo *Hamming*-ov kôd.

Hamming-ov kôd se realizuje tako što se na odgovarajućim mestima ubacuju kontrolni biti, koji imaju ulogu bita parne parnosti za odgovarajuće grupe informacionih bita. Ukoliko imamo i kontrolnih bita, kôd koji se šalje može da ima najviše $n = 2^i - 1$ bita, odakle sledi da je sa i kontrolnih bita moguće zaštititi najviše $d = 2^i - i - 1$ informacionih bita.

Gledano na primeru *Hamming*-ovog kôda sa $i = 3$ kontrolna bita imamo $n = 7$ i $d = 4$.

d_7	d_6	d_5	c_4	d_3	c_2	c_1
			BP			
					BP	
						BP

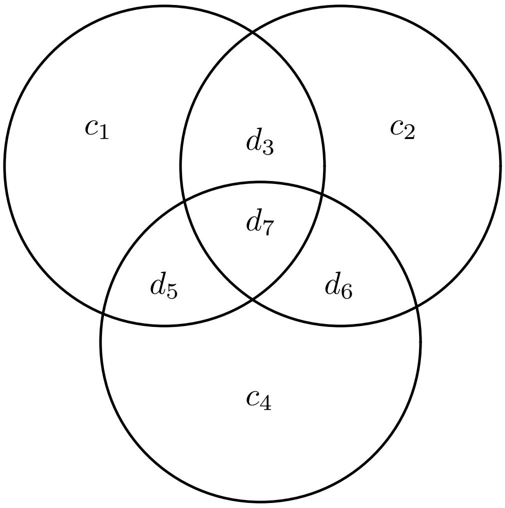
Slika 6.1: Kontrolni biti u *Hamming*-ovom kôdu

Kontrolni biti u *Hamming*-ovom kôdu se postavljaju na mestima koji su stepen broja 2. Svaki kontrolni bit predstavlja bit parnosti za određene grupe bita. Ako je kontrolni bit na poziciji 2^{j-1}, onda on ne kontroliše najnižih $j - 1$ bita, pa kontroliše sledećih j bita, pa ne kontroliše narednih j bita i tako naizmenično.

Drugi način za određivanje toga koje bite kontroliše odgovarajući kontrolni bit je sledeći:

- kontrolni bit se javlja na pozicijama koje u svom binarnom zapisu imaju samo jedan bit vrednosti 1, odnosno koje su stepen broja 2
- odgovarajući kontrolni bit kontroliše sve bite čija pozicija u svom binarnom zapisu ima bite vrednosti 1 na istoj poziciji gde je i bit vrednosti 1 u binarnom zapisu pozicije kontrolnog bita.

Drugi način za posmatranje *Hamming*-ovog koda je kroz Veneove dijagrame.



Slika 6.2: Tumačenje *Hamming*-ovog kôda pomoću Veneovih dijagrama

Na dijagramu su prikazani kontrolni i informacioni biti, kao i veze između kontrolnih i informacionih bita.

a) Pošto je pristigla sekvenca 1011100, potrebno je proveriti vrednosti kontrolnih bita.

- $\underline{101\mathbf{1}}100$ - bit c_4 ukazuje na grešku, pošto je parnost neparna
- $\underline{10}11\underline{1\mathbf{0}}0$ - bit c_2 ne ukazuje na grešku, pošto je parnost parna
- $\underline{1}0\underline{1}1\underline{1}0\underline{\mathbf{0}}$ - bit c_1 ukazuje na grešku, pošto je parnost neparna

Ukoliko se pogleda gore navedeni Venеov dijagram, vidi se da biti c_4 i c_1 zajedno kontrolišu bit d_7 i d_5, tako da su oni kandidati za bite u kojima je došlo do greške. Pošto bit c_2 kontroliše i bit d_7, onda on nije pogrešan, već je do greške došlo u bitu d_5. Poslata (ispravna) vrednost se dobija invertovanjem bita d_5, tako da je poslata sekvenca 1001100.

Drugi način za utvrđivanje bita na kojem je došlo do greške je gledanjem kontrolnih bita. Ako se svakom kontrolnom bitu koji pokazuje da nije došlo do greške pridruži 0, a svakom koji ukazuje na to da je došlo do greške pridruži 1, prostim čitanjem dobijenog kôda moguće je utvrditi na kom bitu je došlo do greške. U ovom slučaju, dobijamo $c_4c_2c_1 = 101$, odakle sledi da je greška na bitu d_5.

b) Da bi se zaštitila ova ista sekvenca kôdom sa $Hd = 4$, potrebno je dodati kontrolni bit, a to je najjednostavnije učiniti ako se doda bit parnosti za celu sekvencu, pa bi početna (ispravna) sekvenca izgledala

$$\begin{array}{cccccccc} d_7 & d_6 & d_5 & c_4 & d_3 & c_2 & c_1 & \underline{c_0} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \underline{1} \end{array}$$

c) Pošto je rečeno da imamo $i = 5$ kontrolnih bita, maksimalan broj bita koji je moguće poslati je $n = 31$, odakle se dobija da je maksimalan broj informacionih bita

$$d = 2^i - i - 1 = 31 - 5 = 26$$