
11. PROMENA UČESTANOSTI ODABIRANJA

U sistemima za digitalnu obradu signala, naročito u telekomunikacijama, često se ukazuje potreba da se promeni učestanost odabiranja. Sistem u kome se koristi više učestanosti odabiranja naziva se *višebrzinski* (engl. *multirate*) *sistem za digitalnu obradu signala*.

Principski najjednostavniji način za promenu brzine odabiranja sastoji se od D/A konverzije, kojom se diskretni signal pretvara u analogni signal, koji se potom pomoću A/D konvertora digitalizuje sa željenom periodom odabiranja. Prednost ovog metoda je što je nova učestanost odabiranja potpuno nezavisna od stare učestanosti odabiranja. Međutim, ovaj metod ima i neke nedostatak. Kao što je poznato, D/A konverzija i analogni interpolacioni filter unose izobličenje signala prilikom rekonstrukcije, dok A/D konverzija unosi grešku kvantovanja. Zbog toga se ovaj metod u praksi vrlo retko koristi.

Kod drugog, pogodnijeg metoda za promenu učestanosti odabiranja, sve operacije obavljaju se sa diskretnim signalima. Jedini nedostatak ovog metoda je što odnos stare i nove učestanosti odabiranja mora biti racionalan broj. Kako u praktičnim primenama ovo ograničenje ne predstavlja nikakav problem, ovaj metod se u praksi najčešće koristi. Dakle, ako se signal $x[n]$, čija je učestanost odabiranja $F_x = 1/T_x$, konvertuje u signal $y[m]$, čija je učestanost odabiranja $F_y = 1/T_y$, onda mora da važi ograničenje:

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{T_x}{T_y} = \frac{U}{D} \quad (11.1)$$

gde su U i D prirodni brojevi.

Postoje dva važna specijalna slučaja relacije (11.1). Ako je $U=1$ vrši se redukcija učestanosti odabiranja sa celobrojnim faktorom D . Proces redukcije učestanosti odabiranja naziva se *kompresija* ili *decimacija* (engl. down-sampling ili decimation). Ako je $D=1$ vrši se povećanje brzine odabiranja sa celobrojnim faktorom U . Proces povećanja učestanosti odabiranja naziva se *interpolacija* (engl. up-sampling ili interpolation).

U analizi postupaka za promenu učestanosti odabiranja prvo će biti analizirani jednostavniji slučajevi decimacije i interpolacije, a zatim će, kao generalizacija ova dva postupka, biti posmatran proces konverzije učestanosti odabiranja gde je odnos nove i stare učestanosti odabiranja racionalan broj.

11.1 REDUKCIJA UČESTANOSTI ODABIRANJA D PUTA

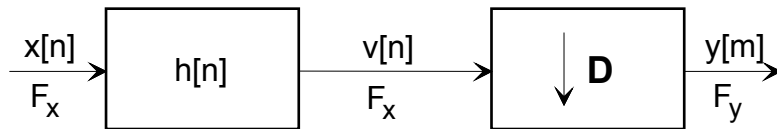
Neka je spektar signala na ulazu u sistem za redukciju učestanosti odabiranja, $x[n]$, takav da je različit od nule u intervalu učestanosti $0 \leq |F| \leq F_x/2$, odnosno $0 \leq \Omega \leq \pi$. Redukcija učestanosti odabiranja može se jednostavno izvršiti uzimanjem svakog D -tog odbirka signala $x[n]$ čime se

formira izlazni signal $y[m]$. Međutim, pošto smanjenjem učestanosti odabiranja prestaje da bude zadovoljena teorema odabiranja, u spektru izlaznog signala pojaviće se preklapanje. Da bi se izbeglo preklapanje u spektru izlaznog signala, spektar ulaznog signala mora biti ograničen na opseg učestanosti $0 \leq |F| \leq F_x/2D$, odnosno $0 \leq |\Omega| \leq \pi/D$. Dakle, pre redukcije učestanosti odabiranja potrebno je ograničiti spektar ulaznog signala NF filtrom.

Blok šema postupka decimacije prikazana je na slici 11.1. Blok označen sa $h[n]$ predstavlja NF filtar, a blok označen sa $\downarrow D$ predstavlja reduktor učestanosti odabiranja ili kompresor. Funkcija prenosa NF filtra, čiji je impulsni odziv $h[n]$, zadovoljava uslov:

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \pi/D \\ 0, & \text{drugde} \end{cases} \quad (11.2)$$

čime se eliminiše deo spektra signala $x[n]$ u opsegu $\pi/D \leq |\Omega| \leq \pi$. Naravno, pretpostavlja se da se na taj način eliminišu samo one komponente spektra signala koje nisu značajne za dalju obradu.



Slika 11.1 Blok šema postupka decimacije sa D .

Izlazni signal iz NF filtra $v[n]$ dat je konvolucionom sumom:

$$v[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (11.3)$$

Izlazni signal iz decimatora se dobija uzimanjem svakog D -tog odbirka iz $v[n]$ čime se dobija:

$$y[m] = v[mD] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[mD-k] \quad (11.4)$$

Interesantno je primetiti da *operacija decimacije nije vremenski invarijantna*. Naime, iz (11.4) se lako uočava da odziv na signal $x[n-n_0]$ nije $y[n-n_0]$, osim u slučajevima kada je n_0 multipl od D .

Za detaljniju analizu procesa decimacije potrebno je ispitati šta se dešava u frekvencijskom domenu. Definišimo pomoćnu sekvencu $v_p[n]$ na sledeći način:

$$v_p[n] = v[n]p[n] = \begin{cases} v[n], & |n| = rD, r = 0,1,2,\dots \\ 0, & \text{drugde} \end{cases} \quad (11.5)$$

gde sekvenca $p[n]$ predstavlja periodični niz impulsa sa periodom D . Sekvenca $p[n]$ može se predstaviti i razvojem u diskretni Furijeov red:

$$p[n] = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} e^{j2\pi kn/D} \quad (11.6)$$

Onda je:

$$y[m] = v_p[mD] = v[mD]p[mD] = v[mD] \quad (11.7)$$

pa je z transformacija izlazne sekvence:

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m]z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_p[m]z^{-m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_p[n]z^{-n/D} \quad (11.8)$$

gde je poslednji korak u izvođenju moguć, jer je $v_p[n] = 0$, izuzev kada je n multipl od D . Koristeći jednačine (11.5) i (11.6), iz (11.8) se dobija:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} v[m] \left[\frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} e^{j2\pi km/D} \right] z^{-m/D} = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} v[m] (e^{-j2\pi k/D} z^{1/D})^{-m} \\ &= \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} V(e^{-j2\pi k/D} z^{1/D}) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} H(e^{-j2\pi k/D} z^{1/D}) X(e^{-j2\pi k/D} z^{1/D}) \end{aligned} \quad (11.9)$$

Izračunavanjem $Y(z)$ na jediničnom krugu, dobija se spektar izlaznog signala $y[m]$. Označimo sa Ω_x digitalnu učestanost na ulazu sistema, gde je učestanost odabiranja F_x , a sa Ω_y digitalnu učestanost na izlazu sistema, gde je učestanost odabiranja F_y . Onda važi:

$$\Omega_x = 2\pi \frac{F}{F_x} = 2\pi FT_x \quad (11.10)$$

$$\Omega_y = 2\pi \frac{F}{F_y} = 2\pi FT_y \quad (11.11)$$

a pošto je:

$$F_y = \frac{F_x}{D} \quad (11.12)$$

konačno se dobija veza između učestanosti Ω_x i Ω_y :

$$\Omega_y = D\Omega_x \quad (11.13)$$

Dakle, opseg učestanosti $0 \leq |\Omega_x| \leq \pi/D$ razvučen je decimacijom na opseg učestanosti $0 \leq |\Omega_y| \leq \pi$, što se i očekivalo na osnovu preliminarne analize.

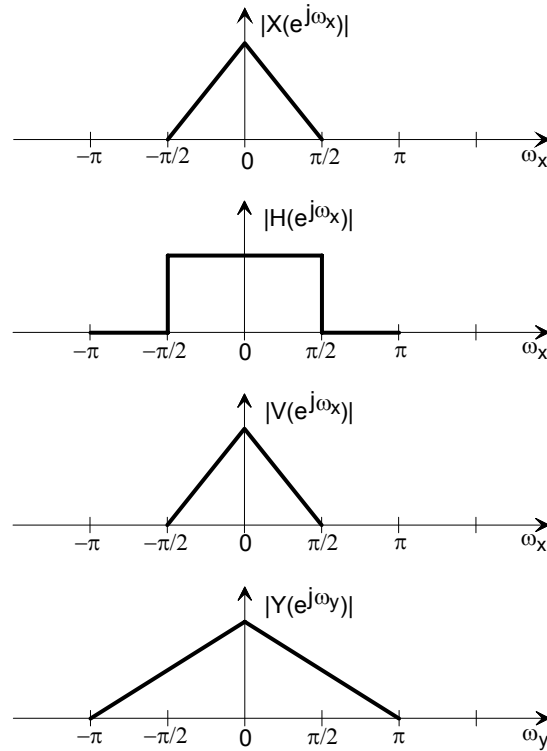
Iz relacije (11.9) se, izračunavanjem na jediničnom krugu, dobija spektar signala $y[m]$ kao:

$$Y(e^{j\Omega_y}) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} H[e^{j(\Omega_y - 2\pi k)/D}] X[e^{j(\Omega_y - 2\pi k)/D}] \quad (11.14)$$

Uočava se da se spektar izlaznog signala dobija sumiranjem D kopija periodičnog spektra ulaznog signala pomerenih za $2\pi/D$ i skaliranih sa D . Ako je ulazni signal pravilno ograničen upotrebom NF filtra sa funkcijom prenosa (11.2), neće biti preklapanja u spektru izlaznog signala, pa u osnovnom opsegu važi:

$$Y(e^{j\Omega_y}) = \frac{1}{D} H(e^{j\Omega_y/D}) X(e^{j\Omega_y/D}) = \frac{1}{D} X(e^{j\Omega_y/D}) \quad (11.15)$$

Spektri signala $x[n]$, $v[n]$ i $y[m]$ prikazani su na slici 11.2 za slučaj $D = 2$. Pošto je spektar signala $x[n]$ ograničen na opseg učestanosti do $\pi/2$, NF filter čija je granična učestanost $\pi/2$ se ne mora primeniti. Kao što se vidi, spektri signala $v[n]$ i $y[m]$ se po obliku ne razlikuju od spektra originalnog signala, što pokazuje i jednačina (11.15). Međutim, ako bi trebalo izvršiti decimaciju signala $x[n]$ sa faktorom $D > 2$, NF filter za ograničenje spektra ulaznog signala bi bio neophodan za sprečavanje preklapanja u spektru izlaznog signala.

