Odabiranje i rekonstrukcija signala

Digitalna obrada signala, beleške sa predavanja

Vladimir Petrović

10. novembar 2026.

Napomena autora: Koncept, metodologija i stručni sadržaj ovog materijala delo su predmetnog nastavnika. U pisanju određenih tekstualnih objašnjenja, formulisanju pojedinih primera, formatiranju dokumenta i crtanju slika korišćen je AI asistent Claude (Anthropic), pod potpunim autorskim i stručnim nadzorom.

Sadržaj

1 Idealno odabiranje **2**
1.1 Odabiranje povorkom Dirakovih impulsa . . . 2
1.2 Idealni A/D konvertor . . . 2
1.3 Realni A/D konvertor . . . 3

2 Spektar odabranog signala **4**
2.1 Spektar povorke Dirakovih impulsa . . . 4
2.2 Spektar odabranog signala . . . 6
2.3 Veza sa DTFT-om . . . 7
2.4 Spektar odabranog signala za različite korake odabiranja . . . 7

3 Teorema o odabiranju **9**
3.1 Preklapanje spektra . . . 9
3.2 Teorema o odabiranju . . . 10
3.3 Odabiranje signala ograničenog na opseg $[f_L, f_H]$: pododabiranje . . . 12

4 Odabiranje sinusoide **16**
4.1 Relativna učestanost . . . 16
4.2 Preklapanje sinusoida . . . 16

5 Izbor učestanosti odabiranja **17**

6 Rekonstrukcija signala **18**
6.1 Idealna rekonstrukcija . . . 18
6.2 Realna D/A konverzija: kolo zadrške nultog reda . . . 19
6.3 Sistem za digitalnu obradu analognih signala . . . 21

Literatura **22**

Ovaj materijal se bavi vezom između kontinualnih i diskretnih signala. Najpre ćemo matematički opisati odabiranje signala i izračunati spektar odabranog signala. Iz njega ćemo izvesti teoremu o odabiranju i objasniti pojavu preklapanja spektra. Zatim ćemo videti kako se kontinualni signal rekonstruiše iz odbiraka, kako izgledaju realni A/D i D/A konvertori i kako se digitalni sistem koristi za obradu analognog signala.

Podsetimo se, pri izvođenju Furijeove transformacije kontinualnih signala iz DTFT-a odabirali smo signal sa korakom T i puštali $T \to 0$. Sada je korak odabiranja konačan i fiksan. Označavaćemo ga sa T_s, a učestanost i kružnu učestanost odabiranja sa

$$f_s = \frac{1}{T_s}, \qquad \omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}. \tag{1}$$

1 Idealno odabiranje

1.1 Odabiranje povorkom Dirakovih impulsa

Posmatrajmo proizvoljan kontinualni signal $x(t)$ (slika 1). Odabiranje se matematički najlakše opisuje kao množenje signala povorkom Dirakovih impulsa (Dirakov češalj, engl. *Dirac comb*):

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s). \tag{2}$$

Dirakov impuls je matematička apstrakcija: impuls beskonačno kratkog trajanja i beskonačne amplitude, čija je površina jednaka jedinici. Takav signal nije moguće napraviti, ali je vrlo koristan za analizu.

Množenjem signala $x(t)$ povorkom impulsa dobija se odabrani signal

$$x_s(t) = x(t)\, s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\, \delta(t - nT_s). \tag{3}$$

Pošto je $x(t)\, \delta(t - t_0) = x(t_0)\, \delta(t - t_0)$ za svaku funkciju $x(t)$ neprekidnu u t_0, odabrani signal je

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\, \delta(t - nT_s), \tag{4}$$

dakle povorka Dirakovih impulsa čije su površine jednake vrednostima signala u trenucima odabiranja (slika 1).

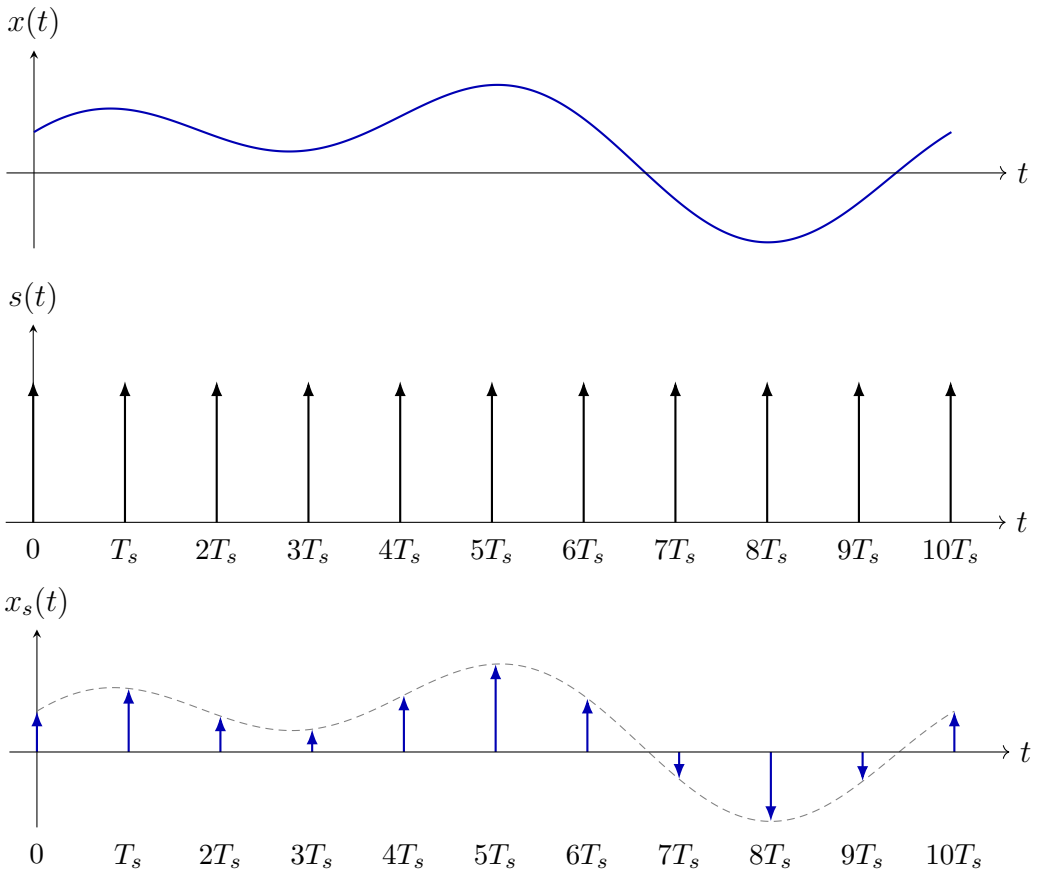
1.2 Idealni A/D konvertor

Signal $x_s(t)$ je i dalje kontinualan signal. Diskretni signal je niz brojeva

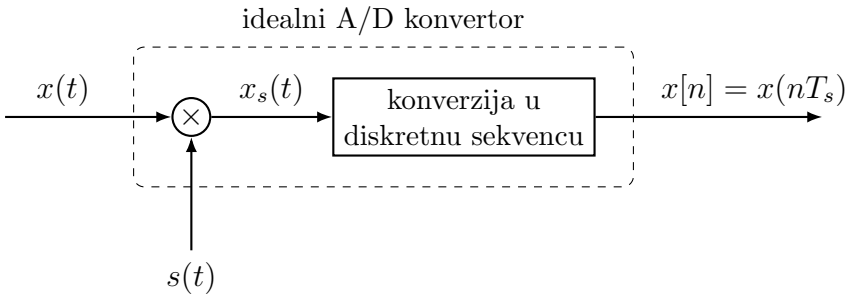
$$x[n] = x(nT_s), \tag{5}$$

pa je potrebno još samo impulse $x(nT_s)\, \delta(t - nT_s)$ pretvoriti u niz njihovih površina. Ovako opisan postupak predstavlja idealnu analogno-digitalnu (A/D) konverziju (slika 2).

Manjim korakom odabiranja dobija se više odbiraka za isto trajanje signala (slika 3). Primetimo da se A/D konverzijom gubi svaka informacija o vremenu: odbirci su samo



Slika 1. Kontinualni signal $x(t)$ (gore), povorka Dirakovih impulsa $s(t)$ (sredina) i odabrani signal $x_s(t)$ (dole). Visina strelice označava površinu impulsa.

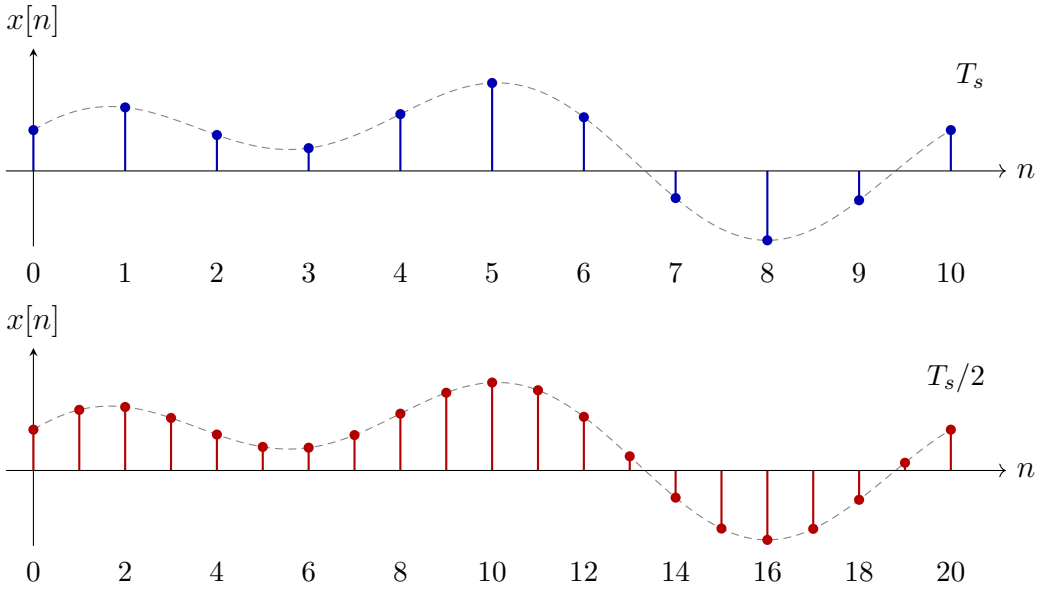


Slika 2. Idealni A/D konvertor.

brojevi poređani istim redom kao u analognom signalu, a redosled je određen indeksom n. Bez dodatne informacije o koraku odabiranja T_s ne znamo u kom trenutku je koji odbirak nastao.

1.3 Realni A/D konvertor

Pošto Dirakov impuls nije moguće napraviti, nije moguće napraviti ni idealni A/D konvertor. Uz to, nijedan digitalni sistem nema beskonačnu tačnost predstave brojeva: vrednost analognog signala može biti bilo koji realan broj, dok se digitalni signal



Slika 3. Diskretni signal $x[n]$ dobijen odabiranjem sa korakom T_s (gore) i sa dvostruko manjim korakom $T_s/2$ (dole). Isprekidano je, radi poređenja, prikazan kontinualni signal.

predstavlja konačnim brojem bita.

