Furijeova analiza

Digitalna obrada signala, beleške sa predavanja

Vladimir Petrović

1. novembar 2026.

Napomena autora: Koncept, metodologija i stručni sadržaj ovog materijala delo su predmetnog nastavnika. U pisanju određenih tekstualnih objašnjenja, formulisanju pojedinih primera, formatiranju dokumenta i crtanju slika korišćen je AI asistent Claude (Anthropic), pod potpunim autorskim i stručnim nadzorom.

Sadržaj

1 Diskretna Furijeova transformacija – DFT **2**
1.1 Promena baze: kompleksne sinusoide kao bazisni signali . . . 2
1.2 Ortogonalnost bazisnih signala . . . 3
1.3 DFT i inverzna DFT . . . 5
1.4 Tumačenje i primeri . . . 5
1.5 Zapis preko W_N i matrični oblik . . . 6

2 Furijeov red diskretnih signala – DTFS **8**
2.1 DTFS i inverzni DTFS . . . 8
2.2 Primer . . . 9

3 Furijeova transformacija diskretnih signala – DTFT **9**
3.1 Od DTFS-a do DTFT-a: perioda $N \to \infty$ . . . 10
3.2 Ortogonalnost kompleksnih sinusoida beskonačnog trajanja . . . 13
3.3 DTFT i inverzna DTFT . . . 16
3.4 Osobine DTFT-a . . . 16

4 Furijeova transformacija kontinualnih signala – FT **21**
4.1 Odabiranje i veza između analogne i digitalne učestanosti . . . 21
4.2 Furijeova transformacija kao Rimanova suma . . . 21
4.3 Inverzna Furijeova transformacija . . . 22
4.4 Osobine Furijeove transformacije . . . 23

5 Furijeov red kontinualnih signala – FS **24**
5.1 Od DTFS-a do Furijeovog reda . . . 24
5.2 Četiri oblika Furijeove analize . . . 25

Dodatak A. Dirihleovo jezgro i povorka Dirakovih impulsa **26**

Literatura **30**

1 Diskretna Furijeova transformacija – DFT

1.1 Promena baze: kompleksne sinusoide kao bazisni signali

Ranije smo videli da se signali (vektori, sekvence) mogu predstaviti kao linearna kombinacija bazisnih vektora (signala)

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k], \tag{1}$$

gde je $x[k]$ vrednost signala $x[n]$ na indeksu k, a $\delta[n-k]$ jedinični impuls (Kronekerova delta funkcija) zakašnjen za k mesta. Postavlja se pitanje pomoću koje još baze prostora je korisno predstaviti signale. Ovakav pogled na Furijeovu analizu, kao na promenu baze vektorskog prostora signala, detaljno je razvijen u [PV08]. Ranije smo videli da za LTI sisteme važi da je kompleksna sinusoida $e[n] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}$ njihova sopstvena funkcija, tj. da je odziv LTI sistema na pobudu kompleksnom sinusoidom, ista ta kompleksna sinusoida pomnožena kompleksnom konstantom $H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)$

$$x[n] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n} \xrightarrow{\text{LTI}} y[n] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n} H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right), \tag{2}$$

gde je $H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)$ funkcija kontinualne promenljive Ω i predstavlja frekvencijski odziv (frekvencijsku karakteristiku) LTI sistema:

$$H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k}. \tag{3}$$

Ako je poznata frekvencijska karakteristika, zbog osobine linearnosti, odziv LTI sistema na bilo koju linearnu kombinaciju kompleksnih sinusoida je linearna kombinacija istih tih kompleksnih sinusoida. Imajući u vidu da su kompleksne sinusoide na različitim učestanostima međusobno ortogonalne (što ćemo pokazati kasnije) postavlja se pitanje da li one mogu kreirati bazu prostora svih diskretnih signala.

Za sada, posmatrajmo ograničen prostor signala čija je dimenzija N. Tada jednačina 1 postaje

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\delta[n-k]. \tag{4}$$

Kako je dimenzija prostora N, to je i broj bazisnih vektora takođe N, pa možemo usvojiti da su bazisni signali kompleksne sinusoide na N različitih kružnih učestanosti:

$$\begin{array}{ccc} \text{Sekvenca} & & \text{Vektorski zapis} \\ e_0[n] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n} & \rightarrow & \mathbf{e}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0} & \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\Omega_0} & \ldots & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0(N-1)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ e_1[n] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_1 n} & \rightarrow & \mathbf{e}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\Omega_1} & \ldots & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_1(N-1)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{N-1}[n] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_{N-1} n} & \rightarrow & \mathbf{e}^{(N-1)} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_{N-1}} & \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\Omega_{N-1}} & \ldots & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_{N-1}(N-1)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \end{array} \tag{5}$$

Imajući u vidu činjenicu da je $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\Omega+2k\pi)n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}$, možemo usvojiti da su kružne učestanosti svih bazisnih signala u opsegu od 0 do 2π. Takođe, zbog potrebe da bazisni signali budu međusobno ortogonalni, a i zbog jednostavnosti, usvojićemo da su

pojedinačne kružne učestanosti ekvidistantno raspoređene na opsegu $[0, 2\pi)$:

$$e_k[n] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_k n},\ \Omega_k = k\Delta\Omega = k\frac{2\pi}{N},\ k = 0, 1, 2, ..., N-1. \tag{6}$$

U vektorskoj formi sada možemo zapisati bazisne signale na sledeći način:

$$\mathbf{e}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}} & \mathrm{e}^{\mathrm{j}2k\frac{2\pi}{N}} & ... & \mathrm{e}^{\mathrm{j}(N-1)k\frac{2\pi}{N}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

1.2 Ortogonalnost bazisnih signala

Pokažimo sada da su odabrani bazisni signali međusobno ortogonalni. Vektori su ortogonalni ako im je skalarni proizvod jednak nuli. Nalaženjem skalarnog proizvoda dve kompleksne sinusoide dobijamo

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}^{(k)}, \mathbf{e}^{(l)} \rangle = {\mathbf{e}^{(k)}}^{\mathrm{H}} \mathbf{e}^{(l)} &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_k n}\right)^* \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_l n} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_k n} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_l n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(l-k)\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} N, & \text{za } k = l \\ 0, & \text{za } k \neq l \end{cases}, \end{aligned} \tag{8}$$

što pokazuje da je intenzitet (norma) vektora jedne kompleksne sinusoide $\sqrt{N}$ (jer je skalarni proizvod kompleksne sinusoide sa samom sobom jednak N), a da su dve kompleksne sinusoide na različitim učestanostima ortogonalne. Radi kompletnosti, uvođenjem smene $m = l - k$, predstavimo slučaj $k \neq l$ sledećom sumom