Slika 11.2 Spektri signala u postupku decimacije sa $D = 2$.

11.2 POVEĆANJE UČESTANOSTI ODABIRANJA U PUTA

Povećanje učestanosti odabiranja U puta se može izvršiti interpolacijom $U - 1$ novih odbiraka između svaka dva sukcesivna odbirka ulaznog signala. Neka $v[m]$ označava sekvencu čija je učestanost odabiranja $F_y = UF_x$, a koja se dobija iz ulazne sekvence $x[n]$ dodavanjem $U - 1$ nula između sukcesivnih odbiraka $x[n]$. Onda je:

$$v[m] = \begin{cases} x[m/U], & |m| = rU, \quad r = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{drugde} \end{cases} \quad (11.16)$$

Z transformacija sekvence $v[m]$ je:

$$V(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v[m]z^{-m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-nU} = X(z^U) \quad (11.17)$$

tako da se spektar signala $v[m]$ može odrediti izračunavanjem izraza (11.17) na jediničnom krugu. Tako se dobija:

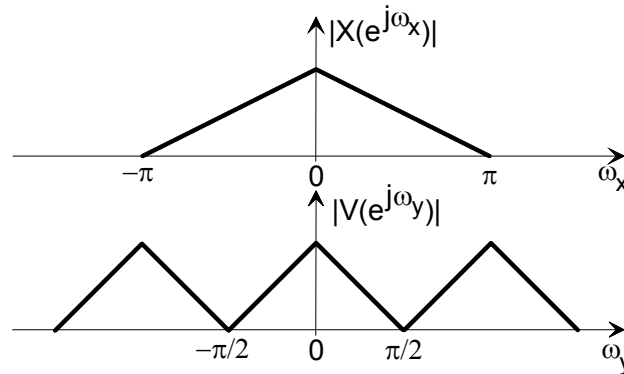
$$V(e^{j\Omega_y}) = X(e^{jU\Omega_y}) \quad (11.18)$$

gde je Ω_y učestanost definisana izrazom (11.11). Pošto je digitalna učestanost Ω_x definisana izrazom (11.10), s obzirom da je $F_y = UF_x$, učestanosti Ω_y i Ω_x su povezane relacijom:

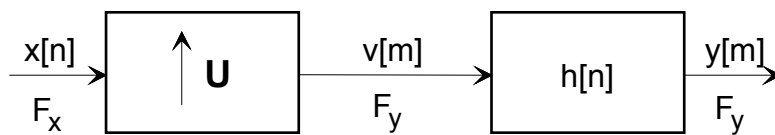
$$\Omega_y = \frac{\Omega_x}{U} \quad (11.19)$$

Spektri signala $x[n]$ i $v[m]$ prikazani su na slici 11.3. Vidi se da se je spektar signala $x[n]$ sabijen na opseg učestanosti $0 \leq |\Omega_y| \leq \pi/U$, tako da sve replike spektra iznad učestanosti π/U

treba eliminisati korišćenjem NF filtra iza *ekspandera učestanosti odabiranja*. Kaskadna veza NF filtra i ekspandera prikazana na slici 11.4 naziva se *interpolator*.



Slika 11.3 Spektri signala u postupku interpolacije sa $U = 2$.



Slika 11.4 Blok šema postupka interpolacije sa U .

Upotrebljeni NF filter bi trebalo da ima idealnu NF funkciju prenosa:

$$H(e^{j\Omega_y}) = \begin{cases} K, & 0 \leq |\Omega_y| \leq \pi/U \\ 0, & \text{drugde} \end{cases} \quad (11.20)$$

gde je K konstanta kojom se normalizuje amplituda izlaznog signala $y[m]$. Konstanta K se određuje tako da bude:

$$y[m] = v[m] = x[m/U], \quad m = rU, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (11.21)$$

odnosno, za slučaj $m = 0$:

$$\begin{aligned} y[0] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\Omega_y}) d\Omega_y = \frac{K}{2\pi} \int_{-\pi/U}^{\pi/U} X(e^{j\Omega_y U}) d\Omega_y \\ &= \frac{K}{U} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega_x}) d\Omega_x = \frac{K}{U} x[0] \end{aligned} \quad (11.22)$$

odakle se dobija vrednost normalizacionog faktora $K = U$.

Sa slike 11.4 se vidi da je izlazna sekvenca, $y[m]$, određena konvolucionom sumom:

$$y[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[m-k]v[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[m-kU]x[k] \quad (11.23)$$

pri čemu je korišćen uslov (11.16) na osnovu koga je $v[k] = 0$, osim u tačkama gde je $k = rU$ kada je $v[kU] = x[k]$.

U praksi se, naravno, idealni NF filter ne može ostvariti pa se koriste razne FIR ili IIR NF funkcije prenosa čija je sinteza opisana u osmom i devetom poglavlju. U nekim slučajevima mogu se koristiti vrlo proste, ostvarljive NF funkcije prenosa. Takav je slučaj *linearne interpolacije* koji se vrlo često sreće u praksi. Kod linearnog interpolatora koristi se NF filter čiji je impulsni odziv:

$$h[n] = \begin{cases} 1 - |n|/U, & |n| \leq U \\ 0, & \text{drugde} \end{cases} \quad (11.24)$$

Izlazni signal iz linearnog interpolatora se dobija na osnovu (11.23) i (11.24). Lako se može pokazati da je:

$$y[m] = x[m/U], \quad |m| = rU, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (11.25)$$

tj. ulazni i izlazni odbirci su isti u tačkama interpolacije. Dodatni odbirci kojima je povećana učestanost odabiranja dobijeni su linearnom interpolacijom. Frekvencijski odziv linearnog interpolatora dobija se određivanjem Furijeove transformacije impulsnog odziva (11.24):

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{U} \left[\frac{\sin(\Omega U/2)}{\sin(\Omega/2)} \right]^2 \quad (11.26)$$

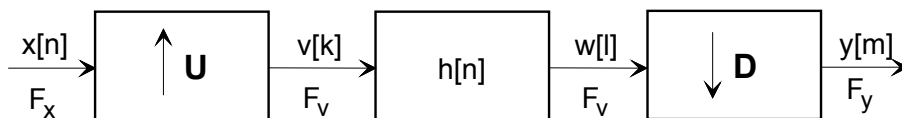
Analizom izraza (11.26) se uočava da se prva nula frekvencijske karakteristike pojavljuje na učestanosti $2\pi/U$. To znači da linearni interpolator loše aproksimira karakteristiku idealnog filtra jer nedovoljno slabi signale iz opsega učestanosti $\pi/U \leq \Omega \leq \pi$. Zbog toga linearna interpolacija nije dobra ako je učestanost odabiranja ulaznog signala blizu Nikvistove brzine odabiranja. Ukoliko je pak učestanost odabiranja znatno veća od Nikvistove brzine odabiranja onda je linearni interpolator dobra aproksimacija idealnog NF filtra.

11.3 PROMENA UČESTANOSTI ODABIRANJA ZA U/D PUTA

Promena učestanosti odabiranja za faktor koji predstavlja racionalan broj može se ostvariti kombinovanjem postupaka interpolacije i decimacije. Redosled primene interpolacije i decimacije nije nevažan. Pogodnije je prvo primeniti interpolator zbog toga što u spektralnom domenu nastaje sabijanje skale učestanosti, a zatim decimator. Na taj način se može u potpunosti očuvati spektralna karakteristika ulaznog signala. Dakle, promena učestanosti odabiranja sa racionalnim faktorom U/D ostvaruje se kaskadnom vezom interpolatora i decimatora, tj. učestanost odabiranja se prvo povećava U puta a zatim se smanjuje D puta. Kako se u takvoj konfiguraciji pojavljuje kaskadna veza dva NF filtra koji rade sa signalima čija je učestanost odabiranja ista, moguće je kombinovati ta dva filtra u jedinstveni NF filter koji kombinuje potrebne operacije filtriranja u interpolatoru i decimatoru. Dakle, funkcija prenosa jedinstvenog filtra treba da bude:

$$H(e^{j\Omega_v}) = \begin{cases} U, & 0 \leq |\Omega_v| \leq \min\left(\frac{\pi}{D}, \frac{\pi}{U}\right) \\ 0, & \text{drugde} \end{cases} \quad (11.27)$$

gde je $\Omega_v = 2\pi F/F_v = 2\pi F/UF_x = \Omega_x/U$. Blok šema sistema za promenu učestanosti odabiranja sa racionalnim faktorom U/D prikazana je na slici 11.5.



Slika 11.5 Blok šema sistema za promenu učestanosti odabiranja sa faktorom U/D .

U vremenskom domenu, izlazni signal iz ekspandera učestanosti $v[k]$ dobija se na osnovu (11.16) kao:

$$v[k] = \begin{cases} x[k/U], & |k| = rU, r = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{drugde} \end{cases} \quad (11.28)$$

a izlaz iz NF filtra je dat konvolucionom sumom:

$$w[l] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v[k]h[l-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[l-kU] \quad (11.29)$$

Na kraju se dobija izlaz iz kompresora učestanosti odabiranja na osnovu (11.4) kao:

$$y[m] = w[mD] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[mD - kU]x[k] \quad (11.30)$$

Izraz (11.30) se može napisati u pogodnijem obliku ako se uvede smena:

$$k = \left\lfloor \frac{mD}{U} \right\rfloor - n \quad (11.31)$$

gde je simbolom $\lfloor r \rfloor$ označen najveći celi broj koji ne prevazilazi r . Na taj način se iz (11.30) dobija:

$$y[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h \left[mD - \left\lfloor \frac{mD}{U} \right\rfloor U + nU \right] x \left[\left\lfloor \frac{mD}{U} \right\rfloor - n \right] \quad (11.32)$$

Kako je:

$$mD - \left\lfloor \frac{mD}{U} \right\rfloor U = \langle mD \rangle_U \quad (11.33)$$

jednačina (11.32) se može napisati u konačnom obliku:

$$y[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h \left[nU + \langle mD \rangle_U \right] x \left[\left\lfloor \frac{mD}{U} \right\rfloor - n \right] \quad (11.34)$$

Iz jednačine (11.34) se vidi da se izlazni signal $y[m]$ dobija propuštanjem ulaznog signala $x[n]$ kroz vremenski promenljivi filter sa impulsnim odzivom:

$$g[n, m] = h \left[nU + \langle mD \rangle_U \right], \quad -\infty < m, n < \infty \quad (11.35)$$

gde je $h[n]$ impulsni odziv vremenski nepromenljivog NF filtra koji radi na učestanosti odabiranja UF_x . Iz (11.35) se vidi da za svaki celi broj k važi:

$$\begin{aligned} g[n, m + kU] &= h \left[nU + \langle mD + kDU \rangle_U \right] \\ &= h \left[nU + \langle mD \rangle_U \right] = g[n, m] \end{aligned} \quad (11.36)$$

odnosno, impulsni odziv $g[n, m]$ je periodičan po promenljivoj m sa periodom U .

