ARITMETIČKE OPERACIJE

Zadatak 1

a) Izvršiti sabiranje neoznačenih brojeva u sistemu sa osnovom u kome su dati i odrediti sve bite prenosa: $100.11_2 + 10.01_2$, $11111_2 + 10011_2$ uz ulazni prenos 1, $294_{10} + 42_{10}$, $5325_7 + 4163_7$, $AF3.50_{16} + FB2.B9_{16}$, $26417_8 + 13140_8$
b) Izvršiti oduzimanje neoznačenih brojeva u sistemu sa osnovom u kome su dati i odrediti sve bite prenosa, tj. pozajmice: $110101_2 - 10110_2$, $100010_2 - 10010_2$ uz ulaznu pozajmicu 1, $25.2_{10} - 2.8_{10}$, $436_8 - 627_8$, $FB.2B9_{16} - AF.350_{16}$, $26417_8 - 13140_8$.

REŠENJE:

a) Sabiranje neoznačenih brojeva $X = x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0$ i $Y = y_n y_{n-1} \ldots y_1 y_0$ se u proizvoljnom brojnom sistemu sa osnovom r vrši cifru po cifru počev od cifre najmanje težine, na isti način kao i kod sabiranja dekadnih brojeva. Pri sabiranju cifara x_i i y_i se koristi ulazni prenos c_i i cifra zbira na poziciji i je $s_i = (x_i + y_i + c_i) \bmod r$, dok je izlazni prenos $c_{i+1} = 1$ samo ako je $x_i + y_i + c_i \geq r$. Eventualno treba dopisati cifre 0 ispred onog od sabiraka koji ima manje cifara da bi se izjednačio broj cifara. Decimalne tačke treba poravnati.

$$
\begin{array}{r}
c_{n+1} c_n c_{n-1} \ldots c_1 c_0 \\
x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0 \\
+ \quad y_n y_{n-1} \ldots y_1 y_0 \\
\hline
s_{n+1} s_n s_{n-1} \ldots s_1 s_0
\end{array}
$$

$100.11_2 + 10.01_2$:

```
    0001 10 (ulazni prenos 0)
     100.11₂
+    010.01₂
------------
     111.00₂
```

$11111_2 + 10011_2$ uz ulazni prenos 1:

```
    111111 (ulazni prenos 1)
     11111₂
+    10011₂
-----------
    110011₂
```

$294_{10} + 42_{10}$:

```
    0100 (ulazni prenos 0)
     294₁₀
+    042₁₀
----------
     336₁₀
```

$5325_7 + 4163_7$:

```
    10110 (ulazni prenos 0)
     5325₇
+    4163₇
----------
    12521₇
```

$AF3.50_{16} + FB2.B9_{16}$:

$$\begin{array}{ll} & \texttt{1101 00} \text{ (ulazni prenos 0)} \\ & \texttt{ AF3.50}_{16} \\ + & \texttt{ FB2.B9}_{16} \\ \hline & \texttt{1AA6.09}_{16} \end{array}$$

$26417_8 + 13140_8$:

$$\begin{array}{ll} & \texttt{010000} \text{ (ulazni prenos 0)} \\ & \texttt{26417}_{8} \\ + & \texttt{13140}_{8} \\ \hline & \texttt{41557}_{8} \end{array}$$

b) Oduzimanje neoznačenih brojeva $X = x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0$ i $Y = y_n y_{n-1} \dots y_1 y_0$ se u proizvoljnom brojnom sistemu sa osnovom r vrši cifru po cifru počev od cifre najmanje težine, na isti način kao i kod oduzimanja dekadnih brojeva. Pri oduzimanja cifara x_i i y_i se koristi ulazni prenos (pozajmica) b i cifra razlike na poziciji i je $d_i = (x_i - y_i - b_i) \bmod r$, dok je izlazni prenos (pozajmica) $b_{i+1} = 1$ samo ako je $x_i - y_i - b_i < 0$. Eventualno treba dopisati cifre 0 ispred onog od člana koji ima manje cifara da bi se izjednačio broj cifara. Decimalne tačke treba poravnati. U slučaju oduzimanja većeg broja od manjeg broja, potrebno je izvršiti oduzimanja sa svim datim ciframa i označiti bit izlaznog prenosa (pozajmice)

$$\begin{array}{lr} & b_{n+1} b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0 \\ & x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0 \\ - & y_n y_{n-1} \dots y_1 y_0 \\ \hline & d_{n+1} d_n d_{n-1} \dots d_1 d_0 \end{array}$$

$110101_2 - 10110_2$:

$$\begin{array}{lr} & \texttt{111100} \text{ (ulazna pozajmica 0)} \\ & \texttt{110101}_{2} \\ - & \texttt{10110}_{2} \\ \hline & \texttt{011111}_{2} \end{array}$$

$100010_2 - 10010_2$ uz ulaznu pozajmicu 1:

$$\begin{array}{lr} & \texttt{111111} \text{ (ulazna pozajmica 1)} \\ & \texttt{100010}_{2} \\ - & \texttt{10010}_{2} \\ \hline & \texttt{001111}_{2} \end{array}$$

$25.2_{10} - 2.8_{10}$:

$$\begin{array}{lr} & \texttt{01 0} \text{ (ulazna pozajmica 0)} \\ & \texttt{25.2}_{10} \\ - & \texttt{02.8}_{10} \\ \hline & \texttt{22.4}_{10} \end{array}$$

$436_8 - 627_8$:

$$\begin{array}{lr} & \dots\texttt{111010} \text{ (ulazna pozajmica 0)} \\ & \texttt{436}_{8} \\ - & \texttt{627}_{8} \\ \hline & \dots\texttt{777607}_{8} \end{array}$$

$FB.2B9_{16} - AF.350_{16}$:

```
    011 000 (ulazna pozajmica 0)
     FB.2B9_16
-    AF.350_16
----------------
     4B.F69_16
```

$26417_8 - 13140_8$:

```
    000100 (ulazna pozajmica 0)
     26417_8
-    13140_8
-------------
     13257_8
```

Zadatak 2

Izvršiti sledeće operacije u kodu znak i apsolutna vrednost ako je na raspolaganju dovoljan broj bita:
$A+B$, $A-B$, $B-A$, $-B-A$, $A-2B$, $A+C$, $C-A$, $D+C$, $C-D$, $2A+D$, $A-B+C-D$ ako je $A = 010010$, $B = 001010$, $C = 101100$, $D = 111001$.