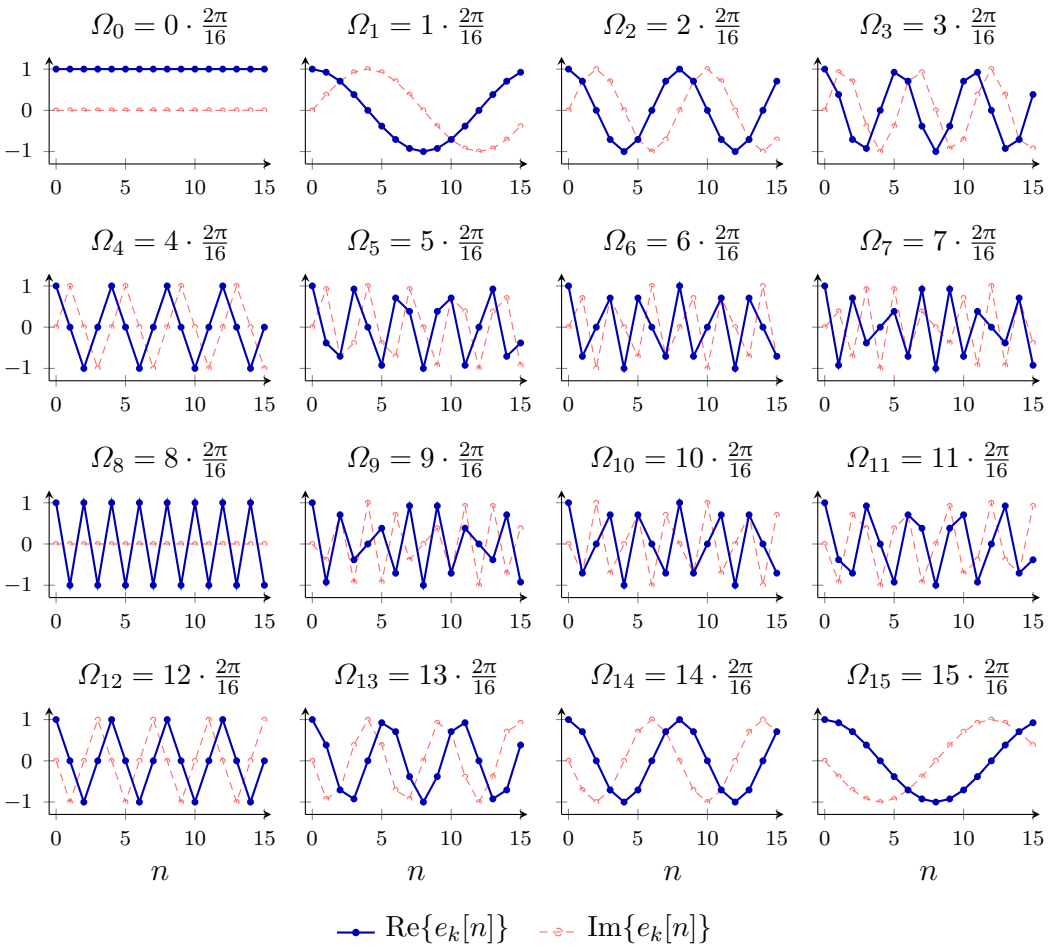
$$\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(l-k)\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\cos\left(m\frac{2\pi}{N}n\right) + \mathrm{j}\sin\left(m\frac{2\pi}{N}n\right)\right]. \tag{9}$$

Na primer, za $m = 1$, vidimo da vrednosti trigonometrijskih funkcija iz sume za navedeni opseg indeksa od 0 do $N-1$ predstavljaju tačno jednu periodu. U opštem slučaju, na indekse 0 do $N-1$ će stati tačno m perioda. To znači da će se u sumi pojaviti jednak broj pozitivnih i negativnih, po apsolutnoj vrednosti jednakih, vrednosti, pa će suma imati vrednost 0. Egzaktnije, suma 9 je suma geometrijske progresije i može se zapisati kao

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\frac{2\pi}{N}}\right)^n = \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\frac{2\pi}{N}}\right)^N}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\frac{2\pi}{N}}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}m2\pi}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\frac{2\pi}{N}}} = \frac{1-1}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\frac{2\pi}{N}}} = 0, \qquad 0 < |m| < N. \tag{10}$$

Iako su kompleksne sinusoide međusobno ortogonalni vektori, oni nisu ortonormirani (engl. *orthonormal*) jer im intenzitet nije 1. Ukoliko želimo da dobijemo ortonormiranu bazu, potrebno je kompleksne sinusoide podeliti sa $\sqrt{N}$, što će u skalarnom proizvodu bazisnog vektora sa samim sobom dati vrednost 1. Konačno, možemo zapisati da je baza prostora skup vektora $\mathbf{e}^{(k)}$ za $k = 0, 1, 2, ..., N-1$ pri čemu je

$$e_k[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n}. \tag{11}$$



Slika 1. Bazisni signali DFT-a za $N = 16$: realni deo (puna linija) i imaginarni deo (isprekidano) kompleksnih sinusoida $\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n}$, $k = 0, \ldots, 15$.

1.3 DFT i inverzna DFT

Sada kada smo kreirali bazisne vektore (signale) možemo predstaviti polazni signal $x[n]$ kao linearnu kombinaciju novih bazisnih vektora (signala):

$$x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n}. \tag{12}$$

Kompleksni brojevi koji množe bazisne signale c_k se mogu dobiti projekcijom vektora $\mathbf{x}$ (signala $x[n]$) na bazisne vektore:

$$c_k = \langle \mathbf{e}^{(k)}, \mathbf{x} \rangle = {\mathbf{e}^{(k)}}^{\mathrm{H}} \mathbf{x} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n} \right)^* x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n}. \tag{13}$$

Sekvenca skalara c_k se još i zapisuje kao $X[k]$ ili kao vektor $\mathbf{X}$.

Izraz 13 predstavlja transformaciju signala $x[n]$ iz prostora gde su bazisni vektori zakašnjeni delta impulsi u prostor gde su bazisni vektori kompleksne sinusoide i formalno se naziva „diskretna Furijeova transformacija" (engl. *Discrete Fourier Transform*), skraćeno DFT. Češće, diskretna Furijeova transformacija ne uzima u obzir normalizaciju bazisnih vektora pa se zapisuje kao

$$\boxed{X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n},} \tag{14}$$

ali onda rekonstrukciona formula 12 postaje

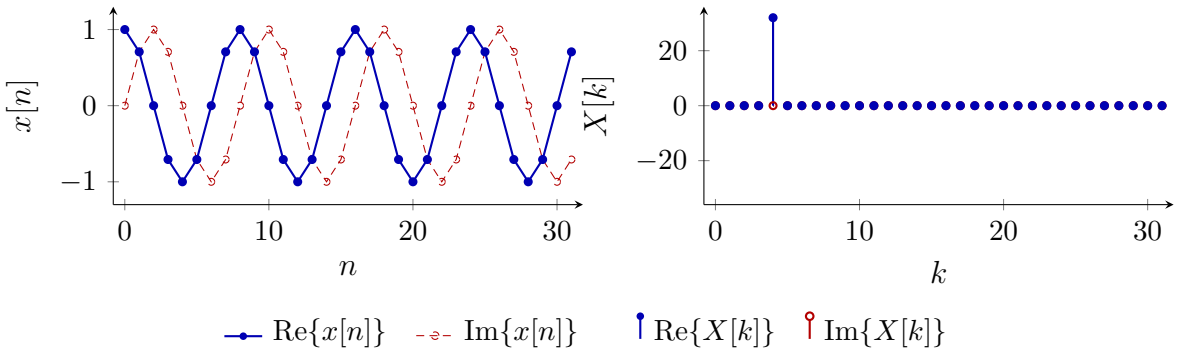
$$\boxed{x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n},} \tag{15}$$

i naziva se „inverzna diskretna Furijeova transformacija" (engl. *Inverse Discrete Fourier Transform*), skraćeno IDFT [OS10, PV08].