Realni A/D konvertor vrednost signala zato najpre neidealno odabere, a zatim je kvantizuje i kodira (slika 4). Odabiranje u praksi obično radi kolo za odabiranje i zadršku (engl. *sample and hold*, S/H). Najjednostavnije S/H kolo sastoji se od prekidača i kondenzatora. Zatvaranjem prekidača kolo ulazi u stanje odabiranja (engl. *sample*), u kome se kondenzator puni na napon sa ulaza. Ovo stanje treba da traje što kraće, da bi se što bolje oponašalo idealno odabiranje, ali dovoljno dugo da se kondenzator napuni preko otpornosti prekidača. Zato vremenska konstanta RC treba da bude što manja. Otvaranjem prekidača kolo ulazi u stanje zadrške (engl. *hold*), tokom koga blok za kvantizaciju i kodovanje pretvara napon kondenzatora u binarni kod. Arhitektura ovog bloka tema je predmeta iz digitalne elektronike, a o uticaju kvantizacije na signale biće reči kasnije u ovom kursu.

2 Spektar odabranog signala

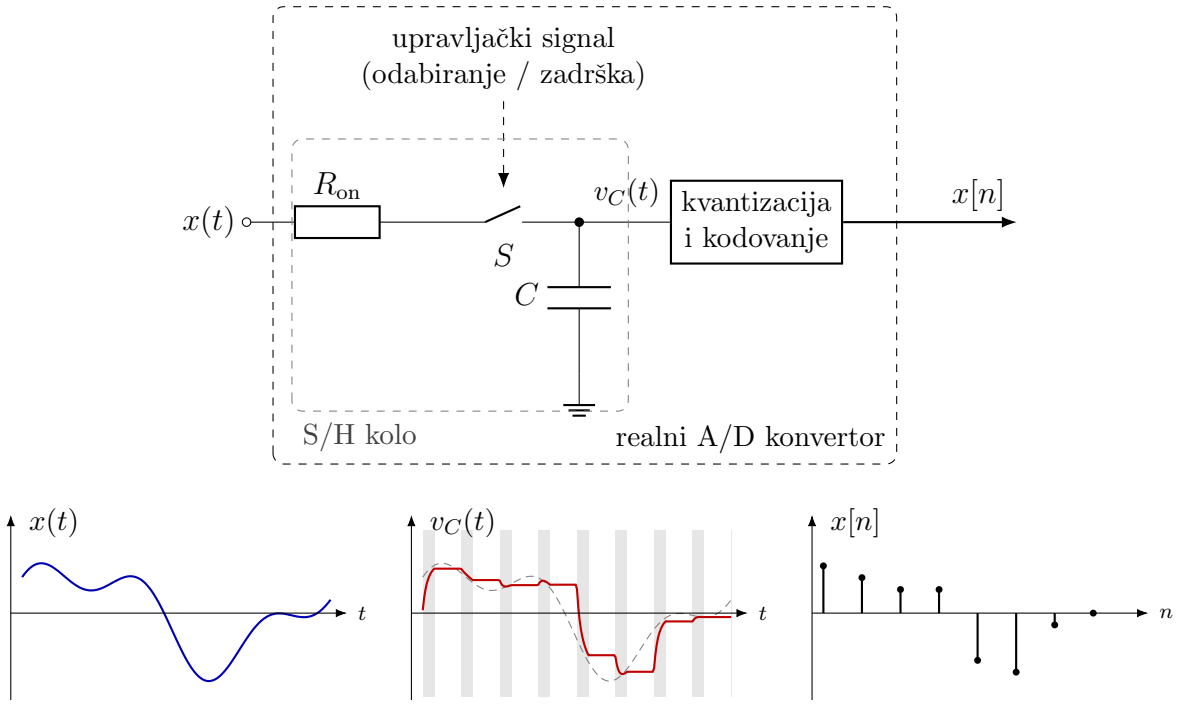
2.1 Spektar povorke Dirakovih impulsa

Odabrani signal je proizvod $x_s(t) = x(t)\, s(t)$, pa je, prema svojstvu množenja Furijeove transformacije,

$$X_s(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{2\pi}\, X(\mathrm{j}\omega) * S(\mathrm{j}\omega). \tag{6}$$

Spektar $X(\mathrm{j}\omega)$ smatramo poznatim, pa ostaje da izračunamo spektar povorke impulsa. Povorka $s(t)$ je periodična sa periodom T_s, pa se može razviti u Furijeov red sa osnovnom kružnom učestanošću ω_s:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_s t},$$



Slika 4. Realni A/D konvertor. Kolo za odabiranje i zadršku (S/H) sastoji se od prekidača S, čija je otpornost u zatvorenom stanju R_{on}, i kondenzatora C. Dok je prekidač zatvoren, kondenzator se puni na napon ulaza (odabiranje), a kada se prekidač otvori, napon v_C ostaje konstantan (zadrška) dok ga blok za kvantizaciju i kodovanje ne pretvori u broj. Ispod su prikazani talasni oblici: ulazni signal $x(t)$, napon kondenzatora $v_C(t)$ (sivo su označeni intervali odabiranja, a isprekidano ulazni signal) i kvantizovani odbirci $x[n]$.

gde su koeficijenti

$$c_k = \frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{T_s/2} s(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_s t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_s t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T_s}.$$

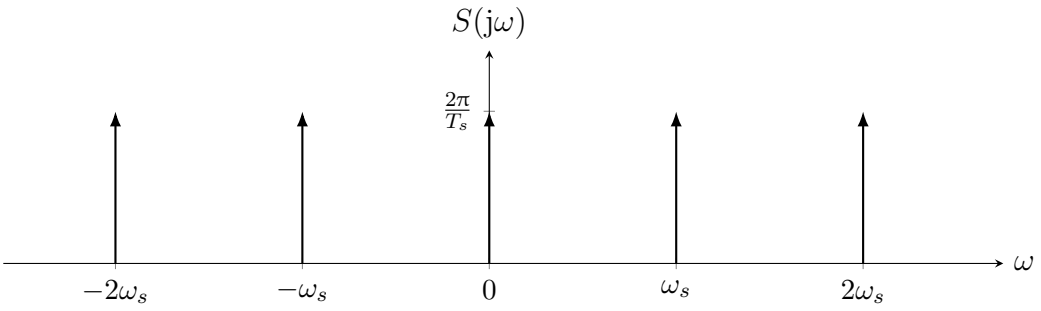
Na intervalu $[-T_s/2, T_s/2]$ nalazi se samo impuls u $t = 0$, a u poslednjem koraku smo iskoristili osobinu izdvajanja Dirakove funkcije. Dakle,

$$s(t) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_s t} = \frac{1}{T_s}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\cos(k\omega_s t)\right). \tag{7}$$

Ovaj red ne konvergira u klasičnom smislu, već u smislu distribucija, kao i suma $\sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}$ u materijalu o Furijeovoj analizi: parcijalne sume se sve više koncentrišu oko trenutaka nT_s.

Koristeći Furijeove parove $1 \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} 2\pi\,\delta(\omega)$ i $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} \overset{\text{FT}}{\longleftrightarrow} 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$, dobijamo da je spektar povorke impulsa takođe povorka impulsa, sada u frekvencijskom domenu (slika 5):

$$S(\mathrm{j}\omega) = \frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s). \tag{8}$$



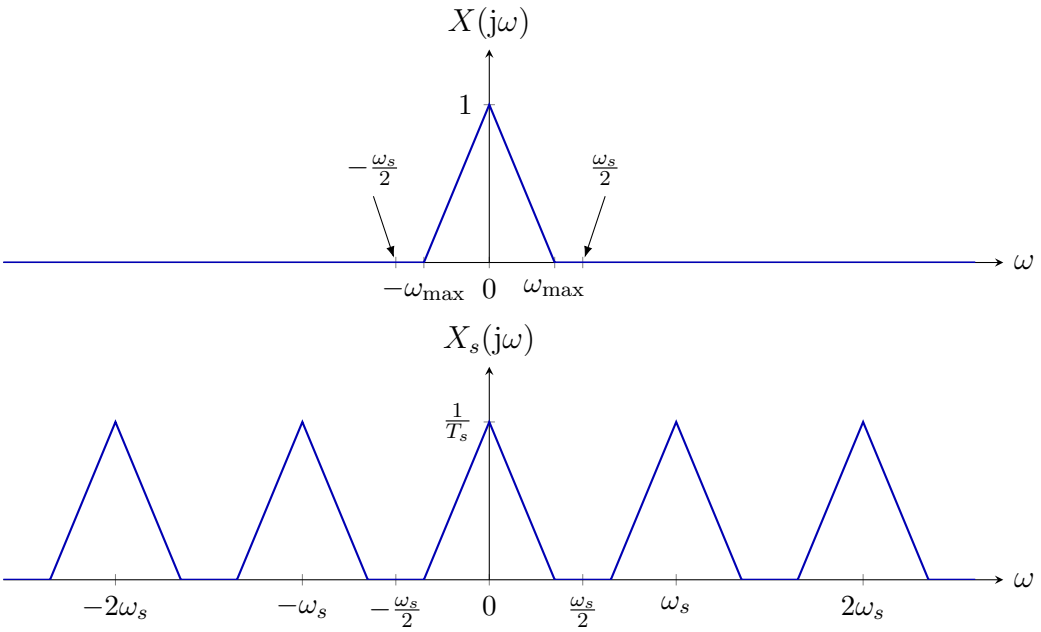
Slika 5. Spektar povorke Dirakovih impulsa: povorka impulsa površine $2\pi/T_s$ na učestanostima $k\omega_s$.

2.2 Spektar odabranog signala

Zamenom (8) u (6) dobijamo

$$\begin{aligned} X_s(\mathrm{j}\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X\big(\mathrm{j}(\omega-u)\big)\,\frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(u-k\omega_s)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X\big(\mathrm{j}(\omega-u)\big)\,\delta(u-k\omega_s)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\big(\mathrm{j}(\omega-k\omega_s)\big), \end{aligned} \tag{9}$$

gde smo u poslednjem koraku ponovo iskoristili osobinu izdvajanja Dirakove funkcije. Spektar odabranog signala je zbir beskonačno mnogo kopija spektra originalnog signala, pomerenih za celobrojne umnoške kružne učestanosti odabiranja ω_s i skaliranih faktorom $1/T_s$ (slika 6).



Slika 6. Spektar frekvencijski ograničenog signala, $X(\mathrm{j}\omega) = 0$ za $|\omega| > \omega_{\max}$ (gore), i spektar odabranog signala $X_s(\mathrm{j}\omega)$ za $\omega_s > 2\omega_{\max}$ (dole). Kopije spektra se ne preklapaju.