Analiza konverzije učestanosti u frekvencijskom domenu se takođe može izvesti kombinovanjem dobijenih rezultata za postupke decimacije i interpolacije. Spektar signala na izlazu NF filtra je:

$$W(e^{j\Omega_v}) = H(e^{j\Omega_v})X(e^{jU\Omega_v}) = \begin{cases} UX(e^{j\Omega_v U}), & 0 \leq |\Omega_v| \leq \min\left(\frac{\pi}{D}, \frac{\pi}{U}\right) \\ 0, & \text{drugde} \end{cases} \quad (11.37)$$

dok je spektar izlaznog signala:

$$Y(e^{j\Omega_y}) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} W[e^{j(\Omega_y - 2\pi k)/D}] = \begin{cases} \frac{U}{D} X(e^{j\Omega_y/D}), & 0 \leq |\Omega_y| \leq \min\left(\pi, \frac{\pi D}{U}\right) \\ 0, & \text{drugde} \end{cases} \quad (11.38)$$

pošto NF filtar sprečava preklapanje u frekvencijskom domenu.

11.4 SINTEZA I REALIZACIJA FILTARA U SISTEMIMA ZA KONVERZIJU UČESTANOSTI ODABIRANJA

NF filtri koji se koriste u sistemima za decimaciju, interpolaciju ili konverziju učestanosti odabiranja sa racionalnim faktorom treba da što manje utiču na promenu oblika korisnog dela spektra ulaznog signala. U praksi se najčešće koriste FIR filtarske funkcije iz sledećih razloga:

1. FIR filtri se mogu projektovati tako da ne unose fazna izobličenja.
2. Kod interpolacije je $U - 1$ ulaznih odbiraka u filtar jednako nuli, pa ih ne treba množiti sa koeficijentima.
3. Kod decimacije se odbacuje $D - 1$ izlaznih odbiraka, pa ih ne treba ni izračunavati, ako je realizacija nerekurzivnog tipa.
4. Simetrija koeficijenata impulsnog odziva FIR filtra svodi broj množenja na približno polovinu.

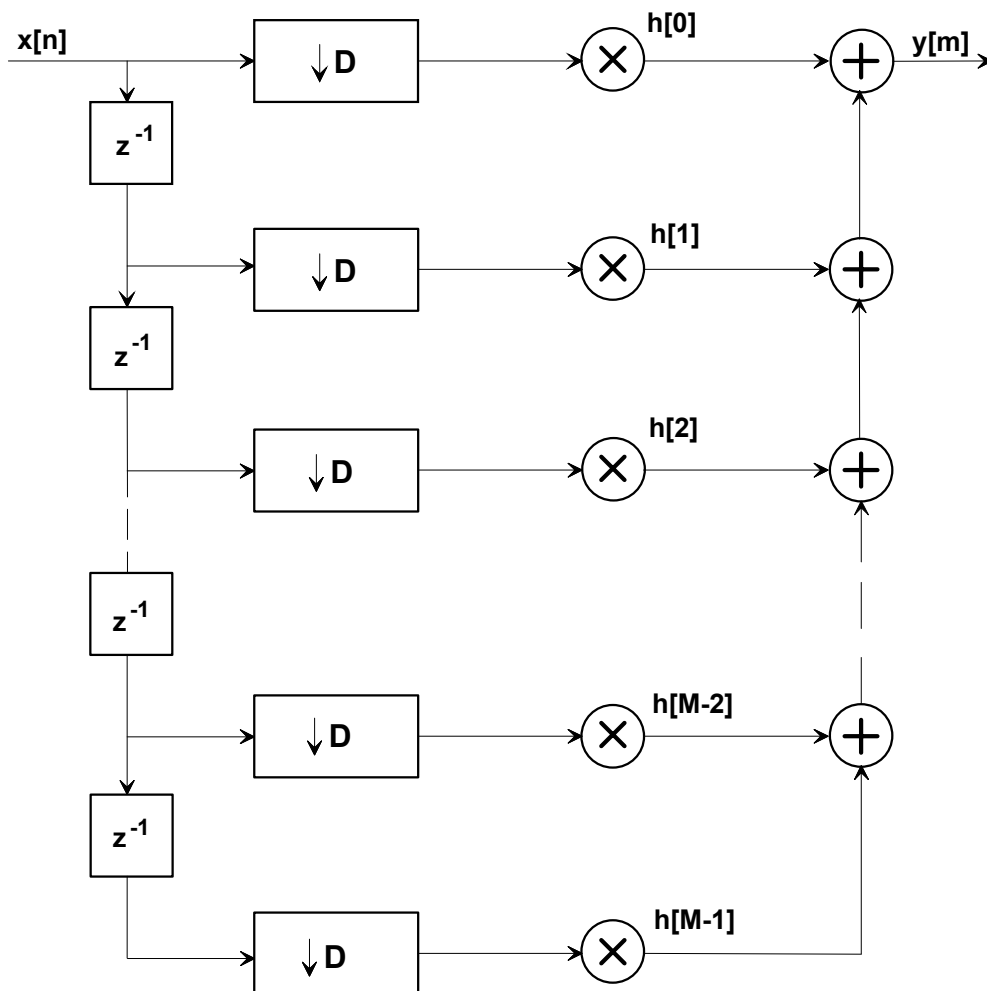
Navedene osobine omogućavaju efikasniju realizaciju FIR filtarskih funkcija nego što bi se očekivalo na osnovu postavljenih specifikacija. Uštede se mogu ostvariti u postupku sinteze (smanjenje reda ili broja nenultih koeficijenata impulsnog odziva) ili u postupku realizacije (formiranjem posebne efikasnije realizacione strukture).

Ako se interpolacija ili decimacija vrši sa faktorom 2, propusni opseg filtra je jednak $\pi/2$, odnosno jednak je polovini Nikvistove učestanosti. Po ovoj osobini takav filtar se naziva *poluopsežni filtar* (engl. halfband filter). Amplitudska karakteristika poluopsežnog filtra aproksimira idealnu karakteristiku koja predstavlja periodičnu povorku pravougaonih impulsa jednake širine nenultog i nultog dela. Stoga su koeficijenti razvoja u Furijeov red, tj. koeficijenti impulsnog odziva $h[n]$ takvog filtra, jednaki nuli za parne vrednosti n , osim za $n = 0$.

Velike uštede se mogu postići i ako je $D \gg 1$ ili $U \gg 1$, tj. prilikom realizacije NF filtara sa vrlo uskim propusnim opsegom. Tada se funkcija prenosa NF filtra realizuje u vidu kaskadne veze dva filtra. Prednost ovakvog načina realizacije je u tome što su specifikacije za pojedinačne filtre mnogo manje stroge nego za ceo filtar. To posebno važi za onaj filtar koji radi na većoj učestanosti, jer je kod njega prelazna zona šira. Stoga je ukupan red kaskadne realizacije znatno manji od reda integralne realizacije filtra. Zbog prednosti koja ova realizacija ima, ona se može koristiti i za realizaciju NF filtara sa vrlo uskim propusnim opsegom, čak i kada se učestanost odabiranja ne menja. U tom slučaju se prvo izvrši decimacija sa faktorom U , za kojom sledi interpolacija sa istim

faktorom U . Ukupan broj množenja u takvoj realizaciji je mnogo manji nego kod integralne realizacije filtra, posebno u slučajevima kada se faktor U izabere tako da predstavlja stepen broja 2. Tada se realizacija izvodi kaskadnom vezom više poluopsežnih filtara što donosi dodatno poboljšanje ekonomičnosti realizacije.

U realizaciji FIR filtara u interpolatorima i decimatorima najčešće se koriste modifikovana direktna ili transponovana realizacija, koje su opisane u odeljku 7.1.1. Posmatrajmo prvo slučaj decimacije. Tada, na osnovu slike 11.1, FIR filter prethodi kompresoru učestanosti. Pošto kompresor uzima svaki D -ti odbirak sa izlaza filtra, to znači da se $D-1$ odbiraka nepotrebno izračunava kada se FIR filter realizuje direktnom realizacijom sa slike 7.1. Znatno poboljšanje efikasnosti realizacije se dobija ako se operacija kompresije unese u filter, kao što je prikazano na slici 11.6. U novodobijenoj strukturi sva množenja i sabiranja se vrše na nižoj učestanosti F_x/D . Broj aritmetičkih operacija može se smanjiti još dva puta ako se iskoristi simetrija koeficijenata impulsnog odziva (koeficijenata množača), a još za dva puta ako je $D = 2$.

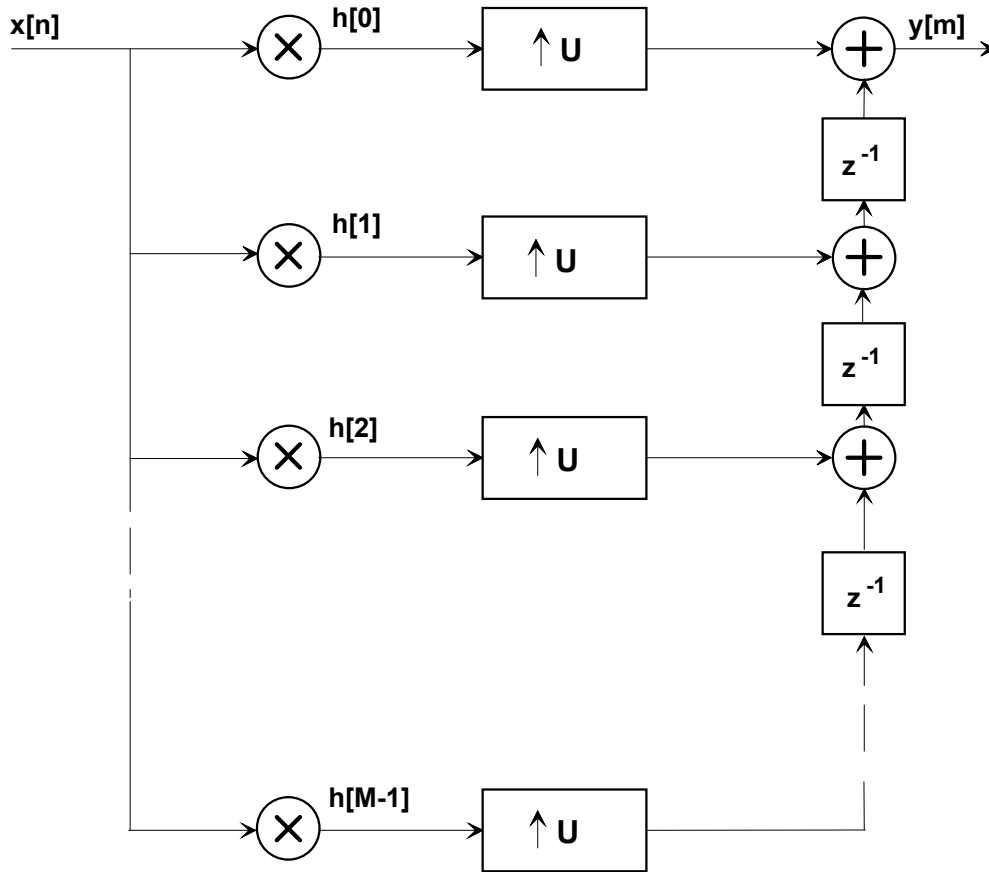


Slika 11.6 Efikasna realizacija decimatora.