REŠENJE:

Prilikom aritmetičke operacije sa brojevima X i Y potrebno je najpre odrediti znak rezultata, kao i apsolutnu vrednost rezultata na osnovu aritmetičkih operacija nad apsolutnim vrednostima operanada X i Y.

Brojevi A i B su pozitivni, dok su C i D negativni. Posmatranjem apsolutnih vrednosti brojeva bit po bit počev od bita najveće težine, zaključujemo da je $|B| < |C| < |A| < |D|$.

$A+B$:
Znak rezultata je pozitivan, s obzirom da se sabiraju dva pozitivna broja. Dakle $A+B = 0x_n \ldots x_1 x_0\ _{ZA}$, gde je $x_n \ldots x_1 x_0$ binarna vrednost zbira $|A| + |B|$ sračunata kao zbir neoznačenih brojeva. Pošto je $|A| + |B| = 10010_2 + 01010_2 = 11100_2$, to je $A + B = 011100_{ZA}$.

$A-B$:
Operacija je oduzimanje dva pozitivna broja. Kako je $|B| < |A|$, to je rezultat pozitivan, pa je $A-B = 0x_n \ldots x_1 x_{0ZA}$, gde je $x_n \ldots x_1 x_0$ binarna vrednost razlike $|A|-|B|$ sračunata kao razlika neoznačenih brojeva. Pošto je $|A| - |B| = 10010_2 - 01010_2 = 01000_2$, to je $A - B = 001000_{ZA}$.

$B-A$:
Operacija je oduzimanje dva pozitivna broja. Kako je $|B| < |A|$, to je rezultat negativan, pa je $B-A = 1x_n \ldots x_1 x_{0ZA}$, gde je $x_n \ldots x_1 x_0$ binarna vrednost razlike $|A|-|B|$ sračunata kao razlika neoznačenih brojeva. Pošto je $|A| - |B| = 10010_2 - 01010_2 = 01000_2$, to je $B - A = 101000_{ZA}$.

$-B-A$:
$-B - A = 111100_{ZA}$

$A-2B$:
Kod množenja binarnih brojeva b brojem oblika 2^n, rezultat se dobija pomeranjem bita broja broja b za n mesta ulevo ubacivanjem nula. Odavde sledi da je u ovom slučaju potrebno oduzeti brojeve $A = 010010$ i $2B = 0010100$. Pošto su oba broja pozitivna i $|A| < |2B|$, rezultat će biti negativan. Pošto je $|2B|-|A| = 10100_2 - 10010_2 = 00010_2$, to je $A-2B = 100010_{ZA}$.

$A + C$:
$A + C = 000110_{ZA}$

$C - A$:
$C - A = 111110_{ZA}$

$D + C$:
$D + C = 1100101_{ZA}$

$C - D$:
Operacija je oduzimanje dva negativna broja. Kako je $|C| < |D|$, to je rezultat pozitivan, pa je $C - D = 0x_n \dots x_1 x_0\ _{ZA}$, gde je $x_n \dots x_1 x_0$ binarna vrednost razlike $|D| - |C|$ sračunata kao razlika neoznačenih brojeva. Pošto je $|D| - |C| = 11001_2 - 01100_2 = 01101_2$, to je $C - D = 001101_{ZA}$.

$2A + D$:
$2A + D = 001011_{ZA}$

$A - B + C - D$:
$A - B + C - D = 001000_{ZA} + 001101_{ZA} = 010101_{ZA}$

Zadatak 3

a) Izvršiti sabiranja brojeva u komplementu osnove u sistemu sa osnovom u kome su dati. Na raspolaganju su 4 cifre. Odrediti da li prilikom operacije dolazi do prekoračenja (*overflow*).
$010_2 + 0011_2$, $11_2 + 110_2$, $0110_2 + 1011_2$, $1100_2 + 0101_2$, $0101_2 + 0110_2$, $1101_2 + 1011_2$, $1.0_2 + 10.1_2$, $435_{10} + 834_{10}$, $A32F_{16} + 476_{16}$, $324_7 + 365_7$
b) Izvršiti oduzimanja brojeva u komplementu osnove u sistemu sa osnovom u kome su dati. Na raspolaganju su 4 cifre. Odrediti da li prilikom operacije dolazi do prekoračenja (*overflow*).
$010_2 - 1101_2$, $11_2 - 010_2$, $0110_2 - 0101_2$, $1100_2 - 1011_2$, $01.01_2 - 10.10_2$, $1101_2 - 0101_2$, $10_2 - 011_2$, $435_{10} - 166_{10}$, $A32F_{16} - 524_{16}$, $8135_{16} - FA3B_{16}$, $364_7 - 302_7$

Ponoviti zadatak ukoliko je na raspolaganju 5 cifara.