2.3 Veza sa DTFT-om

Spektar $X_s(\mathrm{j}\omega)$ možemo izračunati i direktno iz izraza (4). Pošto je $\delta(t-nT_s) \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega nT_s}$, dobijamo

$$X_s(\mathrm{j}\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega nT_s} = X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_s}\big)\,, \tag{10}$$

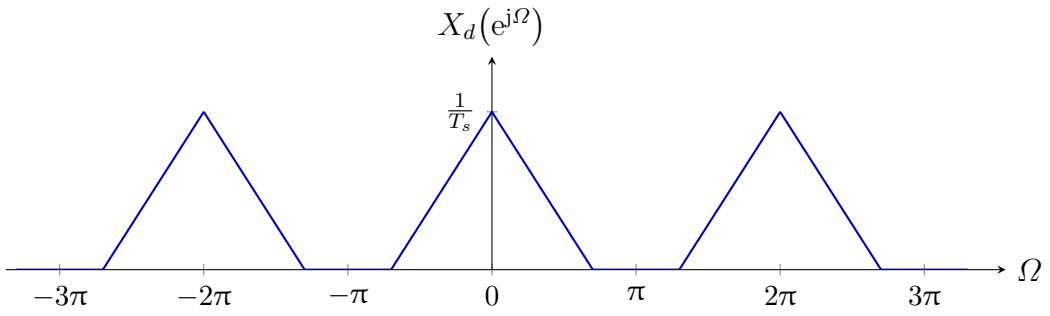
gde je $X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\big) = \sum_n x[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}$ DTFT niza odbiraka. Spektar odabranog signala je, dakle, DTFT niza odbiraka, u kome je digitalna učestanost zamenjena sa $\Omega = \omega T_s$. Izjednačavanjem (9) i (10) dobijamo jednu od najvažnijih relacija u digitalnoj obradi signala:

$$\boxed{T_s\, X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_s}\big) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\big(\mathrm{j}(\omega - k\omega_s)\big).} \tag{11}$$

Ova relacija (u matematici poznata kao Poasonova formula sumiranja) povezuje spektar diskretnog signala sa spektrom kontinualnog signala iz koga je nastao. Na digitalnoj osi ona glasi

$$X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\big) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\mathrm{j}\,\frac{\Omega - 2k\pi}{T_s}\right), \tag{12}$$

pa je periodična sa periodom 2π (slika 7). Digitalna učestanost $\Omega = \pi$ odgovara analognoj učestanosti $\omega = \omega_s/2$, što je važan zaključak: u digitalnoj obradi signala računamo samo DTFT diskretnog signala, a iz digitalne učestanosti lako određujemo kojoj analognoj učestanosti odgovara neka spektralna komponenta, $\omega = \Omega/T_s$, odnosno $f = Ff_s$, gde je $F = \Omega/(2\pi)$ relativna učestanost.



Slika 7. DTFT niza odbiraka $X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\big)$ za isti signal kao na slici 6. Perioda je 2π, a učestanost $\Omega = \pi$ odgovara analognoj učestanosti $\omega_s/2$.

2.4 Spektar odabranog signala za različite korake odabiranja

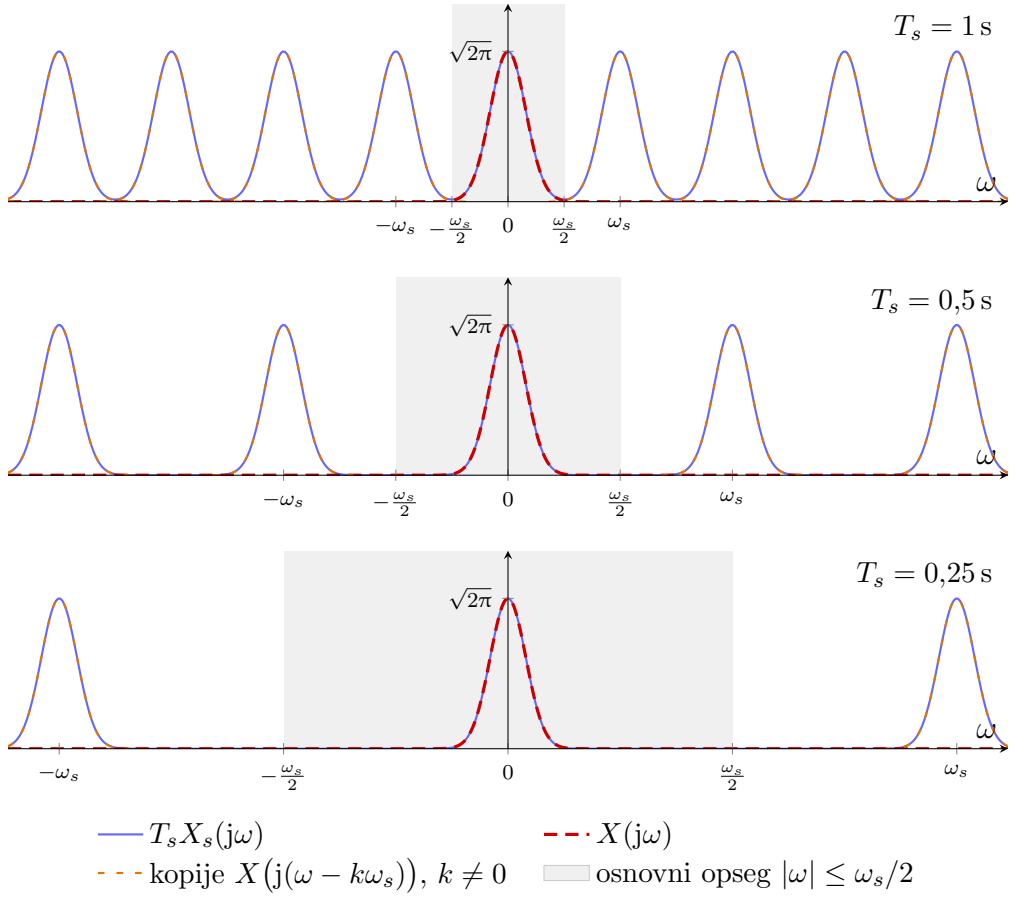
Relacija (11) pokazuje kako izgleda spektar odabranog signala za bilo koji korak odabiranja T_s. Posmatrajmo signal $x(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$, čiji je spektar $X(\mathrm{j}\omega) = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\omega^2/2}$. Ovaj signal nije frekvencijski ograničen, ali njegov spektar vrlo brzo opada.

Prema (11), funkcija $T_s X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_s}\big)$ je zbir kopija spektra $X(\mathrm{j}\omega)$ pomerenih za umnoške $\omega_s = 2\pi/T_s$. Kopija za $k = 0$ ne zavisi od T_s. To je spektar signala $x(t)$, izražen u rad/s,

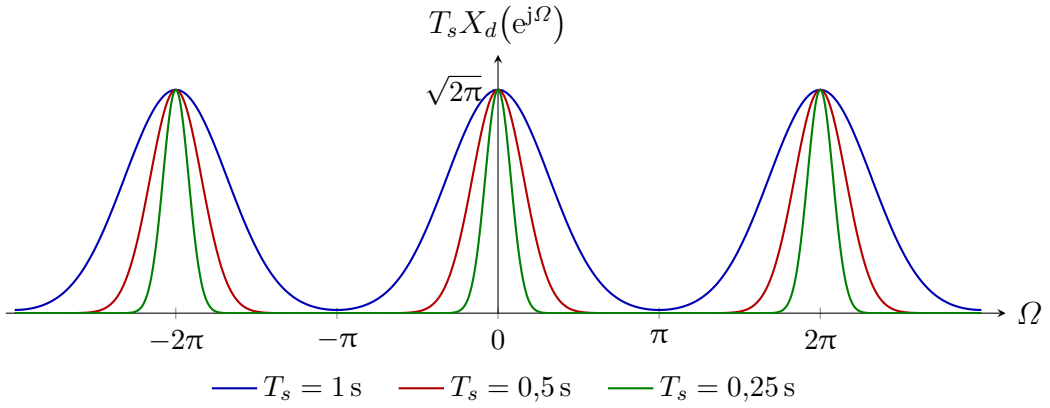
i on je osobina signala, a ne načina na koji ga odabiramo. Od T_s zavisi samo razmak između kopija. Kada T_s smanjujemo, ω_s raste i kopije se razmiču. Na slici 8 je prikazan slučaj za nekoliko perioda odabiranja: $T_s = 1\,\mathrm{s}$, $T_s = 0{,}5\,\mathrm{s}$ i $T_s = 0{,}25\,\mathrm{s}$. Vidi se da se razmak između kopija povećava sa smanjenjem periode odabiranja. U osnovnom opsegu $|\omega| \leq \omega_s/2$ ostaje praktično samo $X(\mathrm{j}\omega)$.

U limesu kada $T_s \to 0$ osnovni opseg obuhvata celu realnu osu, kopije odlaze u beskonačnost i ostaje jedna, neperiodična funkcija $X(\mathrm{j}\omega)$. To je upravo granični prelaz koji smo koristili pri izvođenju Furijeove transformacije kontinualnih signala. Tada smo znali samo da je funkcija $T\,X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}\big)$ periodična i da u osnovnom opsegu teži ka $X(\mathrm{j}\omega)$, a relacija (11) daje i njen tačan oblik za konačan korak.

Ako iste spektre nacrtamo u zavisnosti od digitalne učestanosti $\Omega = \omega T_s$ (slika 9), slika je obrnuta. Perioda je uvek 2π, ali se oblik spektra sužava oko $\Omega = 0$, jer se sadržaj signala sa analogne učestanosti ω nalazi na digitalnoj učestanosti $\Omega = \omega T_s$, koja se smanjuje kada se T_s smanjuje.



Slika 8. Spektar odabranog signala $T_s X_s(\mathrm{j}\omega) = T_s X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_s}\big)$ za $x(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$ i $T_s = 1\,\mathrm{s}$, $0{,}5\,\mathrm{s}$ i $0{,}25\,\mathrm{s}$. Kopije spektra (narandžasto isprekidano) razmiču se sa smanjenjem T_s, a u osnovnom opsegu (sivo polje) ostaje praktično samo $X(\mathrm{j}\omega)$.



Slika 9. Isti spektri kao na slici 8, nacrtani u zavisnosti od digitalne učestanosti $\Omega = \omega T_s$. Perioda je uvek 2π, a oblik spektra se sa smanjenjem T_s sužava oko $\Omega = 0$, jer isti analogni sadržaj na učestanosti ω odgovara sve manjoj digitalnoj učestanosti $\Omega = \omega T_s$.