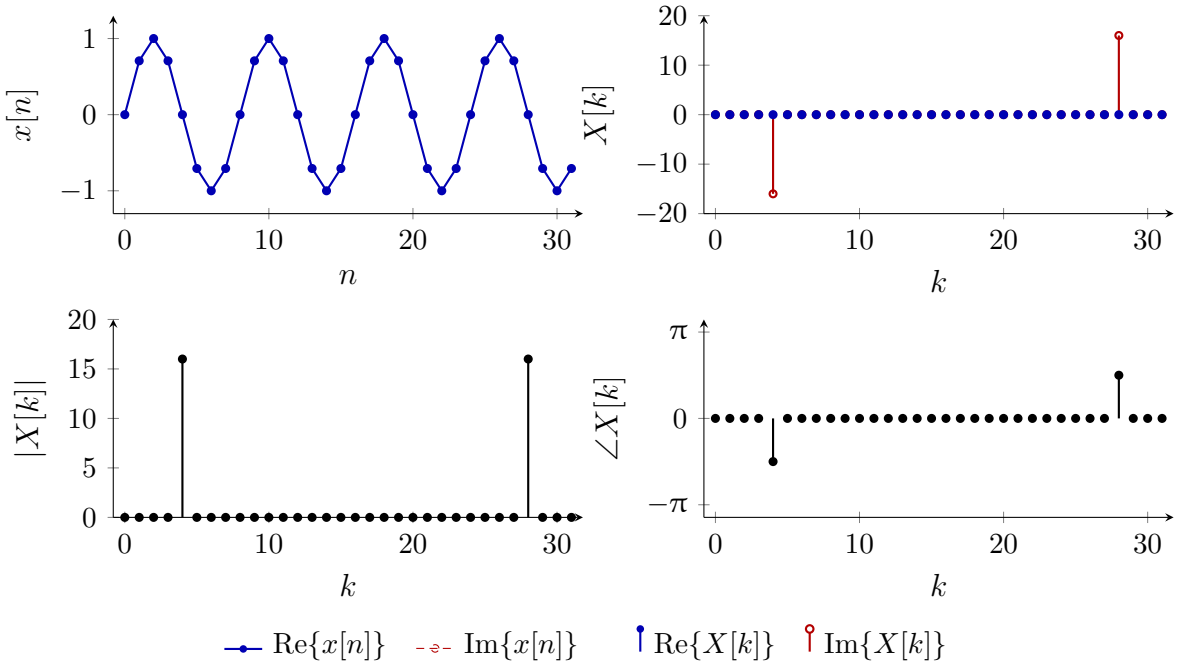
1.4 Tumačenje i primeri

Skalarni proizvod je mera sličnosti vektora. Stoga je $X[k]$ mera sličnosti signala $x[n]$ (vektora $\mathbf{x}$) sa bazisnim signalom $e_k[n]$ (vektorom $\mathbf{e}^{(k)}$). Na primer, ako se signal $x[n]$ sastoji samo od jedne kompleksne sinusoide na učestanosti $\Omega_l = l\frac{2\pi}{N}$, samo će $X[l]$ imati nenultu vrednost a svi ostali $X[k]$ za $k \neq l$ će biti jednaki nuli. Primer je dat na slici 2. Slično, ako postoji više komponenti, više koeficijenata će biti različito od nule kao u primeru sinusoidalnog signala sa slike 3. Na osnovu dobijenih koeficijenata DFT-a dakle možemo lako odrediti od kojih se sve komponenata sastoji polazni signal.

DFT ima očigledno ograničenje: ako je signal $x[n]$ kompleksna sinusoida na kružnoj učestanosti različitoj od $k\frac{2\pi}{N}$ svi koeficijenti DFT-a će biti različiti od nule jer ni jedan bazisni signal ne odgovara u potpunosti ulaznom signalu. Zbog toga bi se iz samih koeficijenata DFT-a moglo pogrešno zaključiti da je u pitanju značajno složeniji signal od jednostavne kompleksne sinusoide. Primer je dat na slici 4. O opisanom efektu će



Slika 2. Kompleksna sinusoida $x[n] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}4\frac{2\pi}{32}n}$, $N = 32$ (levo), i njena DFT (desno). Jedini koeficijent različit od nule je $X[4] = N = 32$.



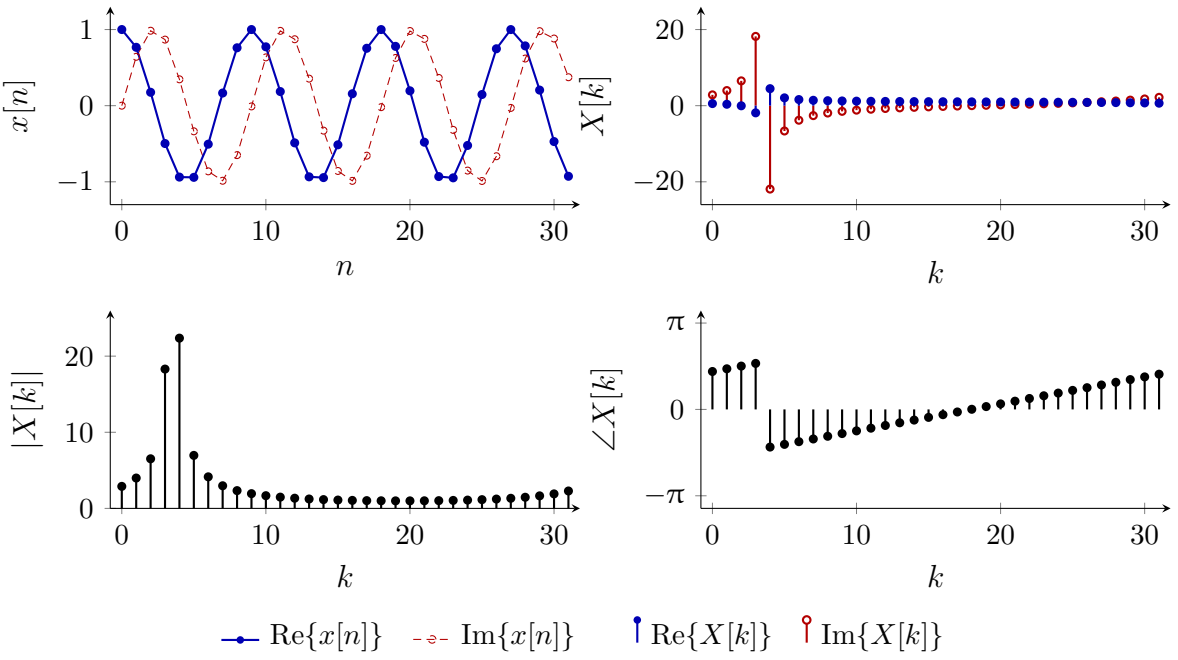
Slika 3. Sinusoida $x[n] = \sin\left(4\frac{2\pi}{32}n\right)$, $N = 32$, i njena DFT: realni i imaginarni deo, modul i argument. Pošto je $\sin\alpha = \frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha})$, različiti od nule su samo $X[4] = -16\mathrm{j}$ i $X[28] = X[-4] = 16\mathrm{j}$. Argument je prikazan samo za koeficijente različite od nule.

biti više reči kasnije. Barem analitički, detekciju egzaktno jedne kompleksne sinusoide je moguće dobiti primenom druge transformacije koju nazivamo Furijeova transformacija diskretnog signala (engl. *Discrete Time Fourier Transform*) ili skraćeno DTFT, prema nazivu na engleskom jeziku. Prostor signala pri računanju DTFT je beskonačan, pa je i broj kompleksnih sinusoida od kojih se linearnom kombinacijom dobija polazni signal beskonačan.

1.5 Zapis preko W_N i matrični oblik

Imajući u vidu da je korak $\Delta\Omega$ određen dužinom signala N, često se usvaja jednostavniji zapis preko kompleksnog broja W_N gde je

$$W_N = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}} \tag{16}$$



Slika 4. Kompleksna sinusoida $x[n] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}3{,}55\frac{2\pi}{32}n}$, $N = 32$, čija se učestanost ne poklapa ni sa jednom učestanošću bazisnih signala, i njena DFT. Svi koeficijenti su različiti od nule, a najveći su oni najbliži učestanosti signala, $X[3]$ i $X[4]$.

pa tada izraz 14 postaje

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \tag{17}$$

a izraz 15 postaje

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}. \tag{18}$$

DFT i IDFT se mogu zapisati i u matričnoj formi:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \tfrac{1}{N}\mathbf{W}^{\mathrm{H}}\mathbf{X} \tag{19}$$

gde je

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Diskretna Furijeova transformacija je praktično jedini alat za efikasnu frekvencijsku analizu signala u softveru i hardveru. Za računanje DFT-a razvijeni su izuzetno brzi algoritmi koji kvadratnu kompleksnost računanja skalarnog proizvoda $\mathcal{O}(N^2)$ svode na kompleksnost $\mathcal{O}(N \log N)$. Ipak, zbog svoje prirode da se primenjuje samo na signale konačne dužine, DFT ima određena ograničenja i zahteva pažljivu primenu. Analitički, sva ograničenja DFT-a se prevazilaze DTFT-om kojim se mogu analizirati signali beskonačnog trajanja o čemu će biti reči kasnije. Ipak, zbog velike praktičnosti za primenu

u uređajima za obradu signala, moraćemo da naučimo kako da radimo sa DFT-om i da razumemo ograničenja, kao i kako se neka od njih mogu barem umanjiti ako ne i potpuno zaobići.