U slučaju interpolacije takođe se mogu ostvariti znatne uštede u realizaciji. Naime, povećanje učestanosti odabiranja ostvaruje se ubacivanjem $U-1$ nula između svaka dva odbirka ulaznog signala. To znači da će veliki broj sabiranja i množenja u relizacionoj strukturi ustvari biti operacije sa nulom kao argumentom. Efikasna realizacija interpolatora sa slike 11.4 može se ostvariti ako se za realizaciju FIR filtra iskoristi transponovana struktura sa slike 7.3, kod koje je

ekspandor unesen u samu strukturu filtra, što je prikazano na slici 11.7. U strukturi sa slike 11.7, množenja se obavljaju na nižoj učestanošću F_x , a unošenje nula se obavlja posle množenja.

Poređenjem efikasnih realizacija decimatora sa slike 11.6 i interpolatora sa slike 11.7, lako se uočava da se interpolator može dobiti transponovanjem strukture decimatora i obratno.



Slika 11.7 Efikasna realizacija interpolatora.

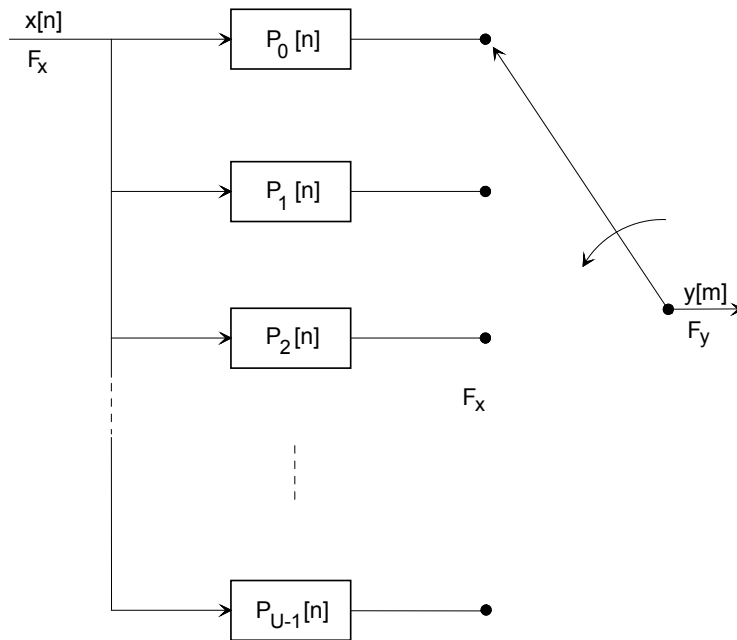
Dalje poboljšanje efikasnosti struktura decimatora i interpolatora može se ostvariti podelom FIR filtra na podfiltre manje dužine. Da bi se objasnio način razlaganja, posmatrajmo slučaj interpolacije sa faktorom U . Kada bi se interpolacioni filter realizovao direktnom realizacijom sa slike 7.1, u elementima za kašnjenje bi se pamtio veliki broj nula, tačnije, postoji samo $K = M/U$ nenulih signala zapamćenih u elementima za kašnjenje. U jednom trenutku oni se množe sa filterkim koeficijentima $h[0], h[U], h[2U], \dots, h[M-U]$. U sledećem trenutku, nenulte vrednosti signala u filtru se množe sa koeficijentima $h[1], h[U+1], h[2U+1], \dots, h[M-U+1]$, itd. Dakle, može se definisati skup kraćih FIR filtera, koji se nazivaju *polifazni filteri*, čiji su impulzni odzivi:

$$p_k[n] = h[k + nU] \quad \begin{matrix} k = 0, 1, \dots, U-1 \\ n = 0, 1, \dots, K-1 \end{matrix} \quad (11.39)$$

Skup od U polifaznih filtera može se realizovati kao paralelna banka filtera, čiji se izlazi sekvencijalno selektuju sa učestanošću koja je jednaka učestanošću odabiranja izlaznog signala, F_y . Takva struktura je prikazana na slici 11.8. Polifazni filteri u strukturi sa slike 11.8 vrše izračunavanje na nižoj učestanošću odabiranja F_x , a povećanje brzine odabiranja se ostvaruje paralelnim generisanjem U izlaznih odbiraka i njihovim očitavanjem U puta većom brzinom. Posmatranjem

realizacione strukture sa slike 11.8, lako se uočava ranije pomenuta osobina da interpolator predstavlja vremenski promenljiv sistem čiji se impulsni odziv dobija iz jednačine (11.35) smenom $D = 1$.

Posmatranjem impulsnog odziva polifaznih filtara (11.35), može se uočiti još jedna interesantna osobina. Impulsni odzivi polifaznih filtara, $p_k[n]$, dobijaju se decimacijom impulsnog odziva originalnog filtra, $h[n]$, sa faktorom U . To znači da, ako je propusni opseg originalnog filtra $0 \leq |\omega| \leq \pi/U$, propusni opseg polifaznih filtara treba da bude $0 \leq |\omega| \leq \pi$, tj. polifazni filtri u suštini predstavljaju propusnike svih učestanosti, koji se razlikuju samo po faznoj karakteristici. Odatle dolazi i naziv *polifazni* filtri.



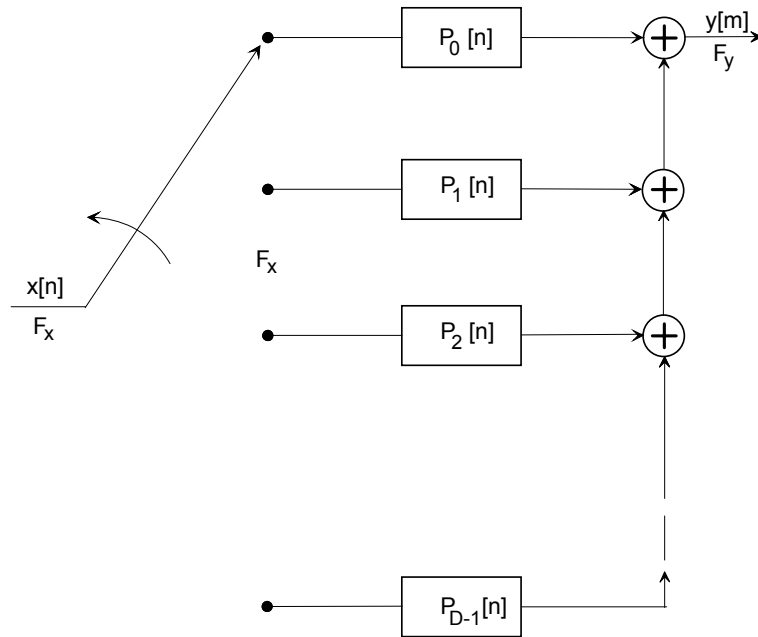
Slika 11.8 Realizacija interpolatora pomoću polifaznih filtara.

Transponovanjem realizacione strukture interpolatora realizovanog pomoću polifaznih filtara sa slike 11.8, dobija se struktura decimatora sa slike 11.9, koja je takođe realizovana pomoću polifaznih filtara. Impulsni odziv polifaznih filtara u ovom slučaju dat je izrazom:

$$p_k[n] = h[k + nD] \quad k = 0, 1, \dots, D-1$$

$$n = 0, 1, \dots, K-1 \quad (11.40)$$

gde je $K = M/D$ celi broj koji predstavlja dužinu impulsnog odziva polifaznih filtara.



Slika 11.9 Realizacija decimatora pomoću polifaznih filtara.

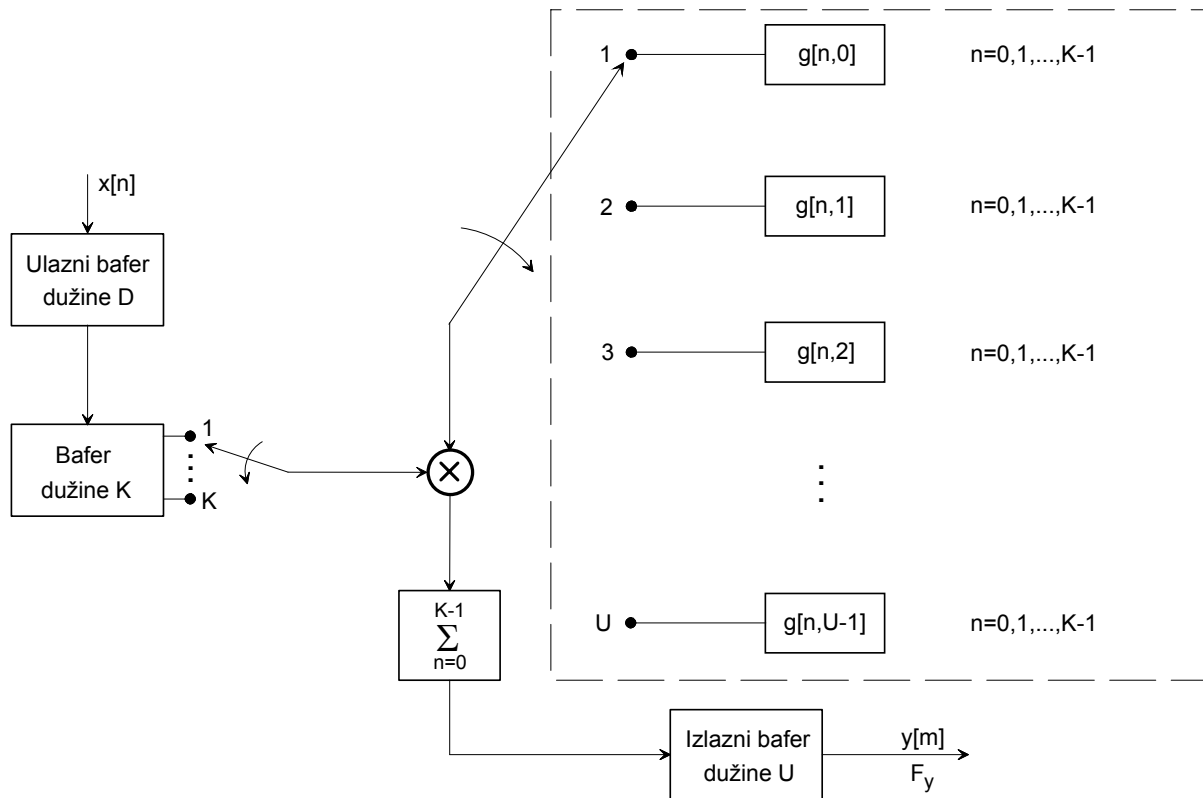
Posmatrajmo sada najopštiji slučaj konverzije učestanosti odabiranja sa racionalnim faktorom U/D . Impulsni odziv vremenski promenljivog filtra koji vrši traženu konverziju $g[n, m]$ je dat izrazom (11.35). Iz praktičnih razloga se dužina impulsnog odziva FIR filtra bira tako da bude multipl od U , tj. $M = KU$. Zbog toga skup koeficijenata $g[n, m]$ za svako $m = 0, 1, \dots, U - 1$ sadrži K elemenata. Pošto je $g[n, m]$ takođe periodična funkcija sa periodom U , izlazni signal $y[m]$ može se napisati u obliku:

$$y[m] = \sum_{n=0}^{K-1} g\left[n, m - \left\lfloor \frac{m}{U} \right\rfloor U\right] x\left[\left\lfloor \frac{mD}{U} \right\rfloor - n\right] \quad (11.41)$$

koji se može protumačiti kao obrada blokova dužine K pomoću skupa filtara sa K koeficijenata:

$$g\left[n, m - \left\lfloor \frac{m}{U} \right\rfloor\right], \quad n = 0, 1, \dots, K - 1 \quad (11.42)$$