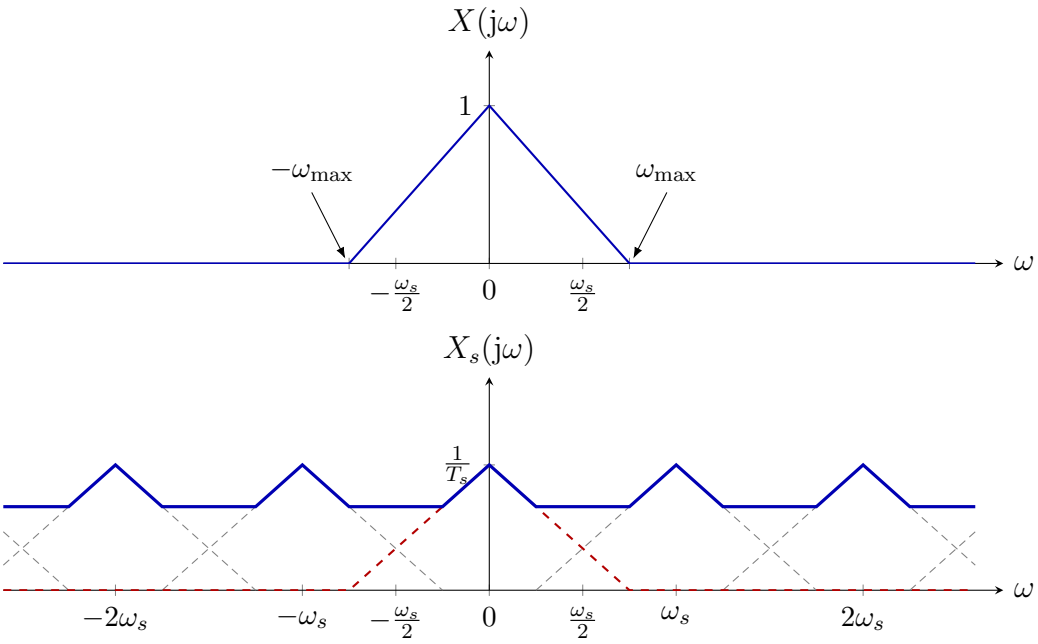
3 Teorema o odabiranju

3.1 Preklapanje spektra

Na slici 6 spektar je bio ograničen, $X(\mathrm{j}\omega) = 0$ za $|\omega| > \omega_{\max}$, i važilo je $\omega_s > 2\omega_{\max}$. Zato se kopije spektra u $X_s(\mathrm{j}\omega)$ nisu preklapale, pa se originalni spektar nalazi neizmenjen u osnovnom opsegu $|\omega| < \omega_s/2$. Iz njega se, kao što ćemo videti, može izdvojiti idealnim filtrom propusnikom niskih učestanosti, pa odabiranjem nije izgubljena nikakva informacija.

Nije, međutim, dovoljno samo da je spektar ograničen. Ako je $\omega_s < 2\omega_{\max}$, kopije se preklapaju (slika 10), i u osnovnom opsegu više se ne nalazi originalni spektar, već njegov zbir sa repovima susednih kopija. Ova pojava se naziva preklapanje spektra (engl. *aliasing*). Iz ovakvog odabranog signala originalni signal više nije moguće rekonstruisati, čak ni idealnim filtrom.

Kod signala koji nisu frekvencijski ograničeni, kao što je Gausov signal iz odeljka 2.4, kopije se preklapaju za svaki korak odabiranja. Kada je T_s malo, kopije su daleko i preklapanje je zanemarljivo (slika 8). Kada T_s povećavamo, kopije se približavaju, a njihovi repovi ulaze u osnovni opseg i sabiraju se sa $X(\mathrm{j}\omega)$ (slika 11). Tada se $T_s X_d\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_s}\right)$ ni u osnovnom opsegu više ne poklapa sa $X(\mathrm{j}\omega)$, a preklapanje spektra postaje izraženo.



Slika 10. Spektar signala za koji je $\omega_{\max} > \omega_s/2$ (gore) i spektar odabranog signala (dole). Kopije (sivo isprekidano) se preklapaju, pa se zbir (plavo) u osnovnom opsegu razlikuje od originalnog spektra (crveno isprekidano).

3.2 Teorema o odabiranju

Teorema 3.1 (Teorema o odabiranju)**.** Neka je kontinualni signal $x(t)$ frekvencijski ograničen, tj. $X(\mathrm{j}\omega) = 0$ za $|\omega| > \omega_{\max}$. Signal $x(t)$ se može u potpunosti rekonstruisati iz svojih odbiraka $x(nT_s)$ ako je

$$\omega_s > 2\,\omega_{\max}, \qquad \text{odnosno} \qquad f_s > 2f_{\max}. \tag{13}$$

Granična vrednost $2f_{\max}$ naziva se Nikvistova brzina odabiranja (engl. *Nyquist rate*), a polovina učestanosti odabiranja, $f_s/2$, Nikvistova učestanost (engl. *Nyquist frequency*). Pri datoj učestanosti odabiranja ispravno se predstavljaju samo komponente čije su učestanosti manje od $f_s/2$. Nejednakost u (13) mora biti stroga. Na primer, sinusoida $\sin(\omega_s t/2)$, odabrana sa korakom T_s, daje odbirke $\sin(\pi n) = 0$ za svako n, pa se iz odbiraka ne može razlikovati od nultog signala. Teorema se može formulisati i na druge načine. Pregled njene istorije, sa doprinosima Vitakera, Koteljnikova, Nikvista i Šenona, dat je u [Lük99], a savremeni pregled različitih formulacija i uopštenja u [Uns00].

Greška Rimanove sume

Pri izvođenju Furijeove transformacije kontinualnih signala koristili smo to što je $T_s \sum_n x(nT_s)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega nT_s}$ Rimanova suma integrala Furijeove transformacije, pa za $T_s \to 0$ teži $X(\mathrm{j}\omega)$. Odabiranje možemo posmatrati i iz tog ugla. Ako je korak T_s konačan, Rimanova suma se razlikuje od integrala, a ta razlika je posledica preklapanja spektra.
Iz relacije (11) se može dobiti tačan izraz za grešku Rimanove sume za konačan

korak:

$$\underbrace{T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n T_s}}_{\text{Rimanova suma}} - \underbrace{X(\mathrm{j}\omega)}_{\text{integral}} = \underbrace{T_s\, X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_s}\big)}_{\text{po definiciji DTFT-a}} - X(\mathrm{j}\omega) \overset{(11)}{=} \sum_{k\neq 0} X\big(\mathrm{j}(\omega - k\omega_s)\big). \tag{14}$$

Greška Rimanove sume je, dakle, tačno jednaka doprinosu svih kopija spektra osim centralne. Ona je mala kada su kopije daleko, tj. kada je T_s malo, a jednaka je nuli u osnovnom opsegu $|\omega| < \omega_s/2$ ako je signal frekvencijski ograničen i važi $\omega_s > 2\omega_{\max}$. Za takve signale Rimanova suma je u osnovnom opsegu tačna već za konačan korak, što je upravo sadržaj teoreme o odabiranju.

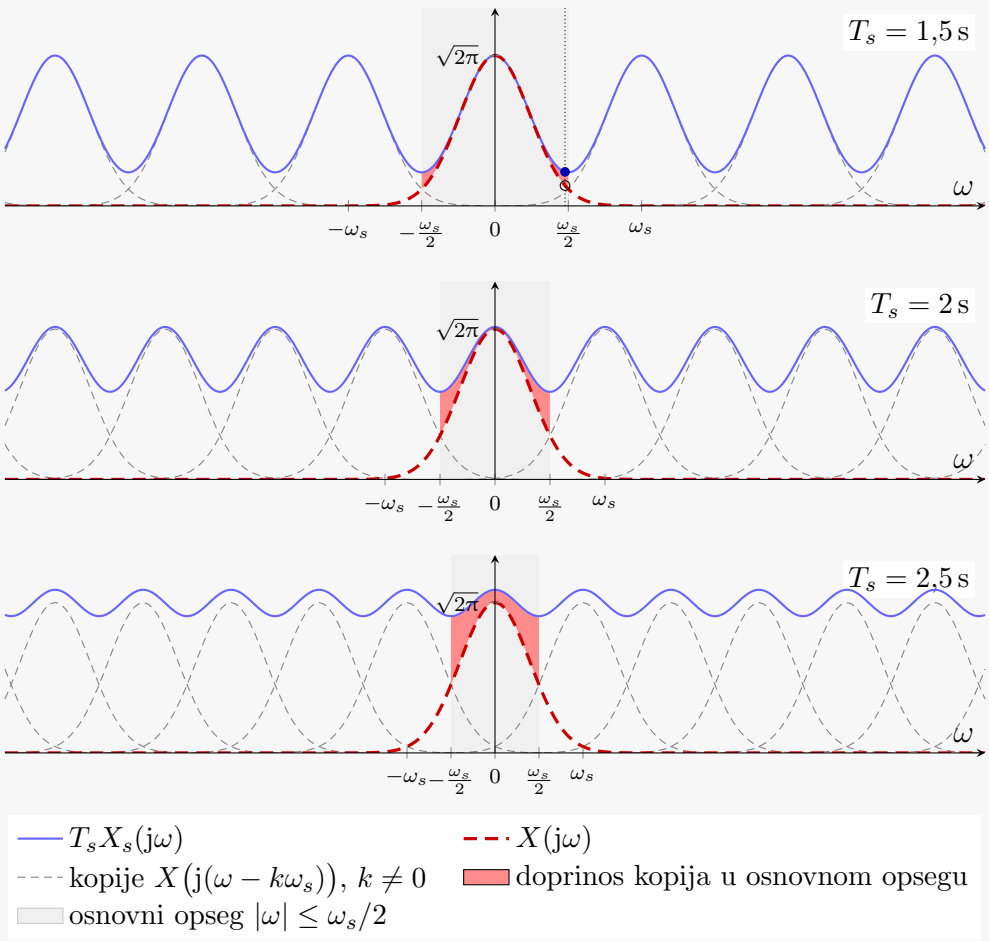
Brojevni primer

Za Gausov signal sa slika 8 i 11, u tabeli 1 upoređene su greška Rimanove sume u tački $\omega = 2\,\mathrm{rad/s}$, izračunata direktno iz odbiraka, i zbir doprinosa kopija sa desne strane izraza (14). Vrednosti se poklapaju.

T_s [s]	$\omega_s = 2\pi/T_s$ [rad/s]	$T_s\, X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2T_s}\big)$	greška Rimanove sume	$\sum_{k\neq 0} X\big(\mathrm{j}(2 - k\omega_s)\big)$
1,5	4,189	0,56768	$2{,}3 \cdot 10^{-1}$	$2{,}3 \cdot 10^{-1}$
1	6,283	0,33950	$2{,}6 \cdot 10^{-4}$	$2{,}6 \cdot 10^{-4}$
0,5	12,566	0,33924	$< 10^{-15}$	$< 10^{-15}$

Tabela 1. Greška Rimanove sume u $\omega = 2\,\mathrm{rad/s}$ za $x(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$, uz tačnu vrednost $X(\mathrm{j}2) = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}33924$.

Za $T_s = 1{,}5\,\mathrm{s}$ je $\omega_s = 2\pi/(1{,}5\,\mathrm{s}) \approx 4{,}19\,\mathrm{rad/s}$, pa je kopija centrirana u ω_s od tačke $\omega = 2\,\mathrm{rad/s}$ udaljena samo oko $2{,}19\,\mathrm{rad/s}$ i značajno joj doprinosi. Sa smanjenjem T_s kopije se udaljavaju, a greška naglo opada (slika 8). Sa povećanjem T_s kopije se približavaju i preklapaju sa centralnom kopijom (slika 11).