REŠENJE:

a) Sabiranje brojeva u komplementu osnove vršimo na identičan način kao i sabiranje neoznačenih brojeva. Treba voditi računa da se radi ekstenzija znaka prilikom povećavanja broja bita nekog od sabiraka do ukupnog broja bita predviđenog za predstavu brojeva. Zadržava se onoliko poslednjih bita rezultata koliko imamo cifara na raspolaganju, a sve cifre rezultata koje su višak se odbacuju.

Prekoračenje se može detektovati kada su sabirci istog znaka a zbir suprotnog. Ekvivalentno se može detektovati prekoračenje posmatrajući ulazni i izlazni prenos na poziciji bita znaka. Ukoliko su ova dva prenosa različita, došlo je do prekoračenja.

$$OF = 1 \text{ ako je } c_{n+1} \neq c_n \text{ (za osnovu 2)}$$

$$\begin{array}{r}
\overbrace{c_{n+1}c_n}\, c_{n-1}\ldots c_1c_0 \\
x_nx_{n-1}\ldots x_1x_0 \\
+ \quad y_ny_{n-1}\ldots y_1y_0 \\
\hline
\cancel{s_{n+1}}s_ns_{n-1}\ldots s_1s_0
\end{array}$$

odbacuje se

$OF = 1$ ako je $x_n = y_n \neq s_n$ (za osnovu 2)
odnosno ako x_n i y_n predstavljaju isti znak koji je različit od znaka koji predstavlja s_n (za bilo koju osnovu)

$010_2 + 0011_2$:

$$\begin{array}{rrl}
 & \texttt{00100} & \text{(ulazni prenos 0)} \\
 & \texttt{0010}_2 & \text{(ekstenzija znaka)} \\
+ & \texttt{0011}_2 & \\
\hline
 & \cancel{\texttt{0}}\texttt{0101}_2 & \texttt{OF=0}
\end{array}$$

$11_2 + 110_2$:

$$\begin{array}{rrl}
 & \texttt{11100} & \text{(ulazni prenos 0)} \\
 & \texttt{1111}_2 & \text{(ekstenzija znaka)} \\
+ & \texttt{1110}_2 & \text{(ekstenzija znaka)} \\
\hline
 & \cancel{\texttt{1}}\texttt{1101}_2 & \texttt{OF=0}
\end{array}$$

$0110_2 + 1011_2$:

$$\begin{array}{rrl}
 & \texttt{11100} & \text{(ulazni prenos 0)} \\
 & \texttt{0110}_2 & \\
+ & \texttt{1011}_2 & \\
\hline
 & \cancel{\texttt{1}}\texttt{0001}_2 & \texttt{OF=0}
\end{array}$$

$1100_2 + 0101_2$:

$$\begin{array}{rrl}
 & \texttt{11000} & \text{(ulazni prenos 0)} \\
 & \texttt{1100}_2 & \\
+ & \texttt{0101}_2 & \\
\hline
 & \cancel{\texttt{1}}\texttt{0001}_2 & \texttt{OF=0}
\end{array}$$

$0101_2 + 0110_2$:

$$\begin{array}{rrl}
 & \texttt{01000} & \text{(ulazni prenos 0)} \\
 & \texttt{0101}_2 & \\
+ & \texttt{0110}_2 & \\
\hline
 & \cancel{\texttt{0}}\texttt{1011}_2 & \texttt{OF=1}
\end{array}$$

$1101_2 + 1011_2$:

$$\begin{array}{rrl}
 & \texttt{11110} & \text{(ulazni prenos 0)} \\
 & \texttt{1101}_2 & \\
+ & \texttt{1011}_2 & \\
\hline
 & \cancel{\texttt{1}}\texttt{1000}_2 & \texttt{OF=0}
\end{array}$$

$1.0_2 + 10.1_2$:

$$\begin{array}{rrl}
 & \texttt{1100 0} & \text{(ulazni prenos 0)} \\
 & \texttt{111.0}_2 & \text{(ekstenzija znaka)} \\
+ & \texttt{110.1}_2 & \text{(ekstenzija znaka)} \\
\hline
 & \cancel{\texttt{1}}\texttt{101.1}_2 & \texttt{OF=0}
\end{array}$$

$435_{10} + 834_{10}$:

$$\begin{array}{rl} \texttt{11000} & \text{(ulazni prenos 0)} \\ \texttt{0435}_{10} & \text{(ekstenzija znaka)} \\ + \quad \texttt{9834}_{10} & \text{(ekstenzija znaka)} \\ \hline \cancel{1}\texttt{0269}_{10} & \texttt{OF=0} \end{array}$$

$A32F_{16} + 476_{16}$:

$$\begin{array}{rl} \texttt{00010} & \text{(ulazni prenos 0)} \\ \texttt{A32F}_{16} & \\ + \quad \texttt{0476}_{16} & \text{(ekstenzija znaka)} \\ \hline \cancel{0}\texttt{A7A5}_{16} & \texttt{OF=0} \end{array}$$

$324_7 + 365_7$:

$$\begin{array}{rl} \texttt{11110} & \text{(ulazni prenos 0)} \\ \texttt{0324}_{7} & \text{(ekstenzija znaka)} \\ + \quad \texttt{6365}_{7} & \text{(ekstenzija znaka)} \\ \hline \cancel{1}\texttt{0022}_{7} & \texttt{OF=0} \end{array}$$

b) Oduzimanje označenih brojeva u komplementu osnove se najčešće vrši svođenjem na sabiranje označenih brojeva u komplementu osnove, tako što se umanjilac predstavi u komplementu osnove (pomnoži sa -1) i sabere sa umanjenikom. Moguće je oduzimanje i direktno u komplementu osnove poštujući pravila za oduzimanje neoznačenih brojeva, uz razliku obavezne ekstenzije znaka i odbacivanja cifri rezultata koje izlaze iz opsega broja cifara sa kojim radimo.