Ukupno postoji U takvih skupova koeficijenata, po jedan za svaki skup od U izlaznih odbiraka. Svakom takvom izlaznom bloku od U odbiraka signala $y[m]$, odgovara blok od D odbiraka ulaznog signala $x[n]$, koji učestvuju u izračunavanjima. Opisani algoritam izračunavanja izlaznog signala po blokovima prikazan je na slici 11.10. Ulazni podaci se prikupljaju u blokovima po D odbiraka u ulaznom baferu i prebacuju u drugi bafer dužine K . Podatak se prebacuje iz ulaznog bafera u drugi bafer svaki put kada se $\lfloor mD/U \rfloor$ poveća za jedan. Da bi se formirao jedan izlazni odbirak $y[l]$, $l = 0, \dots, U - 1$, potrebno je pomnožiti odbirke iz drugog bafera sa koeficijentima iz skupa $g[n, l]$, $n = 0, \dots, K - 1$ i sabrati K proizvoda. Dakle, na taj način se dobija U izlaznih odbiraka, a postupak se ponavlja uzimanjem novih D ulaznih odbiraka, itd.

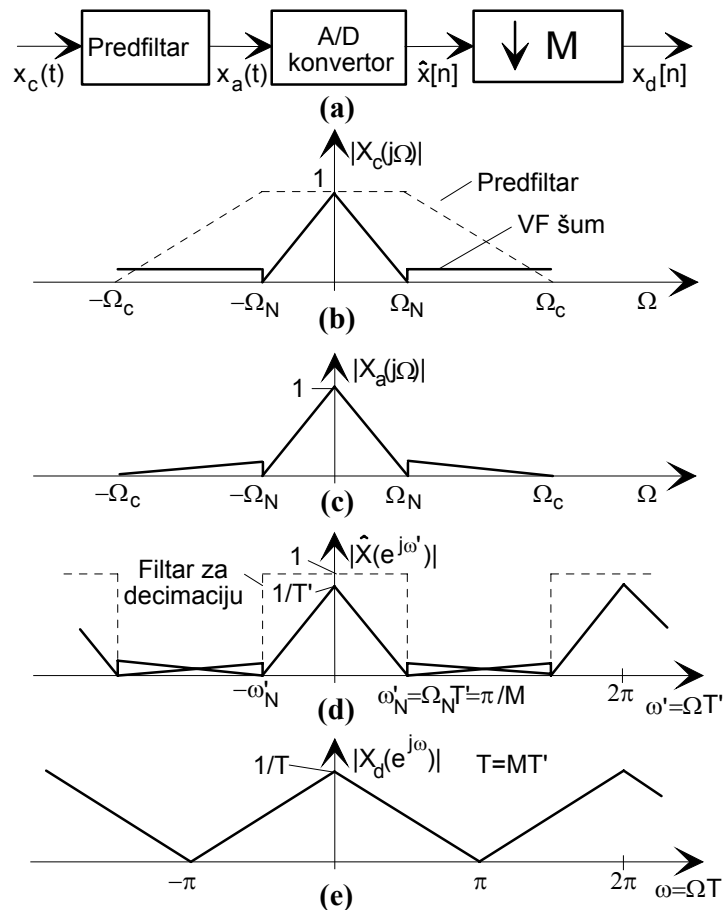


Slika 11.10 Realizacija konvertora učestanosti odabiranja obradom po blokovima.

11.5 PRIMENA PROMENE UČESTANOSTI ODABIRANJA KOD DISKRETIZACIJE I REKONSTRUKCIJE SIGNALA

U analizi praktičnih postupaka za diskretizaciju i rekonstrukciju signala, koja je bila sprovedena u odeljku 3.5, ukazano je na značaj analognih filtera koji prethode postupku A/D konverzije, odnosno slede za postupkom D/A konverzije. Pošto ta dva filtra u idealnom slučaju predstavljaju idealne NF filtre, u praktičnim realizacijama se zahteva da budu vrlo selektivni. Takvi analogni selektivni filtri mogli bi da se realizuju korišćenjem aktivnih i pasivnih komponenata, ali bi takva realizacija bila veoma skupa. Poseban problem se pojavljuje kada sistem treba da radi sa promenljivom učestanošću odabiranja, što za sobom povlači promenu graničnih učestanosti ta dva filtra. Dakle, poželjno bi bilo potpuno eliminisati analogne filtre iz sistema, ili, ako to nije moguće, ublažiti zahteve koje treba da zadovolje i na taj način pojednostaviti njihovu realizaciju.

Jedan prilaz za ublažavanje zahteva za karakteristiku predfiltra prikazan je na slici 11.11a. Diskretizacija kontinualnog signala se vrši vrlo visokom učestanošću odabiranja, M puta većom nego što je to potrebno. Ovo omogućava jednostavnu realizaciju A/D konvertora, kao i vrlo blage zahteve za amplitudsku karakteristiku predfiltra. Smanjenje učestanosti odabiranja na traženu vrednost vrši se postupkom decimacije.

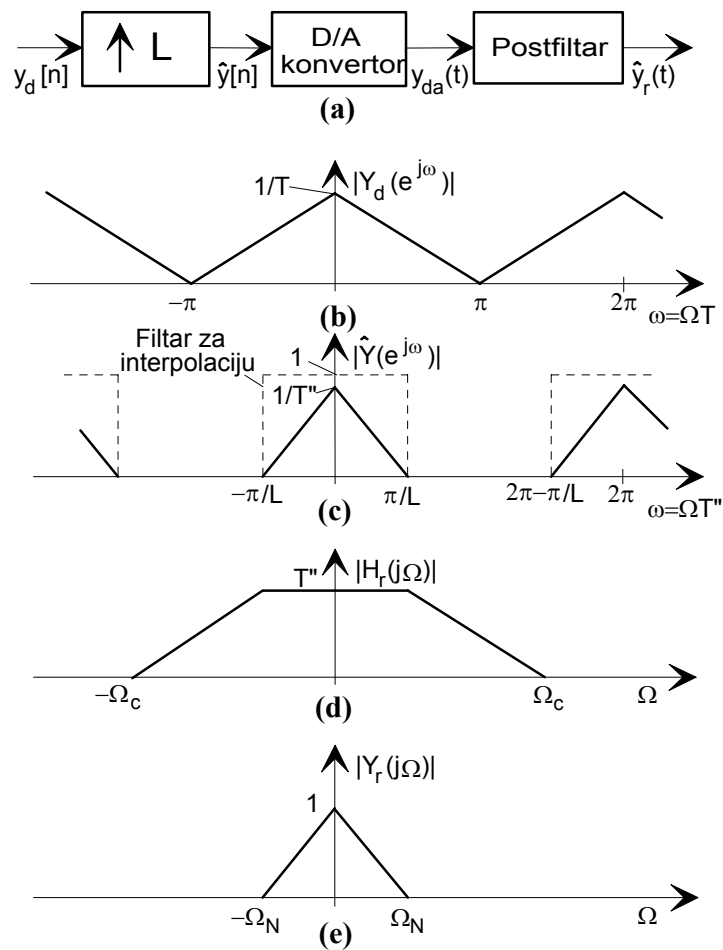


Slika 11.11 Primena decimacije kod A/D konverzije.

Neka je granična učestanost spektra analognog signala ω_N , a granica propusnog opsega NF predfiltera ω_c . Spekturu analognog signala, koji je prikazan na slici 11.11b punom linijom, superponiran je VF šum zbog koga se i stavlja predfilter. Amplitudska karakteristika predfiltera prikazana je isprekidanom linijom. Na slici 11.11c je prikazan spektar signala posle predfiltera, tj. na ulazu u A/D konvertor. Ako se signal diskretizuje učestanošću odabiranja koja zadovoljava uslov $\omega'_s \geq \omega_N + \omega_c$, onda će spektar diskretnog signala izgledati kao na slici 11.11d. Pošto je $\omega'_s \geq 2M\omega_N$ vidi se da za granične učestanosti predfiltera važi uslov $\omega_N \ll \omega_c$, što znači da se predfilter može veoma jednostavno realizovati, često i kao pasivna RC mreža prvog reda. Šum, koji nije u potpunosti otklonjen predfilterom, izazvaće preklapanje spektra ali to preklapanje ne utiče na spektar korisnog signala. U postupku decimacije potrebno je ograničiti spektar signala na učestanost $\Omega_N = \omega_N T' = \pi/M$, ali se *selektivni NF filter realizuje u digitalnom domenu* gde je njegova realizacija znatno jednostavnija. Amplitudska karakteristika idealnog NF filtera za decimaciju takođe je prikazana na slici 11.11d. Spektar signala posle decimacije prikazan je na slici 11.11e, odakle se vidi da je VF šum potpuno eliminisan, iako je amplitudska karakteristika predfiltera veoma blaga.

Slični rezultati se mogu ostvariti i u postupku rekonstrukcije analognog signala iz diskretnog signala. Da bi se olakšali uslovi za sintezu postfiltera posle D/A konvertora, primenjena je interpolacija diskretnog signala pre D/A konvertora. Postupak je prikazan na slici 11.12a. Na slici 11.12b je prikazan spektar diskretnog signala pre interpolacije, a na slici 11.12c spektar signala posle interpolacije sa faktorom L . Naravno, pre interpolacije je potrebno ograničiti spektar vrlo

selektivnim NF filtrom, ali se *filtriranje obavlja u digitalnom domenu*, tako da realizacija filtra ne predstavlja problem.