Slika 11. Spektar odabranog signala $T_s X_s(\mathrm{j}\omega) = T_s X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_s}\big)$ za Gausov signal sa slike 8 i veće korake odabiranja, $T_s = 1{,}5\,\mathrm{s}$, $2\,\mathrm{s}$ i $2{,}5\,\mathrm{s}$. Kopije se približavaju, a njihovi repovi ulaze u osnovni opseg. Crveno je osenčen njihov doprinos, koji je prema (14) upravo greška Rimanove sume. Na prvom panelu tačkasta linija označava učestanost $\omega = 2\,\mathrm{rad/s}$ iz tabele 1: pun kružić je Rimanova suma $T_s X_s(\mathrm{j}2)$, a prazan tačna vrednost integrala $X(\mathrm{j}2)$.

3.3 Odabiranje signala ograničenog na opseg $[f_L, f_H]$: pododabiranje

Teorema o odabiranju u obliku (13) pretpostavlja da spektar signala zauzima opseg od nule do $f_{\max}$. Spektar mnogih signala u telekomunikacijama i merenjima je, međutim, ograničen na opseg od f_L do f_H, gde je $f_L > 0$ (engl. *bandpass signal*). Širinu tog opsega označićemo sa $B = f_H - f_L$. Uslov $f_s > 2f_H$ je za takve signale dovoljan, ali nije potreban. Prema (9), spektar odabranog signala je zbir kopija spektra pomerenih za umnoške f_s, a odbirci čuvaju svu informaciju o signalu sve dok se te kopije ne preklapaju. Pošto je opseg ispod f_L prazan, kopije mogu da stanu i u njega, pa je moguće odabirati i učestanošću manjom od $2f_H$. Takvo odabiranje naziva se pododabiranje (engl. *undersampling*, *bandpass sampling*).

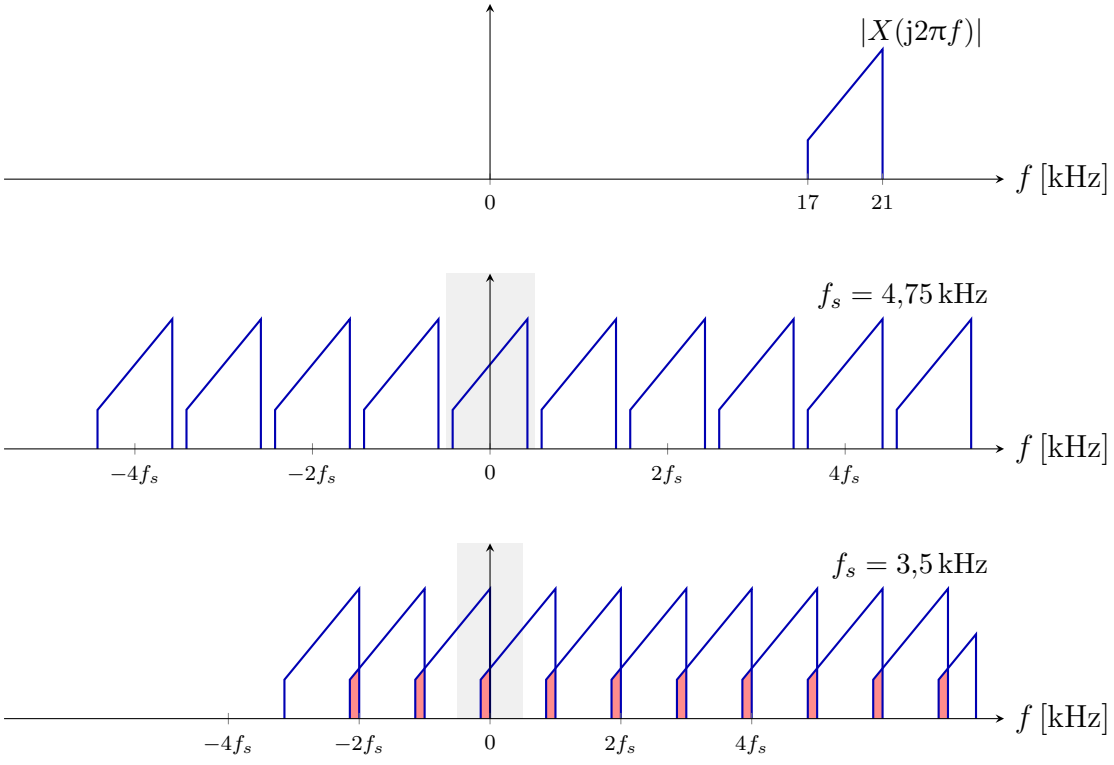
Kompleksan signal

Počnimo od jednostavnijeg slučaja. Neka je signal kompleksan i neka mu je spektar različit od nule samo za $f_L \leq f \leq f_H$, tj. samo na pozitivnim učestanostima. Takvi signali se u praksi dobijaju kao par realnih signala, tzv. komponente u fazi i kvadraturi (I i Q), na primer u radio-prijemnicima. Kopija spektra pomerena za kf_s zauzima opseg $[f_L - kf_s,\ f_H - kf_s]$ širine B, a susedne kopije su razmaknute za f_s. One se, dakle, ne preklapaju ako i samo ako je

$$\boxed{f_s > B,} \tag{15}$$

bez obzira na to gde se opseg nalazi. Nejednakost je stroga iz istog razloga kao u teoremi o odabiranju: za $f_s = B$ kompleksne sinusoide na učestanostima f_L i f_H imaju iste odbirke, jer je $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_H n T_s} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_L n T_s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_L n T_s}$.

Uslov (15) govori samo o tome da se kopije ne preklapaju. Gde će se spektar naći u osnovnom opsegu $|f| < f_s/2$ zavisi od izbora f_s. Najpogodnije je da centralna učestanost opsega $f_c = (f_L + f_H)/2$ bude umnožak f_s, jer tada jedna kopija pada tačno oko nule (slika 12). Za druge vrednosti f_s ceo spektar je i dalje sadržan u osnovnom opsegu, ali može biti podeljen na dva dela, jedan uz $-f_s/2$, a drugi uz $f_s/2$. Pododabiranje, dakle, istovremeno odabira signal i spušta ga na nižu učestanost, što je u analognoj tehnici zadatak mešača.

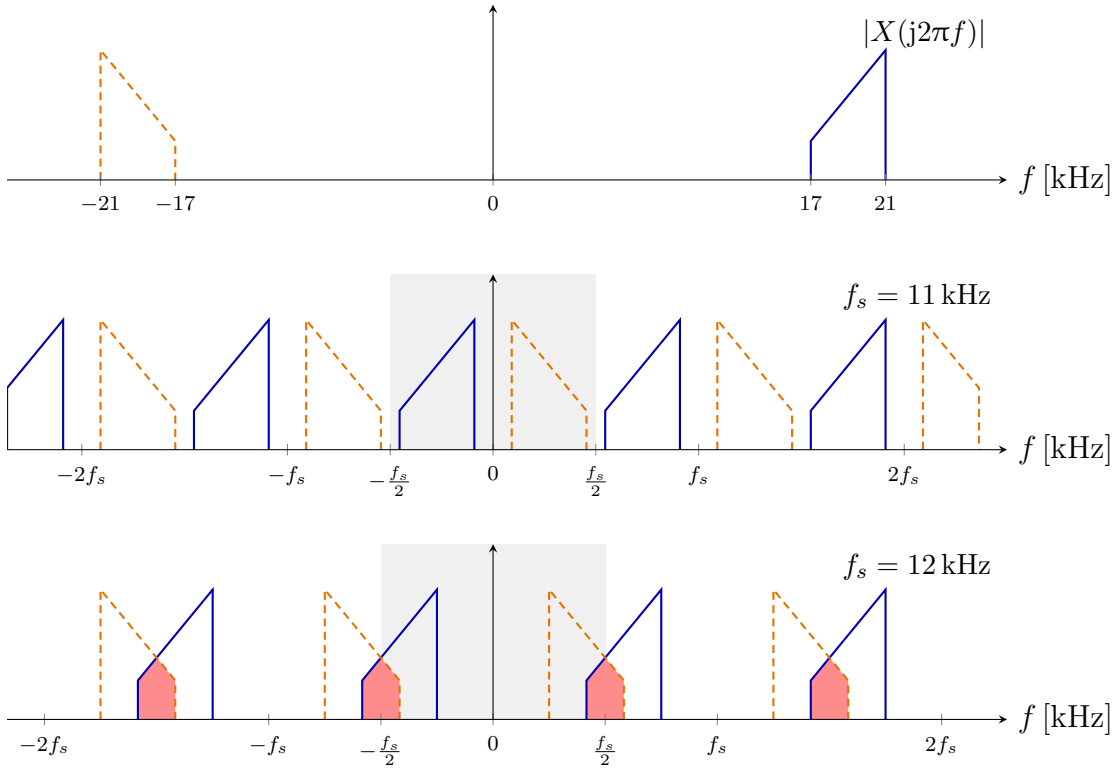


Slika 12. Pododabiranje kompleksnog signala čiji je spektar različit od nule samo za $17\,\mathrm{kHz} \leq f \leq 21\,\mathrm{kHz}$ ($B = 4\,\mathrm{kHz}$). Gore: modul spektra. Sredina: za $f_s = 4{,}75\,\mathrm{kHz} > B$ kopije se ne preklapaju, a pošto je centralna učestanost 19 kHz umnožak f_s, jedna kopija pada tačno u osnovni opseg (sivo). Dole: za $f_s = 3{,}5\,\mathrm{kHz} < B$ susedne kopije se preklapaju (crveno).

Realan signal

Napon na ulazu A/D konvertora je, međutim, realan signal, a spektar realnog signala je konjugovano simetričan: uz opseg $[f_L, f_H]$ uvek postoji i opseg $[-f_H, -f_L]$. Kopije pozitivnog dela spektra se i dalje međusobno ne preklapaju za $f_s > B$, ali sada mogu da se preklope sa kopijama negativnog dela. Zbog toga uslov (15) više nije dovoljan.

Pogledajmo najpre primer na slici 13. Signal zauzima isti opseg kao ranije, od $f_L = 17\,\mathrm{kHz}$ do $f_H = 21\,\mathrm{kHz}$, ali je sada realan, pa spektar ima komponente i na negativnim učestanostima (narandžasto). Za $f_s = 11\,\mathrm{kHz}$ kopije pozitivnog i negativnog dela se smenjuju i ne preklapaju, pa se signal može rekonstruisati, iako je f_s skoro četiri puta manja od $2f_H$. Za $f_s = 12\,\mathrm{kHz}$ kopije negativnog dela upadaju u kopije pozitivnog, iako je učestanost odabiranja veća. Za razliku od niskofrekvencijskog signala, veća učestanost odabiranja, dakle, nije uvek bolja.