$010_2 - 1101_2$:

$$\begin{array}{rl} \texttt{00100} & \text{(ulazni prenos 0)} \\ \texttt{0010}_{2} & \text{(ekstenzija znaka)} \\ + \quad \texttt{0011}_{2} & \text{(komplement umanjioca)} \\ \hline \cancel{0}\texttt{0101}_{2} & \texttt{OF=0} \end{array}$$

$11_2 - 010_2$:

$$\begin{array}{rl} \texttt{11100} & \text{(ulazni prenos 0)} \\ \texttt{1111}_{2} & \text{(ekstenzija znaka)} \\ + \quad \texttt{1110}_{2} & \text{(komplement umanjioca i ekstenzija znaka)} \\ \hline \cancel{1}\texttt{1101}_{2} & \texttt{OF=0} \end{array}$$

$0110_2 - 0101_2$:

$$\begin{array}{rl} \texttt{11100} & \text{(ulazni prenos 0)} \\ \texttt{0110}_{2} & \\ + \quad \texttt{1011}_{2} & \text{(komplement umanjioca)} \\ \hline \cancel{1}\texttt{0001}_{2} & \texttt{OF=0} \end{array}$$

$1100_2 - 1011_2$:

$$\begin{array}{rl} \texttt{11000} & \text{(ulazni prenos 0)} \\ \texttt{1100}_{2} & \\ + \quad \texttt{0101}_{2} & \text{(komplement umanjioca)} \\ \hline \cancel{1}\texttt{0001}_{2} & \texttt{OF=0} \end{array}$$

$01.01_2 - 10.10_2$:

$$\begin{array}{rl} \texttt{010 00} & \text{(ulazni prenos 0)} \\ \texttt{01.01}_{2} & \\ + \quad \texttt{01.10}_{2} & \text{(komplement umanjioca)} \\ \hline \cancel{0}\texttt{10.11}_{2} & \texttt{OF=1} \end{array}$$

$1101_2 - 0101_2$:

$$
\begin{array}{rl}
\texttt{11110} & \text{(ulazni prenos 0)}\\
\texttt{1101}_2 & \\
+\quad \texttt{1011}_2 & \text{(komplement umanjioca)}\\
\hline
\cancel{1}\texttt{1000}_2 & \quad \texttt{OF=0}
\end{array}
$$

$10_2 - 011_2$:

$$
\begin{array}{rl}
\texttt{11000} & \text{(ulazni prenos 0)}\\
\texttt{1110}_2 & \text{(ekstenzija znaka)}\\
+\quad \texttt{1101}_2 & \text{(komplement umanjioca i ekstenzija znaka)}\\
\hline
\cancel{1}\texttt{1011}_2 & \quad \texttt{OF=0}
\end{array}
$$

$435_{10} - 166_{10}$:

$$
\begin{array}{rl}
\texttt{11000} & \text{(ulazni prenos 0)}\\
\texttt{0435}_{10} & \text{(ekstenzija znaka)}\\
+\quad \texttt{9834}_{10} & \text{(komplement umanjioca i ekstenzija znaka)}\\
\hline
\cancel{1}\texttt{0269}_{10} & \quad \texttt{OF=0}
\end{array}
$$

$A32F_{16} - 524_{16}$:

$$
\begin{array}{rl}
\texttt{10110} & \text{(ulazni prenos 0)}\\
\texttt{A32F}_{16} & \\
+\quad \texttt{FADC}_{16} & \text{(komplement umanjioca i ekstenzija znaka)}\\
\hline
\cancel{1}\texttt{9E0B}_{16} & \quad \texttt{OF=0}
\end{array}
$$

$8135_{16} - FA3B_{16}$:

$$
\begin{array}{rl}
\texttt{00000} & \text{(ulazni prenos 0)}\\
\texttt{8135}_{16} & \\
+\quad \texttt{05C5}_{16} & \text{(komplement umanjioca)}\\
\hline
\cancel{0}\texttt{86FA}_{16} & \quad \texttt{OF=0}
\end{array}
$$

$364_7 - 302_7$:

$$
\begin{array}{rl}
\texttt{11110} & \text{(ulazni prenos 0)}\\
\texttt{6364}_7 & \text{(ekstenzija znaka)}\\
+\quad \texttt{6365}_7 & \text{(komplement umanjioca i ekstenzija znaka)}\\
\hline
\cancel{1}\texttt{6062}_7 & \quad \texttt{OF=0}
\end{array}
$$

Zadatak 4

a) Izvršiti sabiranja brojeva u komplementu maksimalne vrednosti u sistemu sa osnovom u kome su dati. Na raspolaganju su 4 cifre. Odrediti da li prilikom operacije dolazi do prekoračenja (*overflow*).
$010_2 + 0011_2$, $11_2 + 110_2$, $0110_2 + 1011_2$, $1100_2 + 0101_2$, $0101_2 + 0110_2$, $1101_2 + 1011_2$, $1.0_2 + 1.01_2$, $435_{10} + 834_{10}$, $A32F_{16} + 476_{16}$, $324_7 + 365_7$

b) Izvršiti oduzimanja brojeva u komplementu maksimalne vrednosti u sistemu sa osnovom u kome su dati. Na raspolaganju su 4 cifre. Odrediti da li prilikom operacije dolazi do prekoračenja (*overflow*).
$010_2 - 1101_2$, $11_2 - 010_2$, $0110_2 - 0101_2$, $1100_2 - 1011_2$, $01.01_2 - 10.10_2$, $1101_2 - 0101_2$, $10_2 - 011_2$, $435_{10} - 166_{10}$, $A32F_{16} - 524_{16}$, $364_7 - 302_7$

Ponoviti zadatak ukoliko je na raspolaganju 5 cifara.