Slika 11.12 Primena interpolacije kod D/A konverzije.

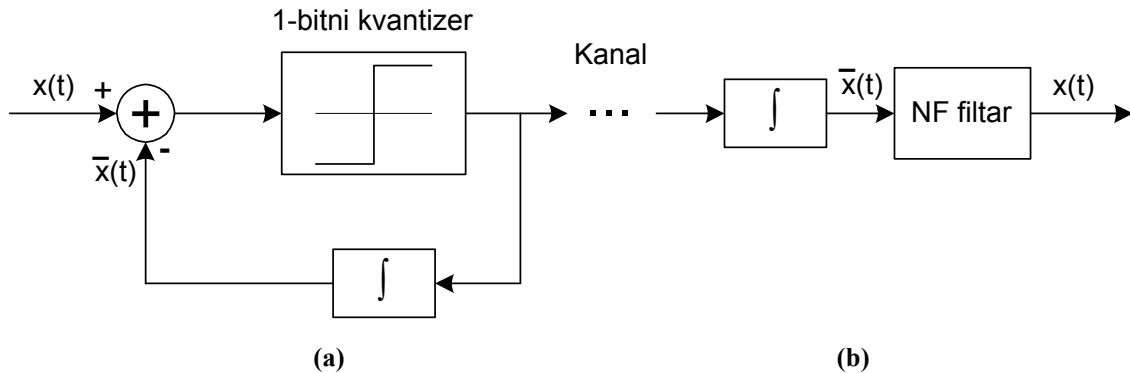
U karakteristiku interpolacionog filtra može biti uključena i kompenzacija frekvencijskih karakteristika D/A konvertora i postfiltra. Ova kompenzacija nije prikazana na slici 11.12c, gde je isprekidanom linijom predstavljena karakteristika interpolacionog filtra koji je prikazan kao idealni filter. Zbog toga što su replike u periodičnom spektru interpoliranog signala jako razdvojene, amplitudska karakteristika NF rekonstrukcionog filtra ne mora biti selektivna, što je prikazano na slici 11.12d. Jedini uslov koji granične učestanosti ovog filtra treba da zadovolje $\omega_c < 2\pi/T'' - \omega_N = L\omega_s - \omega_N$ lako se ostvaruje jer je $L\omega_s \gg \omega_N$. Zbog toga se kao analogni rekonstrukcioni filter često može upotrebiti jednostavna pasivna RC mreža.

11.6 SIGMA-DELTA (Σ/Δ) A/D KONVERZIJA

Postupak decimacije se, osim za pojednostavljenje postupka projektovanja i realizacije analognog predfiltra, može primeniti i za realizaciju ekonomičnih A/D konvertora visoke rezolucije. U literaturi su takvi konvertori poznati kao Σ/Δ A/D konvertori. Za razliku od konvencionalnih A/D konvertora [Ž-1], osnovu Σ/Δ konvertora čini jednobitni A/D konvertor velike brzine, a potrebna rezolucija se dobija u postupku decimacije. Osim toga, u postupku decimacije redukuje se i šum konverzije. Zbog toga što za realizaciju jednobitnog konvertora nisu

potrebne skupe precizne komponente, Σ/Δ postupak konverzije je veoma pogodan za realizaciju pomoću monolitnih integrisanih VLSI kola, koja objedinjuju analogne i digitalne funkcije.

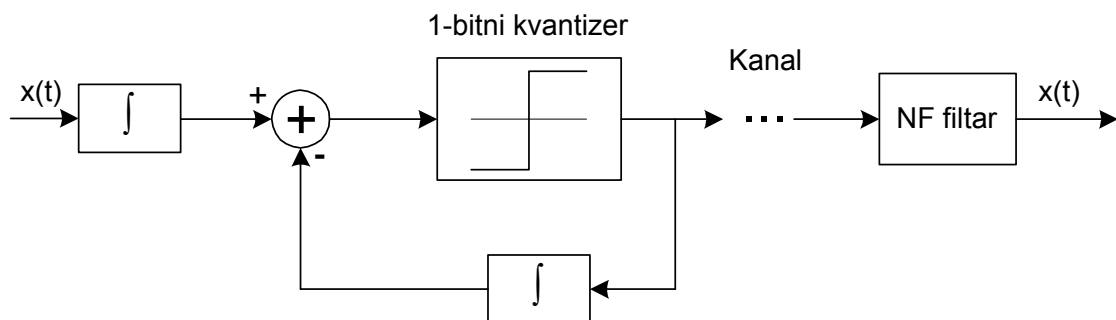
Σ/Δ konvertor predstavlja nadgradnju Σ/Δ modulatora, koji sa svoje strane predstavlja modifikaciju dobro poznatog postupka delta modulacije. Blok šeme delta modulatora i demodulatora, primenjenih za prenos analognog signala, prikazane su na slici 11.13.



Slika 11.13 Blok šema postupka delta modulacije: (a) Modulator, (b) Demodulator.

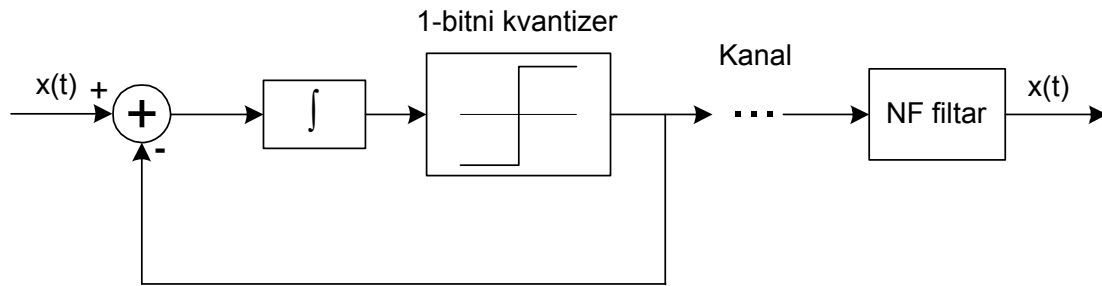
Jednobitni kvantizer kvantuje razliku analognog signala i usrednjene vrednosti izlaznog signala (procene ulaznog signala) koja se dobija na izlazu integratora. U stvari, kvantizer određuje znak razlike $x(t) - \bar{x}(t)$, gde $\bar{x}(t)$ predstavlja usrednjenu vrednost izlaznog signala $y(t)$. Na prijemnoj strani, u postupku demodulacije, integrator rekonstruiše isti signal $\bar{x}(t)$ koji se pojavljuje i na predajnoj strani. Ovaj signal, koji predstavlja grubu aproksimaciju analognog signala $x(t)$, uobličava se niskofrekventnim filtrom čime se dobija finija aproksimacija ulaznog analognog signala $x(t)$. Iz teorije telekomunikacija je poznato da ovaj postupak modulacije nije dobar ako ulazni signal ima brze promene, kao i da njegove performanse jako zavise od učestanosti ulaznog signala. Takođe je poznato da kvantizacioni šum ima uniformni spektar, a nivo šuma određuje jednobitni konvertor.

Sa slike 11.13 se vidi da su za postupak delta modulacije i rekonstrukcije signala potrebna dva integratora. Pošto je integracija linearna operacija, drugi integrator se može premestiti ispred modulatora bez promene ulazno/izlaznih karakteristika, što je prikazano na slici 11.14.

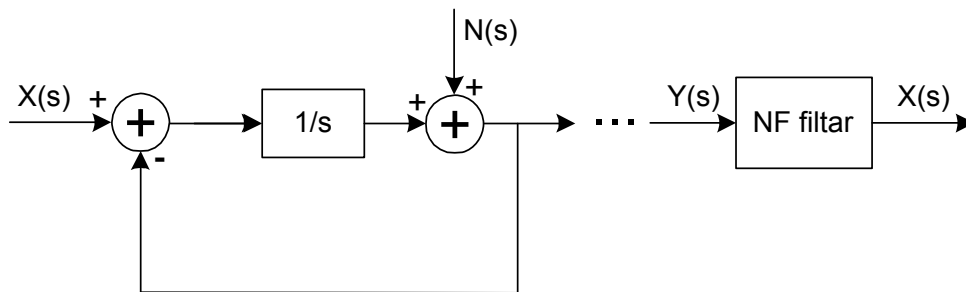


Slika 11.14 Prvi korak u transformaciji delta modulatora u Σ/Δ modulator.

Dalje, takođe zbog osobine linearnosti, dva integratora sa slike 11.14 se mogu sjediniti u jedan integrator, što je prikazano na slici 11.15. Blok šema prikazana na slici 11.15 poznata je pod imenom *sigma-delta* (Σ/Δ) modulator ili *interpolacioni koder*. Naziv je dobila po činjenici da se integrator (Σ) nalazi ispred delta modulatora (Δ).

Slika 11.15 Blok šema Σ/Δ modulatora.

Primenom Laplasove transformacije lako se mogu objasniti neke važne osobine Σ/Δ modulatora, kao što je, na primer, uobličavanje spektra šuma. Blok dijagram Σ/Δ modulatora u s -domenu prikazan je na slici 11.16. Kao što se vidi, jednobitni kvantizer je predstavljen kao sumator čiji je jedan ulaz šum kvantovanja $N(s)$.

Slika 11.16 Blok šema Σ/Δ modulatora u s -domenu.

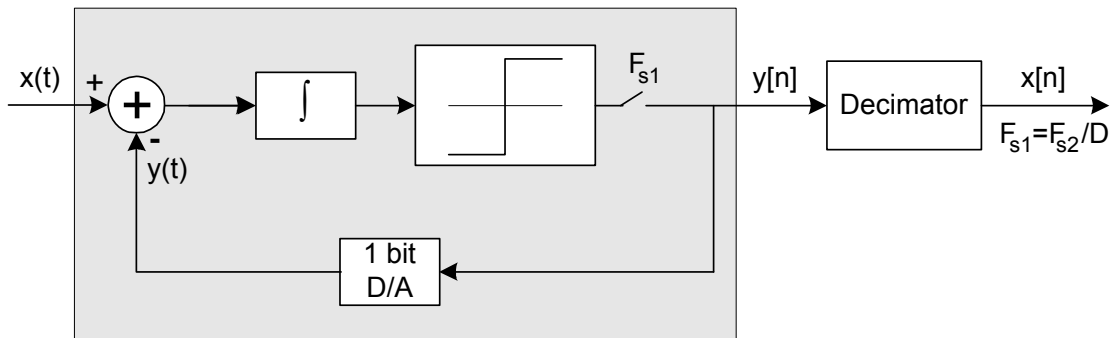
Sa slike 11.16 se lako dobijaju funkcije prenosa:

$$\left. \frac{Y(s)}{X(s)} \right|_{N(s)=0} = \frac{1}{s+1} \quad (11.43)$$

$$\left. \frac{Y(s)}{N(s)} \right|_{X(s)=0} = \frac{s}{s+1} \quad (11.44)$$

odnosno, Σ/Δ modulator predstavlja NF filter za ulazni signal, a VF filter za šum. Ako je najviša učestanost u spektru signala niža od granične učestanosti NF filtra, signal će ostati nepromenjen. Međutim, spektar šuma je istaknut na visokim učestanostima. Ako je učestanost odabiranja jednobitnog kvantizera vrlo visoka, šum kvantizacije će biti raspodeljen u vrlo širokom frekvencijskom opsegu, a gustina snage šuma u opsegu od interesa biće vrlo mala.