Slika 13. Pododabiranje realnog signala čiji spektar zauzima opseg od $f_L = 17\,\mathrm{kHz}$ do $f_H = 21\,\mathrm{kHz}$ ($B = 4\,\mathrm{kHz}$). Gore: modul spektra; pozitivni deo spektra je plav, a negativni narandžast i isprekidan. Sredina: za $f_s = 11\,\mathrm{kHz}$ kopije se ne preklapaju, a u osnovnom opsegu (sivo) nalazi se kopija negativnog dela spektra, pa je spektar obrnut po učestanosti. Dole: za $f_s = 12\,\mathrm{kHz}$ kopije pozitivnog i negativnog dela spektra se preklapaju (crveno), iako je $f_s > 2B$.

Sa slike se vidi i šta je potrebno da se kopije ne preklapaju: pozitivni deo spektra, $[f_L, f_H]$, mora da stane u razmak između dve susedne kopije negativnog dela. Slično, negativni deo spektra, $[-f_H, -f_L]$, mora da stane između dve susedne kopije pozitivnog dela. Pošto je spektar simetričan, dovoljno je proveriti samo jedan od gorenavedena dva uslova. Kopije negativnog dela zauzimaju opsege $[mf_s - f_H,\ mf_s - f_L]$, gde je m ceo broj. Neka pozitivni deo leži između $(n-1)$-ve i n-te kopije. Tada desna ivica $(n-1)$-ve

kopije mora biti levo od f_L, a leva ivica n-te kopije desno od f_H:

$$(n-1)f_s - f_L < f_L, \qquad nf_s - f_H > f_H.$$

Odatle sledi uslov

$$\boxed{\frac{2f_H}{n} < f_s < \frac{2f_L}{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad n < \frac{f_H}{B}.} \tag{16}$$

Za $n = 1$ gornje granice nema i dobijamo poznati uslov $f_s > 2f_H$. Svako veće n daje novi, niži interval dozvoljenih učestanosti odabiranja. Takav interval postoji samo ako je njegova donja granica manja od gornje, $2f_H/n < 2f_L/(n-1)$, što je ekvivalentno uslovu $n < f_H/B$. Nejednakosti su stroge iz istog razloga kao u teoremi o odabiranju: na granicama intervala ivica opsega dodiruje kopiju svoje slike u ogledalu, pa bi sinusoida na učestanosti f_L ili f_H izgubila deo informacije.

Za signal sa slike je $f_H/B = 5{,}25$, pa je $n = 1, \ldots, 5$, a dozvoljeni intervali su $f_s > 42\,\mathrm{kHz}$ ($n = 1$), $21\,\mathrm{kHz} < f_s < 34\,\mathrm{kHz}$ ($n = 2$), $14\,\mathrm{kHz} < f_s < 17\,\mathrm{kHz}$ ($n = 3$), $10{,}5\,\mathrm{kHz} < f_s < 11{,}33\,\mathrm{kHz}$ ($n = 4$) i $8{,}4\,\mathrm{kHz} < f_s < 8{,}5\,\mathrm{kHz}$ ($n = 5$). Vrednost $f_s = 11\,\mathrm{kHz}$ je u intervalu za $n = 4$, a $f_s = 12\,\mathrm{kHz}$ je u zabranjenom intervalu između intervala za $n = 3$ i $n = 4$.

Najmanja učestanost odabiranja dobija se za najveće dozvoljeno n i proizvoljno je blizu $2f_H/n$. Pošto je $n < f_H/B$, ona je uvek veća od $2B$, a približava se vrednosti $2B$ kada je širina opsega mala u odnosu na f_H. Dakle, za signal opsega $[f_L, f_H]$ najmanja učestanost odabiranja određena je širinom opsega, a ne najvećom učestanošću u signalu. Ako je $f_H \leq 2B$, dozvoljeno je samo $n = 1$, pa pododabiranje nije moguće i ostaje uslov $f_s > 2f_H$.

I kod realnog signala se u osnovnom opsegu $[0, f_s/2]$ pojavljuje kopija opsega $[f_L, f_H]$, spuštena ka nuli. Ako je n neparan, to je kopija pozitivnog dela spektra i redosled učestanosti je očuvan. Ako je n paran, kao na slici 13, to je kopija negativnog dela: učestanost f preslikava se u $mf_s - f$, pa je spektar obrnut, tj. komponenta na f_H pada najniže, a ona na f_L najviše. Obrtanje se lako ispravlja u digitalnom domenu, naizmeničnom promenom znaka odbiraka, tj. množenjem sa $1, -1, 1, -1, \ldots$. To je zapravo množenje kompleksnom sinusoidom $(-1)^k = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi k}$, gde je k redni broj odbirka, pa se spektar pomera za $\Omega = \pi$, odnosno za $f_s/2$. Zbog simetrije spektra realnog signala, učestanost f' u osnovnom opsegu tada prelazi u $f_s/2 - f'$, tj. spektar se preslikava u ogledalu oko $f_s/4$.

Ovo je i razlog što se u prijemnicima često koristi kvadraturno odabiranje, sa I i Q granom: za kompleksan signal važi jednostavan uslov (15), bez zabranjenih intervala i bez obrtanja spektra.

Pododabiranje ima i svoju cenu. Što je n veće, to su dozvoljeni intervali uži, pa učestanost odabiranja i granice opsega signala moraju biti stabilne, a u praksi se ostavlja i zaštitni razmak. Filtar za sprečavanje preklapanja spektra mora biti propusnik opsega $[f_L, f_H]$, a ne propusnik niskih učestanosti, jer bi se inače šum i smetnje sa svih ostalih opsega širine $f_s/2$ preklopili u korisni opseg. Konačno, kolo za odabiranje i zadršku mora da radi sa signalom učestanosti do f_H, a ne do $f_s/2$, pa su zahtevi za njegov propusni opseg i za tačnost trenutaka odabiranja određeni sa f_H.

4 Odabiranje sinusoide

4.1 Relativna učestanost

Odabiranjem sinusoide

$$x(t) = A\cos(2\pi f t + \varphi) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

dobija se diskretna sinusoida

$$\begin{aligned} x[n] = x(nT_s) &= A\cos\left(2\pi\frac{f}{f_s}n + \varphi\right) \\ &= A\cos(2\pi F n + \varphi) = A\cos(\Omega n + \varphi). \end{aligned} \tag{17}$$

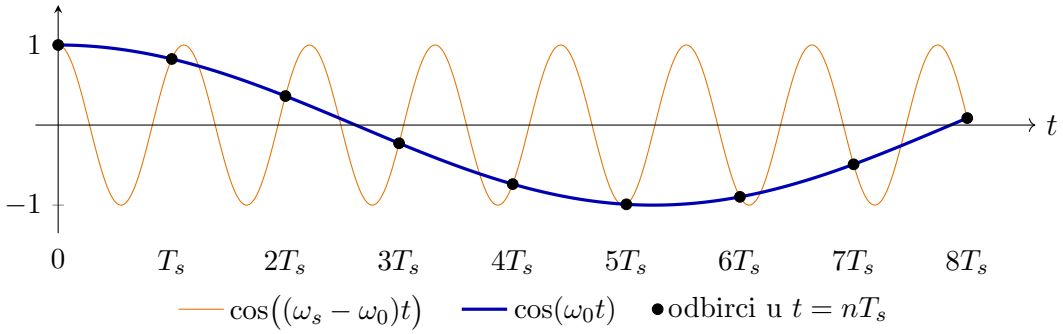
Promenljivu $F = f/f_s$ nazivamo relativnom učestanošću, jer predstavlja odnos učestanosti kontinualnog signala i učestanosti odabiranja, a $\Omega = 2\pi F = \omega T_s$ relativnom kružnom učestanošću.

4.2 Preklapanje sinusoida

Ako se učestanost sinusoide postepeno povećava, a učestanost odabiranja drži fiksnom, učestanost diskretne sinusoide raste samo dok je $f < f_s/2$. Kada učestanost pređe $f_s/2$, učestanost diskretne sinusoide počinje da opada, zatim ponovo raste, i tako redom. Razlog je to što odbirci ne mogu da razlikuju sinusoide čije se učestanosti razlikuju za umnožak ω_s. Za kompleksnu sinusoidu važi

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega + k\omega_s)nT_s} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega nT_s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2k\pi n} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega nT_s}, \tag{18}$$

a za realnu sinusoidu još i $\cos\big((\omega_s - \omega)nT_s\big) = \cos(2\pi n - \omega nT_s) = \cos(\omega nT_s)$. Sinusoida učestanosti ω iz intervala $\omega_s/2 < \omega < \omega_s$ zato ima iste odbirke kao sinusoida niže učestanosti $\omega_s - \omega$ (slika 14).

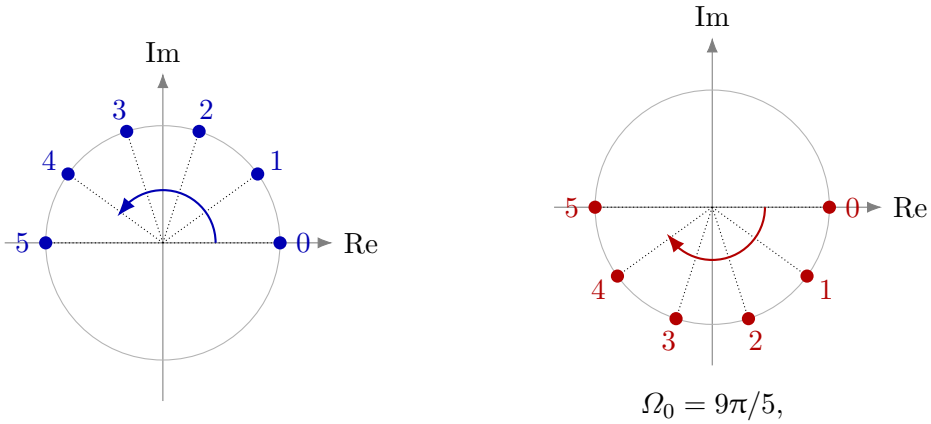


Slika 14. Sinusoide učestanosti ω_0 i $\omega_s - \omega_0$ (ovde $\omega_0 = 0{,}6/T_s$) imaju iste odbirke. Iz odbiraka se ne može zaključiti koja je od njih odabrana.

Kod kompleksne sinusoide efekat je još očigledniji ako je predstavimo u kompleksnoj ravni, kao tačku koja se kreće po jediničnom krugu. Prema (18), relativna kružna učestanost Ω_0 daje iste odbirke kao $\Omega_0 - 2\pi$. Ako je $\pi < \Omega_0 < 2\pi$, ekvivalentna učestanost $\Omega_0 - 2\pi$ je negativna, pa odbirci izgledaju kao da se tačka kreće u suprotnom smeru, sporije. Isti efekat se vidi u filmovima, kada točak automobila koji brzo

ubrzava odjednom uspori, stane ili se okreće unazad: kamera odabira sliku konačnom učestanošću.