2 Furijeov red diskretnih signala – DTFS

2.1 DTFS i inverzni DTFS

Kao korak ka generalizaciji diskretne Furijeove transformacije na beskonačan prostor diskretnih signala, izvedimo najpre razvoj signala u diskretan Furijeov red (engl. *Discrete Time Fourier Series*), skraćeno DTFS, prema nazivu na engleskom jeziku [OS10]. Diskretan Furijeov red se izvodi za periodične signale, tj. za signale za koje važi da je za celobrojno N i l

$$x[n] = x[n + lN]. \tag{21}$$

Svaki periodičan signal određen je u potpunosti konačnom sekvencom tačno jedne periode tog signala. Ako jednu periodu signala obležimo sekvencom $x[n]$ dužine N, periodičan signal predstavlja periodično produženje signala $x[n]$:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN] \tag{22}$$

Signal $x[n]$ moguće je predstaviti kao linearnu kombinaciju kompleksnih sinusoida konačnog trajanja (jednačina 15). Pošto prelazimo u domen beskonačnih signala, potrebno je egzaktnije definisati kompleksnu sinusoidu konačnog trajanja:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n}, \text{ za } n \in [0, N-1] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n}\mathrm{rect}_N[n], \text{ za } n \in \mathbb{Z} \tag{23}$$

gde je $\mathrm{rect}_N[n]$ kauzalni pravougaoni niz trajanja N:

$$\mathrm{rect}_N[n] = u[n] - u[n - N]. \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN] &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}(n-rN)} \mathrm{rect}_N[n - rN] \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} X[k] \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}(n-rN)} \mathrm{rect}_N[n - rN] \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\tilde{X}[k] \sum_{r=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}(n-rN)} \mathrm{rect}_N[n - rN] \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n},
\end{aligned} \tag{25}$$

gde su sa $\tilde{X}[k]$ označeni koeficijenti koji množe kompleksne sinusoide beskonačnog trajanja. Koeficijenti $\tilde{X}[k]$ predstavljaju Furijeov red diskretnog signala $\tilde{x}[n]$ i dobijaju se isto kao i koeficijenti DFT-a, tj. na jednoj periodi signala $\tilde{x}[n]$:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n} \tag{26}$$

Indeksi sume u izrazu 26 u opštem slučaju mogu uzeti bilo koju periodu signala $\tilde{x}[n]$ jer se zbog periodičnosti diskretnih kompleksnih sinusoida dobija isti rezultat, pa konačno izraz za Furijeov red diskretnog signala postaje:

$$\boxed{\tilde{X}[k] = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \tilde{x}[n] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n}.} \tag{27}$$

Izdvojimo ponovo i izraz za inverzni Furijeov red (engl. *Inverse Discrete Time Fourier Series*), skraćeno IDTFS, kojim se periodičan signal dobija iz koeficijenata Furijeovog reda. On je dobijen u poslednjem koraku izraza 25:

$$\boxed{\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n}.} \tag{28}$$

Treba primetiti da je i $\tilde{X}[k]$ periodična sekvenca po indeksu k i to sa identičnim periodom N. Ovo nije iznenađujuće jer je:

$$\tilde{X}[k+rN] = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \tilde{x}[n] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k+rN)\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \tilde{x}[n] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n} \cancelto{1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}rN\frac{2\pi}{N}n}} = \tilde{X}[k]. \tag{29}$$

2.2 Primer

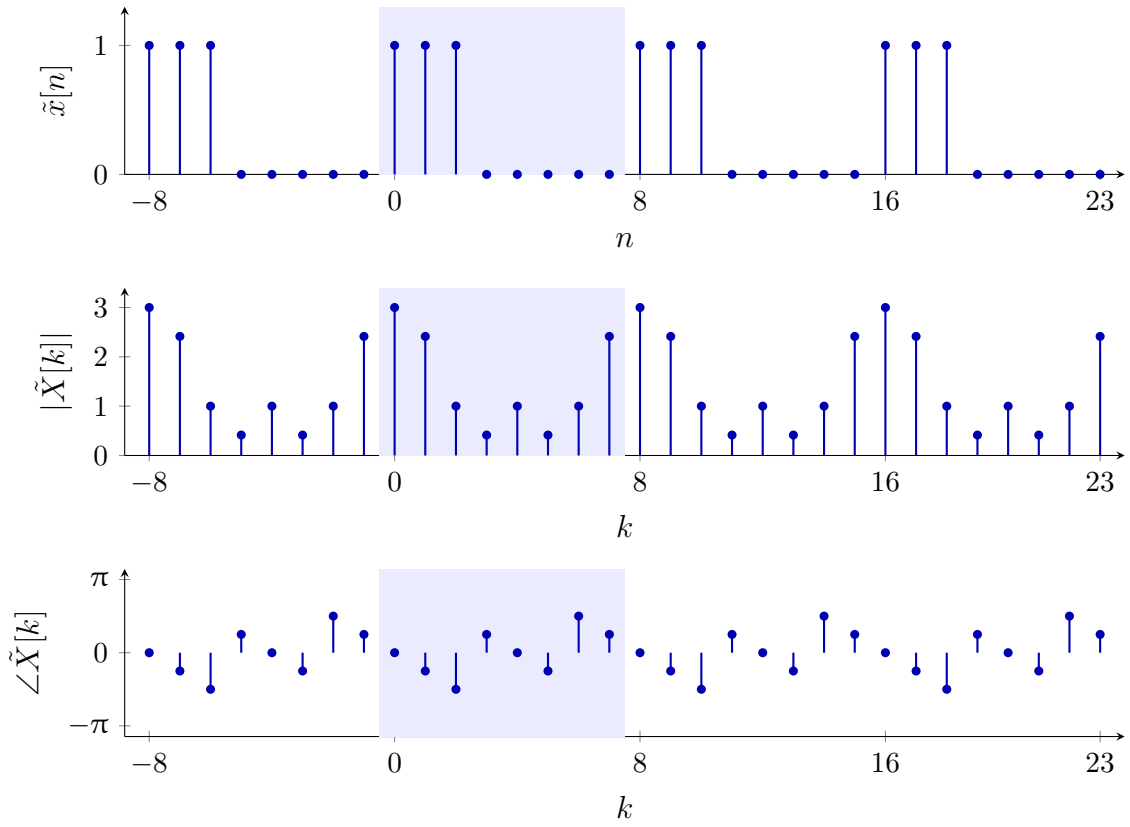
Pogledajmo jedan primer. Neka je $\tilde{x}[n]$ periodičan signal sa periodom $N = 8$, čija se jedna perioda sastoji od tri jedinice i pet nula, tj. $x[n] = 1$ za $n = 0, 1, 2$ i $x[n] = 0$ za $n = 3, \ldots, 7$ (slika 5, gore). Prema izrazu 27, uz $n_0 = 0$, koeficijenti Furijeovog reda su

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{8}n} = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{\pi}{4}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{\pi}{4}} \left(1 + 2\cos\frac{k\pi}{4}\right).$$

Modul koeficijenata je, dakle, $|\tilde{X}[k]| = |1 + 2\cos(k\pi/4)|$, a argument je linearna funkcija $-k\pi/4$, uz skok za π za one k za koje je $1 + 2\cos(k\pi/4)$ negativno (slika 5, sredina i dole). Najveći je koeficijent $\tilde{X}[0] = 3$, koji odgovara jednosmernoj komponenti, tj. zbiru odbiraka jedne periode. Primetimo da su koeficijenti, baš kao i signal, periodični sa periodom $N = 8$, što smo upravo pokazali izrazom 29. Dodatno, signal je realan, pa je $|\tilde{X}[k]| = |\tilde{X}[N-k]|$, dok argument menja znak. Ako ove koeficijente uvrstimo u inverzni Furijeov red 28, ponovo dobijamo polazni periodičan signal: on je zbir osam kompleksnih sinusoida $\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{8}n}$, $k = 0, \ldots, 7$, sa amplitudama $|\tilde{X}[k]|/8$ i početnim fazama $\arg \tilde{X}[k]$.