REŠENJE:

a) Sabiranje brojeva u komplementu maksimalne vrednosti se vrši na sličan način kao i sabiranje brojeva u komplementu osnove. Razlika se ogleda u tome što se cifra izlaznog prenosa dodaje na dobijeni zbir da bi se dobio konačan rezultat. Prekoračenje se konstatuje na isti način kao i kod sabiranja u komplementu osnove, pri čemu se posmatraju sabirci i konačan zbir.

$$\begin{array}{ll} & c_{n+1}c_nc_{n-1}\dots c_1c_0 \\ & \quad x_nx_{n-1}\dots x_1x_0 \\ + & \quad y_ny_{n-1}\dots y_1y_0 \\ \hline & t_{n+1}t_nt_{n-1}\dots t_1t_0 \\ + \hookrightarrow & \qquad\qquad t_{n+1} \\ \hline & \quad s_ns_{n-1}\dots s_1s_0 \\ & \quad \nwarrow \end{array}$$

$OF = 1$ ako je $x_n = y_n \neq s_n$ (za osnovu 2) odnosno ako x_n i y_n predstavljaju isti znak koji je različit od znaka koji predstavlja s_n (za bilo koju osnovu)

$010_2 + 0011_2$:

$$\begin{array}{lrl} & \texttt{00100} & \text{(ulazni prenos 0)} \\ & \texttt{0010}_2 & \text{(ekstenzija znaka)} \\ + & \texttt{0011}_2 & \\ \hline & \texttt{00101}_2 & \\ + & \hookrightarrow \ \texttt{0}_2 & \\ \hline & \texttt{0101}_2 & \quad \texttt{OF=0} \end{array}$$

$11_2 + 110_2$:

$$\begin{array}{lrl} & \texttt{11100} & \text{(ulazni prenos 0)} \\ & \texttt{1111}_2 & \text{(ekstenzija znaka)} \\ + & \texttt{1110}_2 & \text{(ekstenzija znaka)} \\ \hline & \texttt{11101}_2 & \\ + & \hookrightarrow \ \texttt{1}_2 & \\ \hline & \texttt{1110}_2 & \quad \texttt{OF=0} \end{array}$$

$0110_2 + 1011_2$:

$$\begin{array}{lrl} & \texttt{11100} & \text{(ulazni prenos 0)} \\ & \texttt{0110}_2 & \\ + & \texttt{1011}_2 & \\ \hline & \texttt{10001}_2 & \\ + & \hookrightarrow \ \texttt{1}_2 & \\ \hline & \texttt{0010}_2 & \quad \texttt{OF=0} \end{array}$$

$1100_2 + 0101_2$:

$$\begin{array}{lrl} & \texttt{11000} & \text{(ulazni prenos 0)} \\ & \texttt{1100}_2 & \\ + & \texttt{0101}_2 & \\ \hline & \texttt{10001}_2 & \\ + & \hookrightarrow \ \texttt{1}_2 & \\ \hline & \texttt{0010}_2 & \quad \texttt{OF=0} \end{array}$$

$0101_2 + 0110_2$:

$$\begin{array}{lrl}
 & \texttt{01000} & \text{(ulazni prenos 0)}\\
 & \texttt{0101}_2 & \\
\texttt{+} & \texttt{0110}_2 & \\ \hline
 & \texttt{01011}_2 & \\
\texttt{+} & \hookrightarrow\ \texttt{0}_2 & \\ \hline
 & \texttt{1011}_2 & \texttt{OF=1}
\end{array}$$

$1101_2 + 1011_2$:

$$\begin{array}{lrl}
 & \texttt{11110} & \text{(ulazni prenos 0)}\\
 & \texttt{1101}_2 & \\
\texttt{+} & \texttt{1011}_2 & \\ \hline
 & \texttt{11000}_2 & \\
\texttt{+} & \hookrightarrow\ \texttt{1}_2 & \\ \hline
 & \texttt{1001}_2 & \texttt{OF=0}
\end{array}$$

$1.01_2 + 1.0_2$:

$$\begin{array}{lrl}
 & \texttt{110 00} & \text{(ulazni prenos 0)}\\
 & \texttt{11.01}_2 & \text{(ekstenzija znaka)}\\
\texttt{+} & \texttt{11.0}_2 & \text{(ekstenzija znaka)}\\ \hline
 & \texttt{110.01}_2 & \\
\texttt{+} & \hookrightarrow\ \ \texttt{1}_2 & \\ \hline
 & \texttt{10.10}_2 & \texttt{OF=0}
\end{array}$$

$435_{10} + 834_{10}$:

$$\begin{array}{lrl}
 & \texttt{11000} & \text{(ulazni prenos 0)}\\
 & \texttt{0435}_{10} & \text{(ekstenzija znaka)}\\
\texttt{+} & \texttt{9834}_{10} & \text{(ekstenzija znaka)}\\ \hline
 & \texttt{10269}_{10} & \\
\texttt{+} & \hookrightarrow\ \texttt{1}_{10} & \\ \hline
 & \texttt{0270}_{10} & \texttt{OF=0}
\end{array}$$

$A32F_{16} + 476_{16}$:

$$\begin{array}{lrl}
 & \texttt{00010} & \text{(ulazni prenos 0)}\\
 & \texttt{A32F}_{16} & \\
\texttt{+} & \texttt{0476}_{16} & \text{(ekstenzija znaka)}\\ \hline
 & \texttt{0A7A5}_{16} & \\
\texttt{+} & \hookrightarrow\ \texttt{0}_{16} & \\ \hline
 & \texttt{A7A5}_{16} & \texttt{OF=0}
\end{array}$$