Ovo je i najprirodniji način da se razume negativna učestanost (slika 15). Kompleksna sinusoida $e^{j\Omega n}$ je tačka na jediničnom krugu koja se u svakom koraku pomeri za ugao Ω: za $\Omega > 0$ tačka se kreće suprotno smeru kazaljke na satu, a za $\Omega < 0$ u smeru kazaljke. Realna sinusoida $\cos(\Omega n) = \frac{1}{2}\left(e^{j\Omega n} + e^{-j\Omega n}\right)$ je zbir dve takve tačke koje se kreću u suprotnim smerovima, pa njen spektar uvek ima komponente i na pozitivnoj i na negativnoj učestanosti.



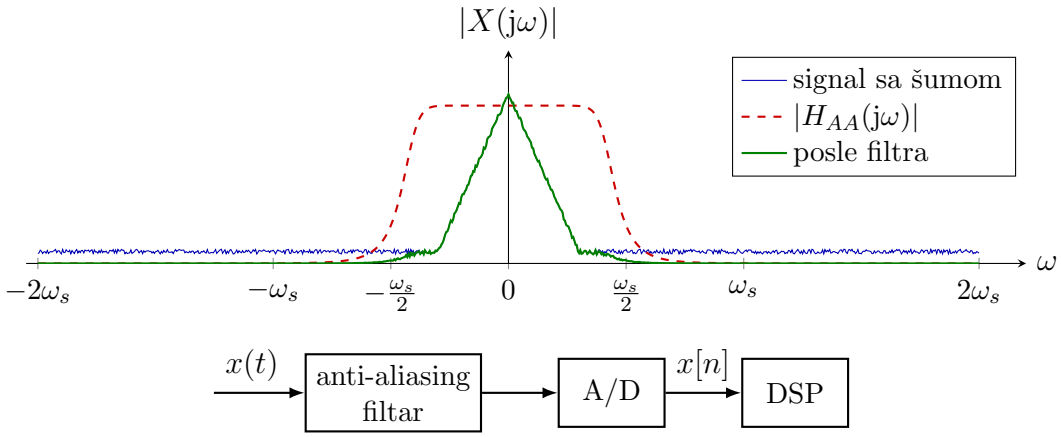
$\Omega_0 = \pi/5$ | $\Omega_0 = 9\pi/5$, ekvivalentno $\Omega_0 - 2\pi = -\pi/5$

Slika 15. Odbirci kompleksne sinusoide $e^{j\Omega_0 n}$, $n = 0, \ldots, 5$, na jediničnom krugu. Levo: za $\Omega_0 = \pi/5$ tačka se u svakom koraku pomeri za $\pi/5$ suprotno smeru kazaljke na satu. Desno: za $\Omega_0 = 9\pi/5$ pomeri se za $9\pi/5$, što daje iste tačke kao pomeraj za $-\pi/5$, pa izgleda kao da se kreće sporije i u suprotnom smeru. To je negativna učestanost.

5 Izbor učestanosti odabiranja

Iz prethodne analize sledi da učestanost odabiranja signala čiji spektar počinje od nule treba izabrati tako da bude veća od dvostruke najveće učestanosti signala. U audio tehnici se, na primer, koriste učestanosti odabiranja $f_s = 44{,}1\,\text{kHz}$, $48\,\text{kHz}$, $96\,\text{kHz}$ ili $192\,\text{kHz}$, zavisno od standarda, sve uz pretpostavku da čovek čuje učestanosti do oko $20\,\text{kHz}$.

U elektronskim kolima, međutim, uvek postoji šum, koji je najčešće širokopojasan i prisutan i na učestanostima većim od $f_{\max}$ korisnog signala (slika 16). Šum sa učestanosti iznad $f_s/2$ bi se odabiranjem preklopio u osnovni opseg i pokvario koristan signal. Povećavanje učestanosti odabiranja dok ne obuhvati ceo šum nije dobro rešenje: brži A/D konvertori su skuplji, složeniji i troše više energije, a raste i količina podataka koju treba obraditi i sačuvati. Zato se ispred A/D konvertora postavlja analogni filtar propusnik niskih učestanosti koji potiskuje sve komponente iznad $f_s/2$, tzv. filtar za sprečavanje preklapanja spektra (engl. *anti-aliasing filter*). Kod pododabiranja (odeljak 3.3) to je filtar propusnik opsega $[f_L, f_H]$. Tada se učestanost odabiranja bira prema korisnom signalu, a ne prema šumu.



Slika 16. Gore: spektar korisnog signala sa širokopojasnim šumom, karakteristika filtra za sprečavanje preklapanja H_{AA} sa graničnom učestanošću ispod $\omega_s/2$ i spektar posle filtriranja. Dole: filtar se postavlja ispred A/D konvertora.

6 Rekonstrukcija signala

6.1 Idealna rekonstrukcija

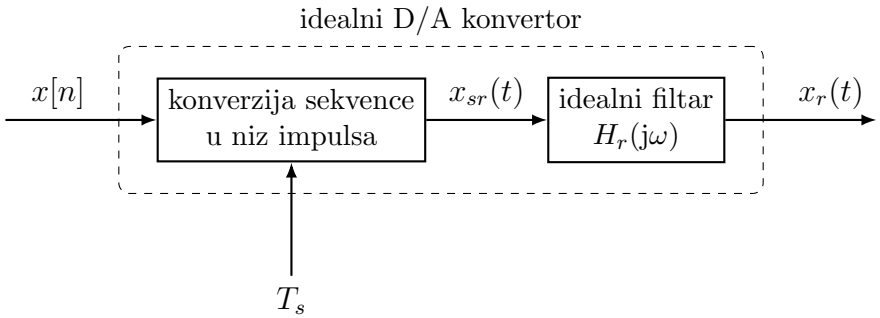
Konverziju iz diskretnog u kontinualni signal nazivamo digitalno-analognom (D/A) konverzijom. Idealna D/A konverzija (slika 17) najpre od odbiraka $x[n]$ pravi povorku Dirakovih impulsa

$$x_{sr}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,\delta(t - nT_s), \tag{19}$$

koja je, ako nema gubitaka zbog kvantizacije, jednaka odabranom signalu $x_s(t)$, pa je i $X_{sr}(\mathrm{j}\omega) = X_s(\mathrm{j}\omega)$. Ako je zadovoljena teorema o odabiranju, osnovni opseg sadrži neizmenjen spektar $X(\mathrm{j}\omega)/T_s$, koji se izdvaja idealnim filtrom propusnikom niskih učestanosti

$$H_r(\mathrm{j}\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| < \omega_s/2, \\ 0, & |\omega| > \omega_s/2. \end{cases} \tag{20}$$

Pojačanje T_s u propusnom opsegu poništava faktor $1/T_s$ iz izraza (9), pa je $X_r(\mathrm{j}\omega) = X_s(\mathrm{j}\omega)\,H_r(\mathrm{j}\omega) = X(\mathrm{j}\omega)$.

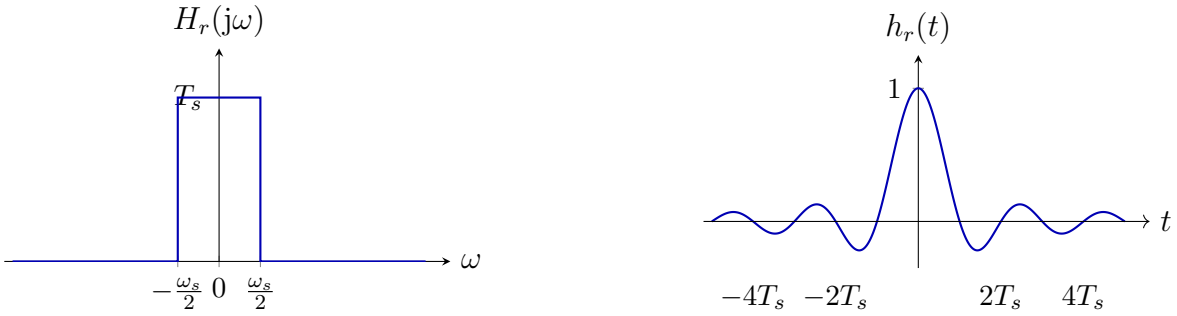


Slika 17. Idealni D/A konvertor.

Impulsni odziv idealnog filtra za rekonstrukciju dobija se inverznom Furijeovom transformacijom izraza (20):

$$h_r(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} T_s\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \frac{T_s}{2\pi}\cdot\frac{2\sin(\omega_s t/2)}{t} = \frac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s}, \tag{21}$$

što je takozvana funkcija sinc (slika 18). Ona je jednaka jedinici u $t = 0$ i nuli u svim ostalim trenucima odabiranja $t = nT_s$.



Slika 18. Frekvencijska karakteristika idealnog filtra za rekonstrukciju (levo) i njegov impulsni odziv, funkcija sinc (desno).

Odziv filtra je konvolucija pobude i impulsnog odziva. Pošto je pobuda povorka impulsa, odziv je zbir pomerenih i skaliranih impulsnih odziva:

$$x_r(t) = h_r(t) * x_{sr}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, h_r(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,\frac{\sin\big(\pi(t-nT_s)/T_s\big)}{\pi(t-nT_s)/T_s}. \tag{22}$$

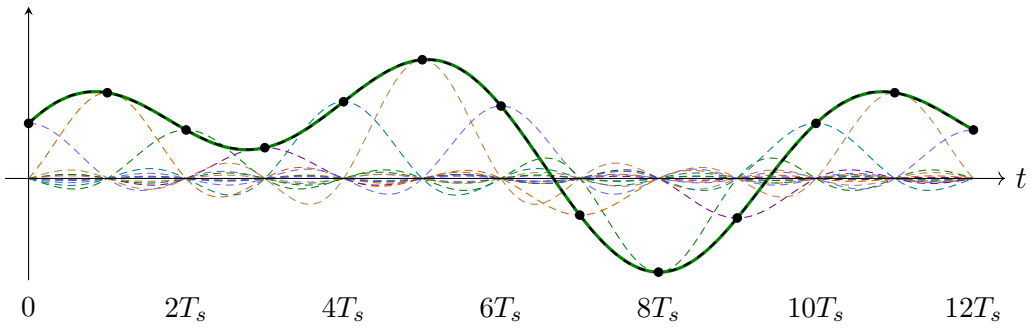
Ovo je interpolaciona formula: svaki odbirak doprinosi jednom pomerenom funkcijom sinc, a njihov zbir daje originalni signal (slika 19). U trenucima odabiranja doprinosi svih ostalih odbiraka jednaki su nuli, pa je $x_r(nT_s) = x[n]$. Ako se u zbir uključi samo konačno mnogo odbiraka, kao na slici, rekonstrukcija nije tačna, posebno blizu krajeva intervala; tačna je tek kada se uračunaju svi odbirci.

Naglasimo da rekonstrukcija (22) daje originalni signal, $x_r(t) = x(t)$, samo ako pri odabiranju nije bilo preklapanja spektra, tj. ako je ispunjen uslov teoreme o odabiranju (13). U suprotnom osnovni opseg ne sadrži $X(\mathrm{j}\omega)/T_s$, nego zbir preklopljenih kopija spektra (odeljak 3.1), a filtar $H_r(\mathrm{j}\omega)$ izdvaja upravo taj zbir. Signal $x_r(t)$ tada i dalje prolazi kroz sve odbirke, $x_r(nT_s) = x[n]$, ali se između njih razlikuje od $x(t)$. Na primer, sinusoida učestanosti veće od $f_s/2$ rekonstruiše se kao sinusoida niže učestanosti (odeljak 4.2).