3 Furijeova transformacija diskretnih signala – DTFT

U opštem slučaju, signali nisu periodični i mogu imati proizvoljno trajanje, pa za njih nije moguće koristiti DFT ili DTFS za Furijeovu analizu. Ultimativni i matematički egzaktan alat za Furijeovu analizu proizvoljnih signala se naziva Furijeova transformacija diskretnih signala (DTFT) [OS10, PV08] i predstavlja transformaciju signala iz



Slika 5. Periodičan signal $\tilde{x}[n]$ sa periodom $N = 8$, čija perioda sadrži tri jedinice i pet nula (gore), i modul (sredina) i argument (dole) njegovih koeficijenata Furijeovog reda $\tilde{X}[k]$. Osenčena je po jedna perioda. I signal i koeficijenti su periodični sa periodom $N = 8$.

beskonačnog vektorskog prostora čiju bazu čine jedinični impulsi u prostor čiju bazu čini beskonačno kompleksnih sinusoida proizvoljne kružne učestanosti. Dakle signal $x[n]$ je potrebno predstaviti sumom beskonačno mnogo kompleksnih sinusoida:

$$x[n] = \sum_k c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_k n}. \tag{30}$$

3.1 Od DTFS-a do DTFT-a: perioda $N \to \infty$

Ipak, krenimo od slučaja kada je signal $x[n]$ beskonačnog trajanja moguće predstaviti linearnom kombinacijom konačno mnogo kompleksnih sinusoida i neka su kružne učestanosti kompleksnih sinusoida, kao i kod Furijeovog reda, ravnomerno raspoređene na intervalu $[0, 2\pi)$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi F_k n}, \tag{31}$$

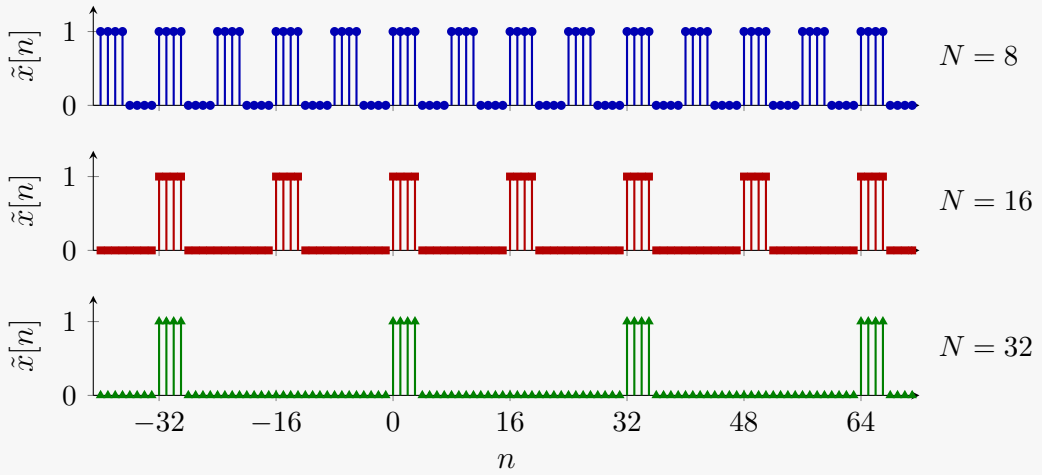
gde je $F_k = k/N$ (relativna) učestanost kompleksne sinusoide. Primetimo da ovaj izraz ima potpuno isti oblik kao inverzni Furijeov red (28), uz $c_k = \tilde{X}[k]/N$. Dakle, suštinski krećemo od Furijeovog reda, tačnije od inverznog Furijeovog reda, i posmatramo šta se dešava kada perioda N teži beskonačnosti, tj. kada periodičan signal prelazi u aperiodičan. Navedeni izraz se može generalizovati na slučaj predstave signala linearnom

kombinacijom beskonačno mnogo kompleksnih sinusoida ako se usvoji da $N \to \infty$. Međutim, za konačne c_k i $N \to \infty$, suma u opštem slučaju ne mora da konvergira, tj. ne mora biti konačna. Zbog toga ćemo svaki koeficijent c_k predstaviti kao proizvod gustine $c\,(F)$ i koraka $\Delta F = 1/N$

$$c_k = c\,(F)\,\Delta F. \tag{32}$$

Zašto koeficijente pišemo kao $c_k = c(F)\,\Delta F$?

Ovaj korak na prvi pogled deluje kao trik, pa pogledajmo šta se zaista dešava sa koeficijentima kada N raste. Uzmimo jednostavan signal, pravougaoni impuls od četiri odbirka, $x[n] = 1$ za $n = 0, 1, 2, 3$, i posmatrajmo ga kao jednu periodu periodičnog signala sa periodom N, tj. dopunimo ga nulama do dužine N. Što je N veće, to su kopije impulsa dalje jedna od druge, a kada $N \to \infty$ ostaje samo jedan, aperiodičan impuls. Primer za nekoliko vrednosti N prikazan je na slici 6.



Slika 6. Pravougaoni impuls od četiri odbirka posmatran kao perioda periodičnog signala sa periodom $N = 8$, 16 i 32. Što je N veće, to su kopije impulsa dalje jedna od druge; kada $N \to \infty$, ostaje samo impuls oko $n = 0$, tj. aperiodičan signal.

Kao što je ranije rečeno, za svako konačno N koeficijenti c_k su koeficijenti Furijeovog reda skalirani sa $1/N$:

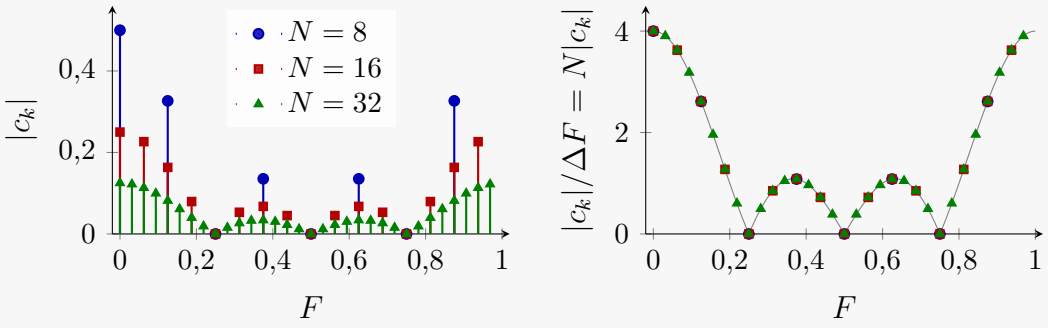
$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi F_k n}, \qquad F_k = \frac{k}{N}.$$

Na slici 7.a) prikazani su moduli koeficijenata $|c_k|$ za $N = 8$, 16 i 32. Primetimo da je komponenti sve više, a razmak između njih, $\Delta F = 1/N$, sve manji. Istovremeno je svaki koeficijent sve manji: kada N udvostručimo, koeficijenti se prepolove. Isti signal se deli na sve više komponenti, pa stoga svaka komponenta manje doprinosi ukupnom signalu. Kada $N \to \infty$, svaki pojedinačni koeficijent teži nuli. Kada bismo spektar opisivali koeficijentima c_k, u limesu bismo dobili nule na svim učestanostima, iako signal sasvim sigurno postoji. S druge strane, kada bi koeficijenti ostali konačni, suma beskonačno mnogo konačnih članova ne bi bila

konačna, o čemu je bilo reči u glavnom delu teksta. Potrebna nam je, dakle, veličina koja ne teži ni nuli ni beskonačnosti.
Podelimo sada svaki koeficijent širinom intervala koji mu pripada, ΔF. Dobijamo $c_k/\Delta F = Nc_k$ (slika 7.b)). Za sva tri N ove vrednosti leže na istoj krivoj, koja se ne menja kada N raste. Ta kriva je $c(F)$. Dakle, smenom

$$c(F_k) = \frac{c_k}{\Delta F} \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_k = c(F_k)\,\Delta F$$

uspeli smo da dobijemo sumu koja konvergira.



Slika 7. Moduli koeficijenata pravougaonog impulsa od četiri odbirka posmatranog kao perioda signala dužine $N = 8$, 16 i 32. a) Koeficijenti $|c_k|$ se smanjuju kako N raste. b) Vrednosti $|c_k|/\Delta F$ leže na istoj krivoj $|c(F)|$ (siva linija) bez obzira na N.