$324_7 + 365_7$:

$$\begin{array}{lrl}
 & \texttt{11110} & \text{(ulazni prenos 0)}\\
 & \texttt{0324}_7 & \text{(ekstenzija znaka)}\\
\texttt{+} & \texttt{6365}_7 & \text{(ekstenzija znaka)}\\ \hline
 & \texttt{10022}_7 & \\
\texttt{+} & \hookrightarrow\ \texttt{1}_7 & \\ \hline
 & \texttt{0023}_7 & \texttt{OF=0}
\end{array}$$

b) Oduzimanje označenih brojeva u komplementu maksimalne vrednosti se najčešće vrši svođenjem na sabiranje brojeva u komplementu maksimalne vrednosti, tako što se umanjilac komplementira do maksimalne vrednosti i sabere sa umanjenikom. Moguće je vršiti i oduzimanje brojeva u komplementu maksimalne vrednosti i direktno, bez svođenja na sabiranje, po pravilima za oduzimanje neoznačenih brojeva, sa razlikom da treba izvršiti ekstenziju znaka za umanjenik i umanjilac i dodatno oduzeti svaku izlaznu pozajmicu od međurezultata oduzimanja da bi se dobila konačna razlika brojeva.

$010_2 - 1101_2$:

$$\begin{array}{rl}
\texttt{00100} & \text{(ulazni prenos 0)}\\
\texttt{0010}_2 & \text{(ekstenzija znaka)}\\
+\quad \texttt{0010}_2 & \text{(komplementiranje do maksimalne vrednosti)}\\
\cline{1-1}
\texttt{00100}_2 & \\
+\quad \hookrightarrow\quad \texttt{0}_2 & \\
\cline{1-1}
\texttt{0100}_2 & \quad \texttt{OF=0}
\end{array}$$

$11_2 - 010_2$:

$$\begin{array}{rl}
\texttt{11110} & \text{(ulazni prenos 0)}\\
\texttt{1111}_2 & \text{(ekstenzija znaka)}\\
+\quad \texttt{1101}_2 & \text{(komplementiranje i ekstenzija znaka)}\\
\cline{1-1}
\texttt{11100}_2 & \\
+\quad \hookrightarrow\quad \texttt{1}_2 & \\
\cline{1-1}
\texttt{1101}_2 & \quad \texttt{OF=0}
\end{array}$$

$0110_2 - 0101_2$:

$$\begin{array}{rl}
\texttt{11100} & \text{(ulazni prenos 0)}\\
\texttt{0110}_2 & \\
+\quad \texttt{1010}_2 & \text{(komplementiranje i ekstenzija znaka)}\\
\cline{1-1}
\texttt{10000}_2 & \\
+\quad \hookrightarrow\quad \texttt{1}_2 & \\
\cline{1-1}
\texttt{0001}_2 & \quad \texttt{OF=0}
\end{array}$$

$1100_2 - 1011_2$:

$$\begin{array}{rl}
\texttt{11000} & \text{(ulazni prenos 0)}\\
\texttt{1100}_2 & \\
+\quad \texttt{0100}_2 & \text{(komplementiranje do maksimalne vrednosti)}\\
\cline{1-1}
\texttt{10000}_2 & \\
+\quad \hookrightarrow\quad \texttt{1}_2 & \\
\cline{1-1}
\texttt{0001}_2 & \quad \texttt{OF=0}
\end{array}$$

$01.01_2 - 10.10_2$:

$$\begin{array}{rl}
\texttt{010 10} & \text{(ulazni prenos 0)}\\
\texttt{01.01}_2 & \\
+\quad \texttt{01.01}_2 & \text{(komplementiranje do maksimalne vrednosti)}\\
\cline{1-1}
\texttt{010.10}_2 & \\
+\quad \hookrightarrow\quad \texttt{0}_2 & \\
\cline{1-1}
\texttt{10.10}_2 & \quad \texttt{OF=1}
\end{array}$$

$1101_2 - 0101_2$:

$$\begin{array}{rl}
\texttt{10000} & \text{(ulazni prenos 0)}\\
\texttt{1101}_2 & \\
+\quad \texttt{1010}_2 & \text{(komplementiranje do maksimalne vrednosti)}\\
\cline{1-1}
\texttt{10111}_2 & \\
+\quad \hookrightarrow\quad \texttt{1}_2 & \\
\cline{1-1}
\texttt{1000}_2 & \quad \texttt{OF=0}
\end{array}$$

$10_2 - 011_2$:

$$\begin{array}{rl}
\texttt{11000} & \text{(ulazni prenos 0)} \\
\texttt{1110}_2 & \text{(ekstenzija znaka)} \\
\texttt{+}\quad \texttt{1100}_2 & \text{(komplementiranje i ekstenzija znaka)} \\
\hline
\texttt{11010}_2 & \\
\texttt{+}\quad \hookrightarrow \quad \texttt{1}_2 & \\
\hline
\texttt{1011}_2 & \quad \texttt{OF=0}
\end{array}$$

$435_{10} - 166_{10}$:

$$\begin{array}{rl}
\texttt{11000} & \text{(ulazni prenos 0)} \\
\texttt{0435}_{10} & \text{(ekstenzija znaka)} \\
\texttt{+}\quad \texttt{9833}_{10} & \text{(komplementiranje i ekstenzija znaka)} \\
\hline
\texttt{10268}_{10} & \\
\texttt{+}\quad \hookrightarrow \quad \texttt{1}_{10} & \\
\hline
\texttt{0269}_{10} & \quad \texttt{OF=0}
\end{array}$$