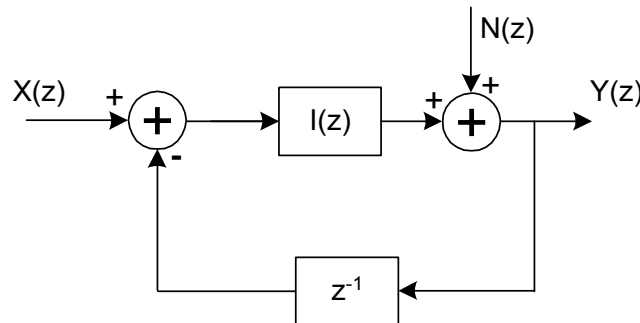
Pretpostavimo sada da se izlaz iz kvantizera diskretizuje sa visokom učestanošću F_{s1} , što je na slici 11.17 simbolički predstavljeno prekidačem. Zbog toga se u petlju povratne sprege mora ubaciti jednobitni D/A konvertor. Takođe pretpostavimo da se jednobitni izlazni signal $y[n]$ dovodi na ulaz kola za decimaciju sa decimacionim faktorom D . Učestanost odabiranja izlaznog signala biće $F_{s2} = F_{s1}/D$, ali će zato zbog usrednjavanja u procesu decimacije rezolucija izlaznog signala biti bolja. Ako se izabere dovoljno velika učestanost odabiranja ulaznog signala tako da faktor decimacije bude veliki, mogu se realizovati A/D konvertori za opseg zvučnih učestanosti sa rezolucijom od 16 do 20 bita.



Σ/Δ petlja prvog reda

Slika 11.17 Blok šema Σ/Δ A/D konvertora prvog reda.

Uobličavanje spektra šuma kvantovanja može se najbolje ispitati primenom z -transformacije za analizu strukture Σ/Δ konvertora sa slike 11.17. Tako se dobija blok šema koja je prikazana na slici 11.18, na kojoj $I(z)$ označava funkciju prenosa digitalnog integratora.

Slika 11.18 Blok šema Σ/Δ A/D konvertora prvog reda u z -domenu.

Sa slike 11.18 se lako može naći da je:

$$Y(z) = \frac{I(z)}{1 + z^{-1}I(z)} X(z) + \frac{1}{1 + z^{-1}I(z)} N(z) \quad (11.45)$$

Ako je funkcija prenosa digitalnog integratora:

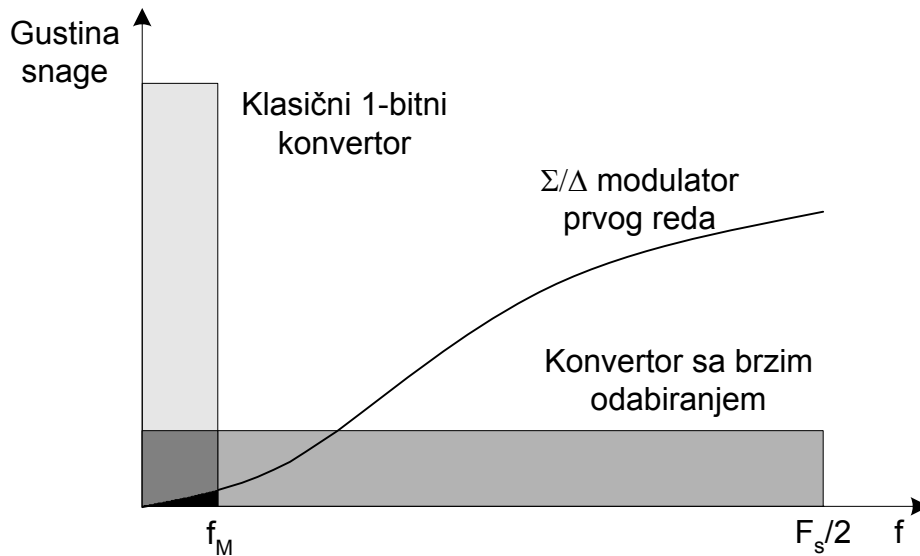
$$I(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (11.46)$$

što odgovara pravougaonom pravilu numeričke integracije, iz (11.45) se dobija:

$$Y(z) = X(z) + (1 - z^{-1})N(z) \quad (11.47)$$

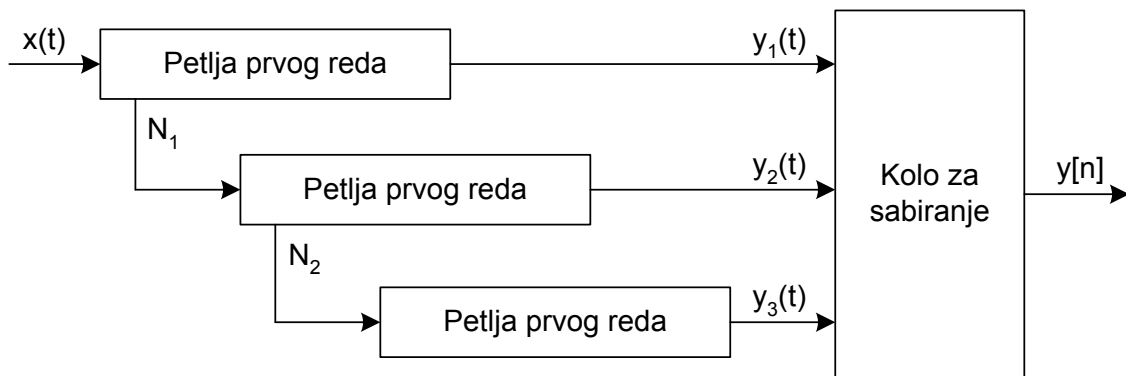
Iz (11.47) se vidi da spektar ulaznog signala ostaje neizmenjen, dok se spektar šuma diferencira, jer faktor $(1 - z^{-1})$ predstavlja funkciju prenosa diskretnog diferencijatora. Na prvi pogled izgleda da je snaga šuma povećana, međutim, ne treba zaboraviti da diferencijator ističe visoke učestanosti, tako da veći deo snage šuma leži van opsega korisnog signala. Na slici 11.19 su prikazane gustine snage šuma tri tipa konvertora: klasičnog jednobitnog konvertora, klasičnog konvertora sa povećanom brzinom odabiranja i Σ/Δ konvertora. Uočava se da je u korisnom opsegu, $(0 - f_M)$, gustina snage šuma konvertora sa povećanom učestanošću odabiranja (tamnije šrafirana površina) predstavlja mali deo ukupne gustine snage. Gustina snage šuma Σ/Δ konvertora (crna površina) još je manja, jer je oslabljena VF filtrom. Dakle, snaga šuma Σ/Δ konvertora je znatno

manja od snage šuma klasičnog jednobitnog konvertora sa učestanošću odabiranja $2f_M$, kao i od snage šuma konvertora sa povećanom učestanošću odabiranja $F_s \gg 2f_M$.



Slika 11.19 Spektri snage šuma raznih A/D konvertora.

Međutim, za konvertore visoke rezolucije ovo smanjenje snage šuma nije dovoljno i u tom slučaju se koristi dodatno uobličavanje spektra šuma. Umesto petlje prvog reda, koristi se petlja drugog ili čak trećeg reda, kao što je prikazano na slici 11.20. Kao ulazni signal za drugo ili treće kolo za uobličavanje spektra koristi se signal greške kvantizera iz prethodnog stepena.



Slika 11.20 Σ/Δ konvertor trećeg reda.

Lako je pokazati da važi:

$$Y_i(z) = N_{i-1}(z) + (1 - z^{-1})N_i(z), \quad i = 2,3 \quad (11.48)$$

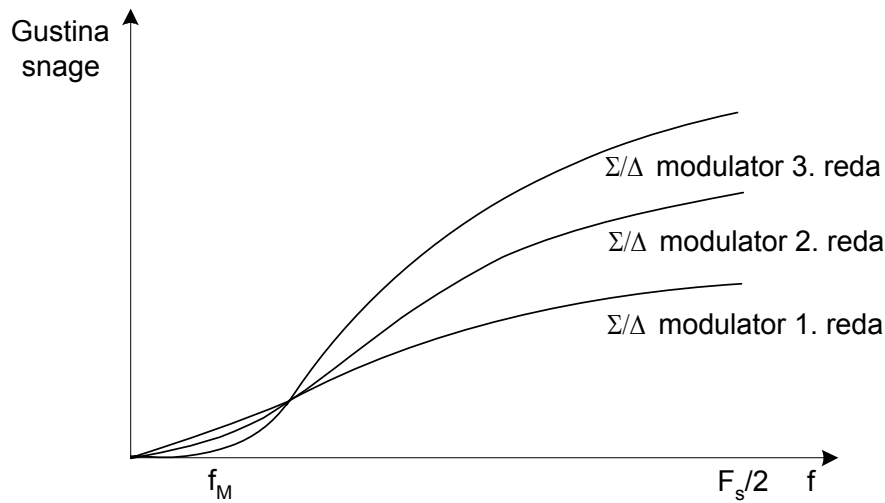
odnosno,

$$Y(z) = X(z) + (1 - z^{-1})^\alpha N_\alpha(z), \quad \alpha = 2,3 \quad (11.49)$$

gde je $\alpha = 2$ za konvertor drugog reda, a $\alpha = 3$ za konvertor trećeg reda.

Dakle, korišćenjem dve ili tri kaskadno vezane petlje za uobličavanje šuma kvantovanja u Σ/Δ konvertoru, postiže se dodatno potiskivanje šuma pri nižim učestanostima i isticanje šuma na višim učestanostima, gde on nije od interesa jer će biti odstranjen dodatnim filtriranjem u filtru za decimaciju. Spektralne karakteristike Σ/Δ konvertora prvog, drugog i trećeg reda su prikazane na

slici 11.21. Primenom kola višeg reda se može ostvariti odnos signal/šum bolji od 96 dB, koji je potreban za realizaciju 16-bitnih konvertora.