Kada prihvatimo da je $c_k = c(F_k)\,\Delta F$, suma $\sum_k c(F_k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi F_k n}\,\Delta F$ je Rimanova suma. Kada $\Delta F \to 0$, suma prelazi u integral, što je upravo izraz (34).

Zamenom u izraz za $x[n]$ dobijamo

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi F_k n} = \sum_{F=0}^{\frac{N-1}{N}} c\,(F)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi F n}\Delta F. \tag{33}$$

Kada $N \to \infty$ dobija se

$$x[n] = \lim_{N\to\infty} \sum_{F=0}^{\frac{N-1}{N}} c\,(F)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi F n}\Delta F = \int_0^1 c\,(F)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi F n}\mathrm{d}F \overset{F=\frac{\Omega}{2\pi}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\mathrm{d}\Omega, \tag{34}$$

gde $X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)$ ima isti oblik kao i $c\,(F)$, ali je razvučeno na opseg $[0, 2\pi)$.

Na ovaj način, dobili smo izraz za predstavu proizvoljnog signala $x[n]$ linearnom kombinacijom beskonačno mnogo kompleksnih sinusoida čije su kružne učestanosti kontinualna promenljiva Ω. Ako su kompleksne sinusoide međusobno ortogonalne za bilo koje Ω_1 i Ω_2 ($\Omega_1 \neq \Omega_2$), tada se koeficijenti u linearnoj kombinaciji iz izraza 34 dobijaju

projekcijom signala $x[n]$ na pojedinačne kompleksne sinusoide (skalarnim proizvodom):

$$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right) = \langle \mathbf{e}^{(\Omega)}, \mathbf{x} \rangle = {\mathbf{e}^{(\Omega)}}^{\mathrm{H}} \mathbf{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\right)^* x[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}. \tag{35}$$

3.2 Ortogonalnost kompleksnih sinusoida beskonačnog trajanja

Kao i kod kompleksnih sinusoida konačnog trajanja, ortogonalnost se pokazuje računanjem skalarnog proizvoda:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}^{(\Omega_1)}, \mathbf{e}^{(\Omega_2)} \rangle &= {\mathbf{e}^{(\Omega_1)}}^{\mathrm{H}} \mathbf{e}^{(\Omega_2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_1 n}\right)^* \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_2 n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega_2 - \Omega_1) n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\Omega n} = \begin{cases} \infty, & \text{za } \Delta\Omega = 2k\pi \\ 0, & \text{za } \Delta\Omega \neq 2k\pi \end{cases}. \end{aligned} \tag{36}$$

Suma je beskonačna u tačkama $\Delta\Omega = 2k\pi$, a jednaka nuli svuda drugde. Da je jednaka nuli za $\Delta\Omega \neq 2k\pi$ sledi iz činjenice da će se, za beskonačan opseg indeksa n, pozitivne i negativne poluperiode funkcija cos i sin poništiti. Ovakvo ponašanje liči na povorku Dirakovih impulsa. Međutim, vrednost „∞“ ne govori ništa o površini impulsa: i $\delta(\Delta\Omega)$ i $5\,\delta(\Delta\Omega)$ su beskonačni u nuli. Dirakov impuls je određen svojom površinom (u nastavku je dat podsetnik o Dirakovoj delta funkciji).

Dirakova delta funkcija

Dirakova delta funkcija $\delta(x)$ je matematička apstrakcija koja opisuje idealni impuls: veličinu koja je koncentrisana u jednoj tački, a čiji je ukupni integral jednak jedinici. Najlakše ju je razumeti kao limes funkcije pravougaonog impulsa [OWN97].

Pravougaoni impuls

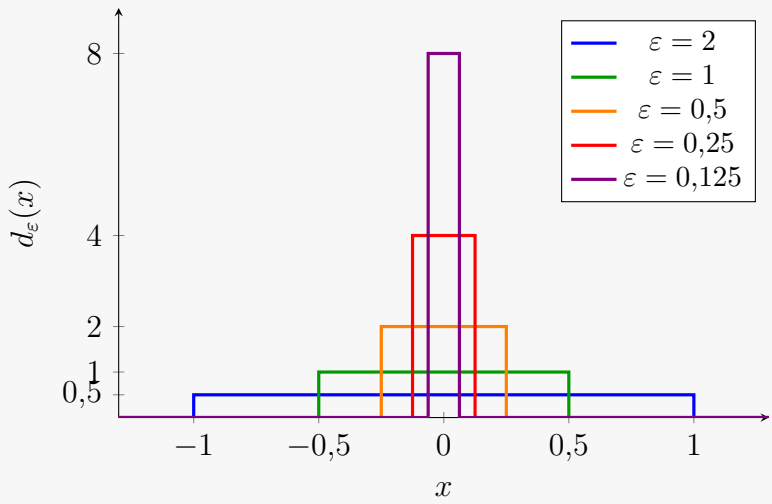
Posmatrajmo pravougaoni impuls širine $\varepsilon > 0$ i visine $1/\varepsilon$, centriran u koordinatnom početku:

$$d_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, & |x| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \\ 0, & |x| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}. \end{cases} \tag{37}$$

Površina ispod ovog impulsa je proizvod širine i visine, pa za svako $\varepsilon > 0$ važi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{2} - \left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1. \tag{38}$$

Kada se ε smanjuje, impuls postaje sve uži, a njegova visina $1/\varepsilon$ sve veća, tako da površina uvek ostaje jednaka 1 (slika 8).



Slika 8. Pravougaoni impulsi $d_\varepsilon(x)$ za opadajuće ε. Svaki pravougaonik ima površinu $\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$.

Definicija delta funkcije

Dirakovu delta funkciju definišemo kao limes pravougaonog impulsa:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} d_\varepsilon(x). \tag{39}$$

Neformalno, ona ima sledeće osobine:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases} \qquad \text{i} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{40}$$

Druga osobina sledi direktno iz (38): pošto je integral jednak 1 za svako ε, jednak je 1 i u limesu.

Osobina izdvajanja. Za svaku neprekidnu funkciju $f(x)$ važi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0). \tag{41}$$

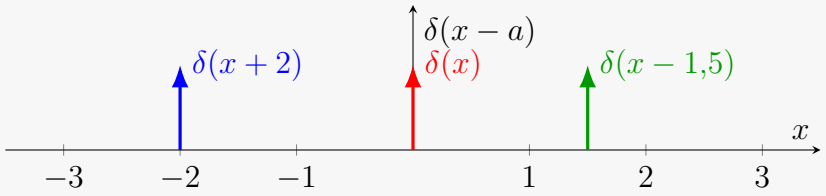
Zaista, $\int f(x)\,d_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} f(x)\,\mathrm{d}x$ je srednja vrednost funkcije $f(x)$ na intervalu $(-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$, koja za $\varepsilon \to 0$ teži ka $f(0)$.

Pomeranje po x-osi

Zamenom $x \to x - a$ impuls se pomera tako da bude koncentrisan u tački $x = a$:

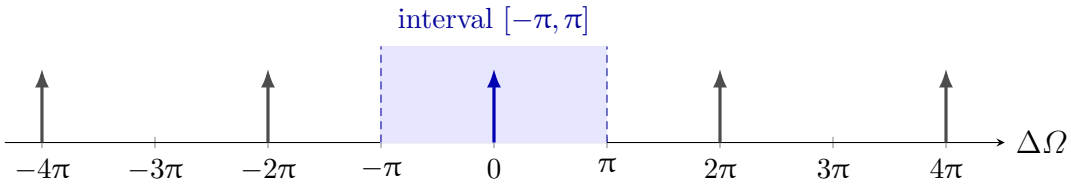
$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0, & x \neq a, \\ \infty, & x = a, \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,\mathrm{d}x = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a). \tag{42}$$

Pomeranje ne menja površinu, menja se samo položaj impulsa. Na slici 9 prikazan je uobičajeni grafički prikaz delta funkcije: strelica jedinične površine u tački $x = a$.



Slika 9. Grafički prikaz Dirakove delta funkcije pomerene u tačke $a = -2$, $a = 0$ i $a = 1{,}5$. Visina strelice označava površinu impulsa, koja je jednaka 1, a ne vrednost funkcije.