$A32F_{16} - 524_{16}$:

$$\begin{array}{rl}
\texttt{10110} & \text{(ulazni prenos 0)} \\
\texttt{A32F}_{16} & \\
\texttt{+}\quad \texttt{FADB}_{16} & \text{(komplementiranje i ekstenzija znaka)} \\
\hline
\texttt{19E0A}_{16} & \\
\texttt{+}\quad \hookrightarrow \quad \texttt{1}_{16} & \\
\hline
\texttt{9E0B}_{16} & \quad \texttt{OF=0}
\end{array}$$

$364_7 - 302_7$:

$$\begin{array}{rl}
\texttt{11110} & \text{(ulazni prenos 0)} \\
\texttt{6364}_7 & \text{(ekstenzija znaka)} \\
\texttt{+}\quad \texttt{6364}_7 & \text{(komplementiranje i ekstenzija znaka)} \\
\hline
\texttt{16061}_7 & \\
\texttt{+}\quad \hookrightarrow \quad \texttt{1}_7 & \\
\hline
\texttt{6062}_7 & \quad \texttt{OF=0}
\end{array}$$

Zadatak 5

a) Izvršiti množenje neoznačenih binarnih brojeva: 10110×01010, 110.01×10.111, 0110.1×1.0110

b) Izvršiti množenje petobitnih binarnih brojeva datih u komplementu do dva: 10110×01010, 110.01×10.111, 0110.1×1.0110

REŠENJE:

a) Množenje neoznačenih brojeva vrši se istim algoritmom kao i množenje decimalnih brojeva.

10110×01010:

```
      10110 × 01010 = 011011100
     00000
    10110
   00000
  10110
+ 00000
 011011100
```

110.01 × 10.111:

```
          110.01 × 10.111 = 10001.11111
         11001
        11001
       11001
      00000
  +  11001
  ----------
    1000111111
```

0110.1 × 1.0110:

```
          0110.1 × 1.0110 = 1000.11110
         00000
        01101
       01101
      00000
  +  01101
  ----------
     100011110
```

Ukoliko činioci imaju decimalnu tačku, vršimo množenje brojeva dobijenih uklanjanjem decimalne tačke, a na dobijeni prozivod dodajemo decimalnu tačku na odgovarajuće mesto.

Drugi način množenja, pogodniji za implementaciju u digitalnoj logici, sastoji se u postupnom određivanju međurezultata sabiranja, umesto sabiranja više brojeva odjednom u poslednjem koraku.

10110 × 01010:

```
         10110 × 01010
         00000 (početni zbir je 0)
  +      00000 (10110 × 0)
         00000
  +     10110  (10110 × 1)
        101100
  +    00000   (10110 × 0)
       0101100
  +   10110    (10110 × 1)
      11011100
  +  00000     (10110 × 0)
     011011100
```

110.01 × 10.111:

```
         11001 × 10111
         00000 (početni zbir je 0)
  +      11001 (11001 × 1)
         11001
  +     11001  (11001 × 1)
       1001011
  +    11001   (11001 × 1)
      10101111
  +   00000    (11001 × 0)
      10101111
  +  11001     (11001 × 1)
    1000111111
```

0110.1 × 1.0110:

```
        0110.1 × 1.0110
        00000 (početni zbir je 0)
+       00000 (01101 × 0)
        00000
+      01101  (01101 × 1)
       011010
+     01101   (01101 × 1)
      1001110
+    00000    (01101 × 0)
     01001110
+   01101     (01101 × 1)
    100011110
```

b) Množenje označenih brojeva u komplementu osnove se izvodi sličnim algoritmom kao i množenje neoznačenih brojeva, s tim što se sabiranja međurezultata vrše po pravilima sabiranja u komplementu osnove. Treba voditi računa o ekstenziji znaka brojeva na sva mesta koja učestvuju u sabiranju, kao i odbacivanju eventualnog viška cifara u poslednjem sabiranju. Ne treba odbacivati eventualni višak cifara u međurezultatima, jer su ta sabiranja samo fragment ukupnog sabiranja na većem broju mesta, pa eventualni višak cifara predstavlja regularan prenos. Samo višak cifara kod poslednjeg sabiranja istovremeno znači i višak cifara u ukupnom rezultatu i treba ga odbaciti.

Takođe, voditi računa da množenje bitom najveće težine znači množenje sa -1 ukoliko je taj bit 1 (jer je broj negativan, težina tog bita je -2^n). U tom smislu treba komplementirati (u drugom komplementu) poslednji sabirak.

10110 × 01010:

```
         10110 × 01010 = 110011100
        00000
    11110110 (ekstenzija znaka)
      00000
    110110   (ekstenzija znaka)
+   00000
  1̸110011100
```

110.01 × 10.111:

```
         110.01 × 10.111 = 0001.11111
    111111001 (ekstenzija znaka)
    11111001  (ekstenzija znaka)
    1111001   (ekstenzija znaka)
    000000    (ekstenzija znaka)
+   00111     (drugi komplement broja 11001)
  1̸000111111
```

0110.1 × 1.0110:

```
         0110.1 × 1.0110 = 1011.11110
    000000000 (ekstenzija znaka)
    00001101  (ekstenzija znaka)
    0001101   (ekstenzija znaka)
    000000    (ekstenzija znaka)
+   10011     (drugi komplement broja 01101)
    101111110
```

Drugi način odgovara postupnom izračunavanju ukupnog zbira računatog na prvi način. Nakon svakog koraka osim poslednjeg potrebno je proširiti broj bita za jedno mesto ekstenzijom znaka za jedno mesto kako ne bi došlo do prekoračenja. U poslednjem koraku treba zanemariti sve cifre viška.