Slika 11.21 Spektri snage šuma Σ/Δ konvertora prvog, drugog i trećeg reda.

Decimator u blok šemi sa slike 11.17 ima višestruku ulogu. Pre svega decimator mora da smanji učestanost odabiranja više desetina puta jer ulazni deo Σ/Δ konvertora radi na učestanostima reda nekoliko MHz, a izlazna učestanost odabiranja treba da bude nekoliko desetina KHz. Osim toga, decimator, odnosno NF filter koji je njegov sastavni deo, filtrira visokofrekventni šum koji neizbežno postoji na izlazu Σ/Δ modulatora. Na kraju, decimator mora da obezbedi pretvaranje jednobitnih ulaznih odbiraka u izlazne višebitne odbirke, tj. mora da ima i funkciju usrednjavanja.

Zbog velike učestanosti odabiranja na ulazu decimatora i vrlo strogih zahteva za karakteristike decimacionog filtra, projektovanje decimacionog filtra predstavlja ozbiljan problem. Jedno jednostavno rešenje je da se decimacioni filter realizuje kao FIR filter sa linearnom fazom. Međutim, pošto je računaska efikasnost takve strukture nedovoljno dobra, u praksi se decimacioni filter realizuje u vidu dvostepene strukture, kao na slici 11.22, gde su navedeni tipični podaci za jedan 16-bitni Σ/Δ konvertor DSP56ADC16 [D-8].

Prvi stepen decimacionog filtra realizuje usrednjavanje 16 sukcesivnih odbiraka:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{15} x[n-i] \quad (11.50)$$

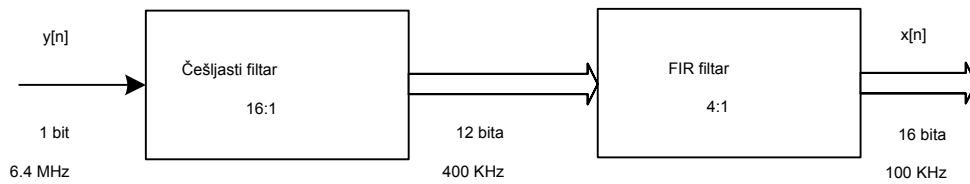
odnosno, ima funkciju prenosa:

$$H(z) = \sum_{i=0}^{15} z^{-i} = \frac{1-z^{-16}}{1-z^{-1}} \quad (11.51)$$

Ovoj funkciji prenosa odgovara diferencna jednačina u rekurzivnom obliku:

$$y[n] = x[n] - x[n-16] + y[n-1] \quad (11.52)$$

koja zahteva samo dva sabiranja.

Slika 11.22 Struktura decimatora u Σ/Δ konvertoru DSP56ADC16.

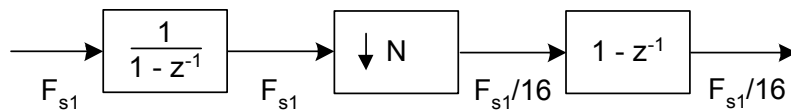
U opštem slučaju decimacije sa faktorom N , ima se:

$$y[n] = x[n] - x[n - N] + y[n - 1] \quad (11.53)$$

odnosno:

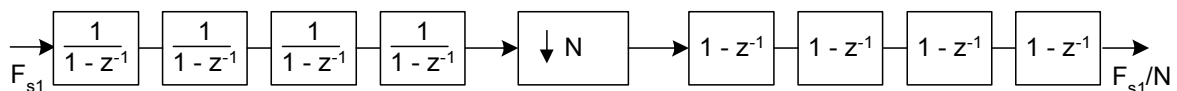
$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} z^{-i} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \quad (11.53)$$

Pošto se iza češljastog filtra uzima svaki N -ti odbirak, dodatna ušteda se može napraviti ako se češljasti filtar realizuje kao na slici 11.23, gde se operacija diferenciranja izvodi na N puta nižoj učestanosti odabiranja. Ovakva realizacija češljastog filtra ima niz prednosti nad klasičnom realizacijom FIR filtra. Pre svega, ova realizacija ne zahteva množenja i memoriju za pamćenje odgovarajućih koeficijenata. Drugo, deo operacija se obavlja na smanjenoj radnoj učestanosti. Treće, struktura je veoma regularna i pogodna za integrisanu realizaciju. Na kraju, primetimo da se isti filtar može koristiti za razne faktore decimacije, N , pri čemu treba promeniti samo faktor skaliranja, koji je neophodan za sprečavanje prekoračenja opsega prilikom sabiranja.



Slika 11.23 Ekonomična realizacija češljastog filtra.

Češljasti filtar čija je struktura prikazana na slici 11.23 najčešće nema dovoljno slabljenje u nepropusnom opsegu, koje je potrebno da speči preklapanje spektra posle decimacije. Jedno efikasno rešenje je da se primeni kaskadna veza više češljastih filtara. Naravno, i u tom slučaju se operacija diferenciranja može izvoditi na nižoj učestanosti odabiranja. Struktura četvorostepenog češljastog filtra prikazana je na slici 11.24.



Slika 11.24 Realizacija češljastog filtra sa povećanim slabljenjem u nepropusnom opsegu.

Realizacija češljastog filtra sa slike 11.24 zahteva samo 8 registara za čuvanje međurezultata, a potrebno je $4(N+1)$ sabiranja po jednom ulaznom odbirku. Signali iz nepropusnog opsega potisnuti su za najmanje 80 dB. Ako se ovakav češljasti filtar veže na izlaz Σ/Δ konvertora trećeg reda, odnos signal-šum na izlazu je oko 72 dB, što omogućava dinamičku rezoluciju od 12 bita. Inače, na izlazu češljastog filtra se može dobiti čak 16-bitna rezolucija, ali se najniža četiri bita zbog preklapanja spektra i šuma ne koriste.

Da bi se ostvarila prava 16-bitna rezolucija potreban je još jedan stepen za decimaciju sa faktorom 4. Taj stepen se mora ostvariti selektivnim FIR filtrom, kao što je pokazano na slici 11.22, pošto se češljastim filtrom ne može ostvariti potrebno potiskivanje signala iz nepropusnog opsega koji se preklapaju sa korisnim opsegom posle decimacije. Ujedno, FIR filter vrši i dodatno potiskivanje šuma tako da se decimacijom dobijaju još dodatna četiri značajna bita. U slučaju konvertora DSP56ADC16, 16-bitna rezolucija je ostvarena pri učestanosti odabiranja od 100 KHz. FIR filter koji se koristi u ovom konvertoru zadovoljava veoma stroge zahteve. Dozvoljena varijacija slabljenja u propusnom opsegu od 0 do 45.5 KHz treba da bude svega 0.001 dB. U nepropusnom opsegu, koji počinje od 50 KHz, slabljenje signala treba da bude bolje od 96 dB. Ovako veliko slabljenje je neophodno da bi se ostvarilo slabljenje šuma kvantovanja potrebno za 16-bitnu rezoluciju. Ovakve specifikacije zadovoljava FIR filter sa 255 simetričnih koeficijenata. Međutim ako se uzme u obzir i činjenica da prethodni češljasti filter unosi amplitudska izobličenja u korisnom opsegu signala (0 - 45.5 KHz), pri projektovanju FIR filtra mora se voditi računa i o kompenzaciji ovih izobličenja. Tada projektovanje FIR filtra postaje veoma složeno, a potreban broj koeficijenata još veći. Međutim, dobijeni rezultati opravdavaju uloženi trud. Ukupna snaga šuma je oko 110 dB manja od snage korisnog signala.

Ukoliko je potrebno ostvariti još bolju rezoluciju, na primer 18 ili 20 bita, primena još jednog stepena za decimaciju i usrednjavanje posle već postojećeg FIR filtra neće dati dobre rezultate. Razlog za to je što se tada decimacijom sa faktorom dva rezolucija popravlja za svega 3 dB, ili 0.5 bita. Na primer, za dobijanje 18-bitne rezolucije, potreban faktor decimacije je 16, a za 20 bita, čak 256. Time bi učestanost odabiranja bila svedena na 6.25 KHz za 16-bitnu, odnosno na svega 400 Hz za 20-bitnu rezoluciju. Međutim, ukoliko se dodatni decimacioni stepen veže na izlaz češljastog filtra, može se iskoristiti činjenica da je rezolucija signala na izlazu češljastog filtra u suštini 16-bitna čime se u punoj meri može koristiti uobličavanje spektra šuma koje vrše petlja trećeg reda i češljasti filter. Na taj način se može ostvariti dodatnih 9 dB, ili 1.5 bit za faktor decimacije dva. Tako se može ostvariti 18-bitna rezolucija pri učestanosti odabiranja od 25 KHz, odnosno 20-bitna rezolucija pri učestanosti odabiranja od 6.25 KHz.

Ključna činjenica u ostvarenju konvertora sa ovako velikom rezolucijom je primena kaskadne veze poluopsežnih filtara, kojom se zamenjuje FIR filter u izlaznom stepenu sa slike 11.22. Kao što je poznato iz odeljka 11.4, poluopsežni filter je simetrični FIR filter, čija je skoro polovina koeficijenata jednaka nuli. Zbog toga je broj množenja u implementaciji takvog filtra svega jedna četvrtina od broja množenja potrebnog za proizvoljni FIR filter. Pošto se poluopsežnim filtrom može ostvariti samo faktor decimacije 2, za realizaciju većeg faktora decimacije potrebno je kaskadno povezati više poluopsežnih filtara. Specifikacije ovakvih filtara, kao i broj potrebnih operacija za razne faktore decimacije prikazani su u Tabeli 11.1

U realizaciji ovako preciznih konvertora potrebno je da se aritmetičke operacije u procesu decimacije izvode sa velikom tačnošću, kao i da se spreči prekoračenje opsega prilikom sabiranja. Zbog toga se u realizaciji FIR filtra sa slike 11.22 koristi interna tačnost od 38 bita, koja se na izlazu svodi na 16 bita. U realizaciji 18-bitnih ili 20-bitnih konvertora interno se koristi 56-bitna rezolucija, koja se na izlazu svodi na 18 ili 20 bita.

Tabela 11.1 Parametri poluopsežnih filtara za decimaciju.

Stepen	Učestanost odabiranja	Širina propusnog opsega	Širina nepropusnog opsega	Broj koeficijenata	Zauzeće memorije	Broj operacija
--------	-----------------------	-------------------------	---------------------------	--------------------	------------------	----------------

1	200 KHz	3 KHz	197 KHz	19	6	11
2	100 KHz	3 KHz	97 KHz	19	6	11
3	50 KHz	3 KHz	47 KHz	19	6	11
4	25 KHz	3 KHz	22 KHz	23	7	13
5	12.5 KHz	3 KHz	9.5 KHz	31	9	17
6	6.25 KHz	2.9 KHz	3.35 KHz	199	51	99