Dakle, moramo odrediti površinu jednog Dirakovog impulsa. Suma $\sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\Omega n}$ je periodična po $\Delta\Omega$ sa periodom 2π, jer je $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Delta\Omega+2\pi)n} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\Omega n}$ za celobrojno n, pa su svi impulsi međusobno jednaki (slika 10). Kada bismo integralili od $-\infty$ do ∞, sabrali bismo površine beskonačno mnogo jednakih impulsa i dobili beskonačno, što nam ništa ne govori. Zato uzimamo samo parče ose koje sadrži tačno jedan impuls. Najprirodniji izbor je interval $[-\pi, \pi]$, jer je impuls u $\Delta\Omega = 0$ u sredini intervala, a susedni impulsi, u $\pm 2\pi$, su van njega. Interval $[0, 2\pi]$ nije dobar izbor, jer bi impulsi pali tačno na njegove krajeve.



Slika 10. Suma $\sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\Omega n}$ kao povorka međusobno jednakih Dirakovih impulsa u tačkama $\Delta\Omega = 2k\pi$. Površina impulsa je zasad nepoznata. Integral po celoj osi sabrao bi beskonačno mnogo impulsa, pa integralimo samo po osenčenom intervalu $[-\pi, \pi]$, koji sadrži tačno jedan impuls, onaj u $\Delta\Omega = 0$.

Radi kraćeg zapisa, u integralima koji slede promenljivu $\Delta\Omega$ označavamo sa Ω. Ovaj račun treba shvatiti heuristički: suma $\sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Delta\Omega n}$ ne konvergira u klasičnom smislu, pa je i zamena redosleda sumiranja i integracije u nastavku heuristička, a precizan smisao rezultat dobija u smislu distribucija (generalisanih funkcija). Strogo opravdanje dato je u Dodatku A na kraju dokumenta. Dakle:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n} \right) \mathrm{d}\Omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n} \mathrm{d}\Omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n, \tag{43}$$

gde je

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n} \mathrm{d}\Omega. \tag{44}$$

Razlikujemo dva slučaja: 1) $n = 0$:

$$I_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega 0}}^{1} \mathrm{d}\Omega = 2\pi \tag{45}$$

i 2) $n \neq 0$:

$$I_{n,n\neq 0} = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\mathrm{d}\Omega = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \Omega n + \mathrm{j} \sin \Omega n)\, \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{46}$$

jer podintegralna funkcija na intervalu dužine 2π obuhvata tačno $|n|$ celih perioda, u kojima se pozitivne i negativne poluperiode međusobno ponište. Tako se dobija da samo jedan član u sumi ima nenultu vrednost: 2π, pa je konačno:

$$\langle \mathbf{e}^{(\Omega_1)}, \mathbf{e}^{(\Omega_2)} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega_2-\Omega_1)n} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega_2 - \Omega_1 + 2k\pi\right). \tag{47}$$

Strogo opravdanje ovog računa, preko konačnih suma i limesa u smislu distribucija, dato je u Dodatku A na kraju dokumenta.

3.3 DTFT i inverzna DTFT

Dokazom ortogonalnosti, zaokružili smo i poslednji korak za definiciju Furijeove transformacije diskretnog signala (DTFT) koja je data izrazom 35 i inverzne Furijeove transformacije diskretnog signala (IDTFT) koja je data izrazom 34. Radi preglednosti, ponavljamo izraze za DTFT i IDTFT signala:

$$\boxed{X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n},} \tag{48}$$

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\mathrm{d}\Omega.} \tag{49}$$

$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)$ se naziva i „spektar signala“ $x[n]$.

3.4 Osobine DTFT-a

U nastavku se par signal–spektar označava sa $x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)$. Kao što smo videli ranije spektar $X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)$ je periodičan po Ω sa periodom 2π, jer je $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\Omega+2\pi)n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}$ za svako celobrojno n.

Ponekad nije moguće naći DTFT proizvoljnog signala što se događa kada suma ne konvergira. Za sada se nećemo baviti ovim slučajem i u nastavku, prilikom opisa osobina DTFT-a, pretpostavljamo da sve sume i integrali konvergiraju. Osobine DTFT-a, sa izvođenjima, mogu se naći i u [OS10, PM07].

Linearnost. Ako je $x_1[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$ i $x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$, onda za proizvoljne konstante a i b važi

$$a\, x_1[n] + b\, x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} a\, X_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) + b\, X_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}). \tag{50}$$

Dokaz. Primenom definicije (48) i linearnosti sume:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \big(a\, x_1[n] + b\, x_2[n]\big)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n} = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n} + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n} = a\, X_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) + b\, X_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}).$$

□

Pomeraj u vremenu (indeksu sekvence). Za ceo broj n_0 važi

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n_0}\, X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right). \tag{51}$$

Dakle, pomeraj u vremenu ne menja modul spektra, već samo dodaje linearnu fazu $-\Omega n_0$.

Dokaz. Uvedimo smenu $m = n - n_0$, tj. $n = m + n_0$. Kako n može uzeti vrednost bilo kog celog broja, isto važi i za m, pa je

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega(m+n_0)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega m} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n_0}\, X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right).$$

□

Pomeraj u frekvenciji. Za realno Ω_0 važi

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n}\, x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega-\Omega_0)}\right). \tag{52}$$

Množenje kompleksnom sinusoidom pomera spektar za Ω_0 duž frekvencijske ose. Ova osobina se naziva još i osobinom modulacije jer se upravo množenje kompleksnom sinusoidom koristi za modulaciju signala u telekomunikacijama.

Dokaz. Direktno iz definicije:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n}\, x[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\Omega-\Omega_0)n} = X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega-\Omega_0)}\right),$$

jer je poslednja suma upravo izraz (48) izračunat u tački $\Omega - \Omega_0$. □

Teorema o konvoluciji – svojstvo konvolucije. Neka je $y[n]$ konvolucija sekvenci $x[n]$ i $h[n]$:

$$y[n] = (x * h)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k].$$

Tada je

$$y[n] = (x * h)[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)\, H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}). \tag{53}$$

Konvolucija u vremenskom domenu postaje množenje u frekvencijskom domenu.

Dokaz. Zamenom izraza za $y[n]$ u definiciju i zamenom redosleda sumiranja dobijamo

$$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n} \right).$$

Unutrašnja suma je DTFT niza $h[n]$ pomerenog za k, pa je prema osobini pomeraja u vremenu jednaka $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k}\, H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$. Odatle je

$$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega k} = X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)\, H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}).$$

Isti rezultat dobija se i bez računanja konvolucije, ako je $h[n]$ impulsni odziv LTI sistema. Kao što smo videli u izrazu 2, kompleksna sinusoida je sopstvena funkcija LTI sistema. Sistem je samo skalira frekvencijskim odzivom $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega(n-k)} = H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}.$$

Inverzna Furijeova transformacija (49) predstavlja ulazni signal kao linearnu kombinaciju kompleksnih sinusoida $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}$, $-\pi \le \Omega \le \pi$, sa težinama $\frac{1}{2\pi}X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)\,\mathrm{d}\Omega$:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\,\mathrm{d}\Omega.$$

Sistem je linearan, pa se odziv na ovu kombinaciju dobija kao ista kombinacija odziva na pojedinačne sinusoide. Pri tome se svaka sinusoida samo pomnoži svojim faktorom $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$:

$$y[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)\underbrace{H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}}_{\text{odziv na } \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)\,H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\,\mathrm{d}\Omega.$$

Poslednji izraz ima oblik inverzne Furijeove transformacije (49), pa je izraz u zagradi upravo spektar (Furijeova transformacija) odziva (izlaznog signala): $Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)\,H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$. Svaku frekvencijsku komponentu sa ulaza sistem, dakle, samo pojačava (ili slabi) za $|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})|$ i fazno pomera za $\arg H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$. □

Proizvod u vremenu – periodična konvolucija u frekvenciji. Neka je $y[n]$ proizvod sekvenci $x[n]$ i $w[n]$, $y[n] = x[n]\,w[n]$. Tada je

$$y[n] = x[n]\,w[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda}\right)W\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega-\lambda)}\right)\,\mathrm{d}\lambda. \tag{54}$$

Množenje u vremenskom domenu postaje konvolucija u frekvencijskom domenu.