10110×01010:

$$\begin{array}{rl}
\underline{\mathtt{10110} \times \mathtt{01010}} = \mathtt{110011100} & \\
\mathtt{00000} & \text{(početni zbir je 0)}\\
+\ \underline{\mathtt{000000}} & \text{(10110 $\times$ 0 i ekstenzija znaka za 1 mesto)}\\
\mathtt{0000000} & \text{(ekstenzija znaka!)}\\
+\ \underline{\mathtt{110110}} & \text{(10110 $\times$ 1 i ekstenzija znaka za 1 mesto)}\\
\mathtt{11101100} & \text{(ekstenzija znaka!)}\\
+\ \underline{\mathtt{000000}} & \text{(10110 $\times$ 0 i ekstenzija znaka za 1 mesto)}\\
\mathtt{111101100} & \text{(ekstenzija znaka!)}\\
+\ \underline{\mathtt{110110}} & \text{(10110 $\times$ 1 i ekstenzija znaka za 1 mesto)}\\
\mathtt{101011100} & \\
+\ \underline{\mathtt{00000}} & \text{(10110 $\times$ 0)}\\
\cancel{\mathtt{1}}\mathtt{110011100} &
\end{array}$$

110.01×10.111:

$$\begin{array}{rl}
\underline{\mathtt{110.01} \times \mathtt{10.111}} = \mathtt{0001.11111} & \\
\mathtt{00000} & \text{(početni zbir je 0)}\\
+\ \underline{\mathtt{111001}} & \text{(11001 $\times$ 1 i ekstenzija znaka za 1 mesto)}\\
\mathtt{1111001} & \text{(ekstenzija znaka!)}\\
+\ \underline{\mathtt{111001}} & \text{(11001 $\times$ 1 i ekstenzija znaka za 1 mesto)}\\
\mathtt{11101011} & \text{(ekstenzija znaka!)}\\
+\ \underline{\mathtt{111001}} & \text{(11001 $\times$ 1 i ekstenzija znaka za 1 mesto)}\\
\mathtt{111001111} & \text{(ekstenzija znaka!)}\\
+\ \underline{\mathtt{000000}} & \text{(11001 $\times$ 0 i ekstenzija znaka za 1 mesto)}\\
\mathtt{111001111} & \\
+\ \underline{\mathtt{00111}} & \text{(drugi komplement od 11001 $\times$ 1, tj. 11001 $\times -1$)}\\
\cancel{\mathtt{1}}\mathtt{000111111} &
\end{array}$$

0110.1×1.0110:

$$\begin{array}{rl}
\underline{\mathtt{0110.1} \times \mathtt{1.0110}} = \mathtt{1011.11110} & \\
\mathtt{00000} & \text{(početni zbir je 0)}\\
+\ \underline{\mathtt{000000}} & \text{(01101 $\times$ 0 i ekstenzija znaka za 1 mesto)}\\
\mathtt{0000000} & \text{(ekstenzija znaka!)}\\
+\ \underline{\mathtt{001101}} & \text{(01101 $\times$ 1 i ekstenzija znaka za 1 mesto)}\\
\mathtt{00011010} & \text{(ekstenzija znaka!)}\\
+\ \underline{\mathtt{001101}} & \text{(01101 $\times$ 1 i ekstenzija znaka za 1 mesto)}\\
\mathtt{001001110} & \text{(ekstenzija znaka!)}\\
+\ \underline{\mathtt{000000}} & \text{(01101 $\times$ 0 i ekstenzija znaka za 1 mesto)}\\
\mathtt{001001110} & \\
+\ \underline{\mathtt{10011}} & \text{(drugi komplement od 01101 $\times$ 1, tj. 01101 $\times -1$)}\\
\mathtt{101111110} &
\end{array}$$

Zadatak 6

Izvršiti deljenje neoznačenih binarnih brojeva:
11010111/1011, 1001101001/101, 10001011/1101.

REŠENJE:
Deljenje neoznačenih binarnih brojeva se izvršava istim algoritmom kao i deljenje decimalnih brojeva.

11010111/1011:

```
   11010111 :  1011 = 10011
-  1011      (cifra rezultata, 1)
   0010
   00100     (dopisana cifra 0)
-   0000     (cifra rezultata, 0)
    0100
    01001    (dopisana cifra 1)
-    0000    (cifra rezultata, 0)
     1001
     10011   (dopisana cifra 1)
-     1011   (cifra rezultata, 1)
      1000
      10001  (dopisana cifra 1)
-      1011  (cifra rezultata, 1)
        110  (ostatak)
```

1001101001/101:

```
   1001101001 :  101 = 011110111
-  000           (cifra rezultata, 0)
   100
   1001          (dopisana cifra 1)
-   101          (cifra rezultata, 1)
    100
    1001         (dopisana cifra 1)
-    101         (cifra rezultata, 1)
     100
     1000        (dopisana cifra 0)
-     101        (cifra rezultata, 1)
      011
      0111       (dopisana cifra 1)
-      101       (cifra rezultata, 1)
       010
       0100      (dopisana cifra 0)
-       000      (cifra rezultata, 0)
        100
        1000     (dopisana cifra 0)
-        101     (cifra rezultata, 1)
         011
         0111    (dopisana cifra 1)
-         101    (cifra rezultata, 1)
          010    (ostatak)
```

10001011/1101:

```
   10001011 :  1101 = 01010
-  0000       (cifra rezultata, 0)
   1000
   10001      (dopisana cifra 1)
-   1101      (cifra rezultata, 1)
    0100
    01000     (dopisana cifra 0)
-    0000     (cifra rezultata, 0)
     1000
     10001    (dopisana cifra 1)
-     1101    (cifra rezultata, 1)
      0100
      01001   (dopisana cifra 1)
-      0000   (cifra rezultata, 0)
       1001   (ostatak)
```