6.2 Realna D/A konverzija: kolo zadrške nultog reda

Ni idealnu D/A konverziju nije moguće ostvariti, jer zahteva Dirakove impulse i idealni filtar. D/A konvertori najčešće napon koji odgovara odbirku $x[n]$ drže konstantnim tokom jedne periode odabiranja, od trenutka nT_s do $(n+1)T_s$ (slika 20). Takvo kolo se naziva kolo zadrške nultog reda (engl. *Zero-Order Hold*, ZOH). Njegov impulsni odziv je pravougaoni impuls trajanja T_s,

$$h_{\mathrm{ZOH}}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < T_s, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \tag{23}$$

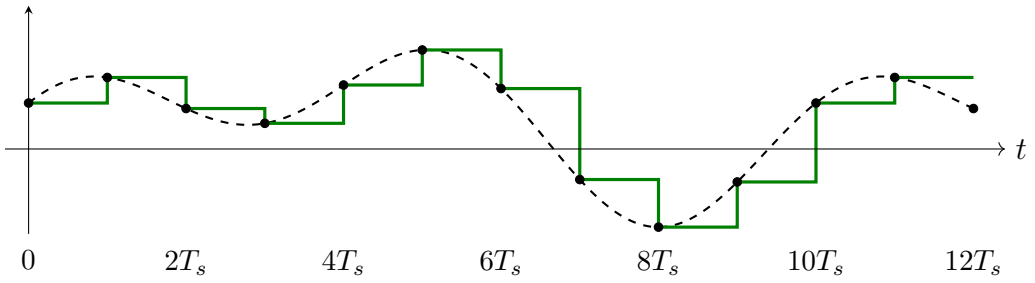


Slika 19. Rekonstrukcija interpolacionom formulom (22). Isprekidane obojene krive su pojedinačni doprinosi $x[n]\,h_r(t-nT_s)$ odbiraka prikazanih na slici, zelena kriva je zbir doprinosa svih odbiraka, a crna isprekidana kriva originalni signal $x(t)$, sa kojim se rekonstruisani signal poklapa.

a frekvencijska karakteristika

$$H_{\mathrm{ZOH}}(\mathrm{j}\omega) = \int_0^{T_s} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = T_s\,\frac{\sin(\omega T_s/2)}{\omega T_s/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_s/2}. \tag{24}$$

Modul je funkcija sinc, dualno prethodnom slučaju, a faktor $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_s/2}$ predstavlja kašnjenje od pola periode odabiranja.

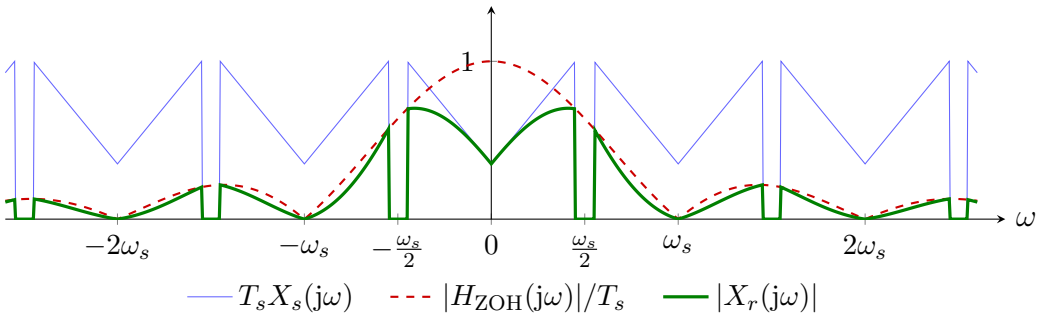


Slika 20. Rekonstrukcija kolom zadrške nultog reda (zeleno) i originalni signal (isprekidano).

Rekonstruisani signal ima oštre ivice na prelazima između odbiraka. One unose u spektar neželjene visoke učestanosti. Pri niskim učestanostima odabiranja, na primer 8 kHz u telefoniji, te komponente su u čujnom opsegu i čuju se kao oštar, „metalan“ zvuk. U frekvencijskom domenu to se vidi jasno (slika 21): karakteristika $|H_{\mathrm{ZOH}}(\mathrm{j}\omega)|$ nije idealna, pa kopije spektra nisu potpuno potisnute, već samo oslabljene. Zato se iza D/A konvertora postavlja još jedan analogni filtar propusnik niskih učestanosti, koji uklanja ostatke kopija. Pošto se kopije spektra nazivaju i slike (engl. *images*), ovaj filtar se naziva filtar za uklanjanje kopija spektra (engl. *anti-imaging filter*), po analogiji sa filtrom za sprečavanje preklapanja spektra (engl. *anti-aliasing filter*) na ulazu.

Postoji i drugi problem: funkcija sinc nije ravna u osnovnom opsegu, već na ivici, za $\omega = \omega_s/2$, opada na $2/\pi \approx 0{,}64$, tj. za oko 3,9 dB. To izobličava korisni signal. Ovo se može ublažiti digitalnim filtrom čija je karakteristika približno inverzna karakteristici ZOH kola u osnovnom opsegu, tzv. inverznim sinc filtrom, koji se često koristi u telekomunikacionim sistemima.

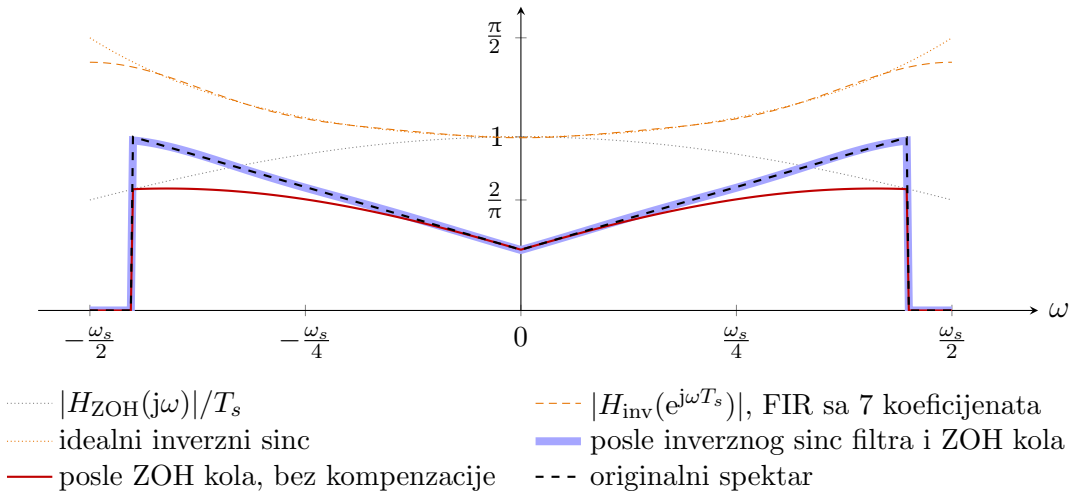
Potreba za ovim filtrom najbolje se vidi na signalu koji ima izražene komponente blizu ivice osnovnog opsega. Na slici 22 je spektar u obliku slova M, čiji su vrhovi na $\omega = \pm 0{,}45\,\omega_s$. Posle ZOH kola vrhovi su oslabljeni na oko 70 %, tj. za oko 3,1 dB, dok je sredina spektra gotovo neizmenjena, pa oblik spektra više nije isti. Inverzni sinc filtar u digitalnom domenu, pre D/A konverzije, unapred pojačava komponente blizu ivice opsega onoliko koliko će ih ZOH kolo oslabiti, $H_{\text{inv}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_s}\right) \approx \frac{\omega T_s/2}{\sin(\omega T_s/2)}$ za $|\omega| < \omega_s/2$. Idealna karakteristika se ne može tačno ostvariti, ali se dobro aproksimira kratkim FIR filtrom sa linearnom fazom. Na slici je to filtar sa samo sedam koeficijenata, $h[n] = \{-0{,}0094;\ 0{,}027;\ -0{,}0993;\ 1{,}1585;\ -0{,}0993;\ 0{,}027;\ -0{,}0094\}$, koji kompenzaciju obavlja gotovo potpuno u većem delu osnovnog opsega, dok uz samu ivicu $\omega_s/2$ ostaje malo nekompenzovano slabljenje. Cena kompenzacije je to što filtar pojačava visoke učestanosti, pa signal pre D/A konverzije mora imati rezervu u dinamici.



Slika 21. Spektar odabranog signala sa spektrom u obliku slova M sa slike 22, modul karakteristike ZOH kola i spektar signala rekonstruisanog ZOH kolom. Kopije spektra su oslabljene, ali ne i uklonjene, a i centralna kopija je izobličena: njeni vrhovi blizu $\pm\omega_s/2$ su oslabljeni.

6.3 Sistem za digitalnu obradu analognih signala

Tako dolazimo do kompletne šeme sistema za digitalnu obradu analognih signala (slika 23). Čine je filtar za sprečavanje preklapanja spektra (engl. *anti-aliasing filter*), A/D konvertor, digitalni sistem za obradu, D/A konvertor i filtar za uklanjanje kopija spektra (engl. *anti-imaging filter*). Ako se koristi inverzni sinc filtar, on je deo digitalnog sistema, neposredno pre D/A konvertora.



Slika 22. Spektar u obliku slova M u osnovnom opsegu. ZOH kolo oslabljuje komponente blizu $\omega_s/2$ (crveno), pa vrhovi spektra padaju. Inverzni sinc filtar (narandžasto) pre D/A konverzije kompenzuje ovo slabljenje. Prikazan je realan FIR filtar sa 7 koeficijenata, projektovan za $|\omega| \leq 0{,}45\,\omega_s$: rezultujući spektar (široka plava linija) se do vrhova poklapa sa originalnim (crno isprekidano) sa greškom manjom od 0,2 dB, a tek uz samu ivicu $\omega_s/2$, gde FIR filtar ne prati idealnu karakteristiku (narandžasto tačkasto), ostaje nekompenzovano slabljenje od oko 0,8 dB.



Slika 23. Sistem za digitalnu obradu analognih signala.

Literatura

[Lük99] Hans Dieter Lüke. The origins of the sampling theorem. *IEEE Communications Magazine*, 37(4):106–108, 1999.

[OS10] Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schafer. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-Hall Signal Processing Series. Pearson, Upper Saddle River, NJ, 3rd edition, 2010.

[PV08] Paolo Prandoni and Martin Vetterli. *Signal Processing for Communications*. CRC Press / Communication Science (Free Online Edition), 2008. Available online at https://www.sp4comm.org/.

[Uns00] Michael Unser. Sampling—50 years after Shannon. *Proceedings of the IEEE*, 88(4):569–587, 2000.