Dokaz. Zamenimo $x[n]$ inverznom Furijeovom transformacijom (49), uz promenljivu integracije λ, i zamenimo redosled sumiranja i integracije:

$$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n]\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda n}\,\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda}\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\Omega-\lambda)n}\right)\mathrm{d}\lambda.$$

Suma u zagradi je DTFT niza $w[n]$ izračunata u tački $\Omega - \lambda$, tj. $W\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega-\lambda)}\right)$, čime je tvrđenje dokazano. □

Ovo je dualna osobina teoremi o konvoluciji. Primetimo da je konvolucija u (54) periodična: oba spektra su periodična sa periodom 2π, pa se integrali samo po jednoj periodi, i to po bilo kojoj, jer je podintegralna funkcija periodična po λ. Osobina ima veliku praktičnu važnost, jer računar uvek radi sa konačnim brojem odbiraka. Kada iz dugog signala izdvojimo N odbiraka, mi ga zapravo množimo pravougaonim nizom $w[n] = \mathrm{rect}_N[n]$, pa je spektar izdvojenog dela periodična konvolucija spektra signala i spektra pravougaonog niza. Na ovu činjenicu vratićemo se kod curenja spektra i prozorskih funkcija [OS10]. Pomeraj u frekvenciji je specijalan slučaj ove osobine, za $w[n] = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n}$.

Konjugovana simetrija za realne signale. Ako je $x[n]$ realan niz, onda je

$$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-\Omega)}\right) = X^*\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right). \tag{55}$$

Ako spektar napišemo u algebarskom i u polarnom obliku,

$$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right) = X_R(\Omega) + \mathrm{j}\, X_I(\Omega) = \left|X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)\right| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(\Omega)}, \qquad \theta(\Omega) = \arg X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right),$$

iz (55) slede osobine:

$$X_R(-\Omega) = X_R(\Omega) \qquad \text{(realni deo je paran)}, \tag{56}$$
$$X_I(-\Omega) = -X_I(\Omega) \qquad \text{(imaginarni deo je neparan)}, \tag{57}$$
$$\left|X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-\Omega)}\right)\right| = \left|X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)\right| \qquad \text{(modul je paran)}, \tag{58}$$
$$\theta(-\Omega) = -\theta(\Omega) \qquad \text{(argument je neparan)}. \tag{59}$$

Dokaz. Pošto je $x[n]$ realno, važi $x^*[n] = x[n]$, pa je

$$X^*\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}\right)^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(-\Omega)n} = X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-\Omega)}\right).$$

Iz (55) je $X_R(-\Omega) + \mathrm{j}X_I(-\Omega) = X_R(\Omega) - \mathrm{j}X_I(\Omega)$. Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova dobijamo (56) i (57). Isto se vidi i direktno: pomoću Ojlerove formule $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n} = \cos(\Omega n) - \mathrm{j}\sin(\Omega n)$ i realnosti $x[n]$ je

$$X_R(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cos(\Omega n), \qquad X_I(\Omega) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\sin(\Omega n),$$

a kosinus je parna, a sinus neparna funkcija od Ω.

Konjugovanjem izraza u polarnom zapisu dobijamo $X^*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = |X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)|\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta(\Omega)}$, pa (55) sada glasi

$$\left|X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-\Omega)}\right)\right| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(-\Omega)} = \left|X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)\right| \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta(\Omega)}.$$

Dva kompleksna broja su jednaka ako imaju isti modul i isti argument (do na 2π), odakle slede (58) i (59). Modul se može dobiti i direktno: $|X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-\Omega)}\right)| = |X^*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})| = |X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)|$, jer konjugovanje ne menja modul. □

Posledica je da je spektar realnog signala potpuno određen svojim vrednostima na intervalu $0 \le \Omega \le \pi$; vrednosti za $-\pi \le \Omega < 0$ dobijaju se konjugovanjem.

Parsevalova teorema. Pre nego što uvedemo Parsevalovu teoremu, definišimo trenutnu snagu, energiju i srednju snagu signala. Trenutna snaga diskretnog signala se definiše sa

$$p[n] = \left|x[n]\right|^2, \tag{60}$$

dok je energija

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right|^2. \tag{61}$$

Srednja snaga signala se definiše na određenom „vremenskom“ intervalu. Periodični signali (koji nisu jednaki nuli) imaju beskonačnu energiju, jer se ista perioda ponavlja

beskonačno mnogo puta, pa se za njih umesto energije koristi srednja snaga, tj. prosečna vrednost trenutne snage na jednoj periodi dužine N:

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \left|x[n]\right|^2. \tag{62}$$

Parsevalova teorema tvrdi da je energija signala jednaka integralu kvadrata modula spektra na jednoj periodi, podeljenom sa 2π:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)\right|^2 \mathrm{d}\Omega. \tag{63}$$

Stoga se često $\left|X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)\right|^2$ naziva i spektralnom gustinom energije (engl. *energy spectral density*, ESD).

Dokaz. Napišimo $|x[n]|^2 = x[n]\, x^*[n]$ i zamenimo $x^*[n]$ konjugovanim izrazom za inverznu transformaciju (49):

$$x^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}\, \mathrm{d}\Omega.$$

Tada je, uz zamenu redosleda sumiranja i integracije,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n} \right) \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right) X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)\, \mathrm{d}\Omega.$$

Pošto je $X^*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\, X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right) = |X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)|^2$, tvrđenje je dokazano. □

Tabelarni pregled osobina dat je u tabeli 1.

Tabela 1. Osnovne osobine DTFT-a.

Osobina	Signal	DTFT
Linearnost	$a\, x_1[n] + b\, x_2[n]$	$a\, X_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) + b\, X_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$
Pomeraj u vremenu	$x[n - n_0]$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n_0}\, X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)$
Pomeraj u frekvenciji	$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n}\, x[n]$	$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega-\Omega_0)}\right)$
Konvolucija	$(x * h)[n]$	$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)\, H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$
Proizvod u vremenu	$x[n]\, w[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda})\, W(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega-\lambda)})\, \mathrm{d}\lambda$
Konjugovana simetrija	$x[n]$ realan	$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-\Omega)}\right) = X^*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$
Parsevalova teorema	$\sum_n \|x[n]\|^2$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right)\|^2\, \mathrm{d}\Omega$

4 Furijeova transformacija kontinualnih signala – FT

Za kontinualne signale (npr. $x(t)$) takođe važi da se mogu predstaviti linearnom kombinacijom kompleksnih sinusoida $e_\omega(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$. Kako bismo došli do izraza za Furijeovu transformaciju kontinualnih signala i njenu inverznu transformaciju, možemo poći od DTFT-a.

Do sada smo Furijeovu analizu gradili postepeno: od DFT-a, preko DTFS-a, do DTFT-a, i svaki put smo signal razlagali u bazis kompleksnih sinusoida. Kontinualni signal $x(t)$ možemo posmatrati kao limes diskretnog signala čiji su odbirci sve gušći. Ako to uradimo pažljivo, sume iz DTFT-a postaju Rimanove sume. Kada korak teži nuli, one prelaze u integrale, i time dobijamo Furijeovu transformaciju (FT) kontinualnih signala. Klasično izlaganje Furijeove transformacije i Furijeovog reda kontinualnih signala može se naći u [OWN97].

4.1 Odabiranje i veza između analogne i digitalne učestanosti

Neka je $x(t)$ kontinualan signal, a $T > 0$ korak (perioda) odabiranja. Niz odbiraka je

$$x_d[n] = x(nT), \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{64}$$

a njegova DTFT je

$$X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}. \tag{65}$$

Kompleksna sinusoida $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ kontinualnog vremena, gde je ω izraženo u rad/s, u trenucima $t = nT$ daje niz $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega nT} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}$. Prirodna veza između digitalne učestanosti Ω (u rad/odbirku) i analogne učestanosti ω je zato

$$\Omega = \omega T. \tag{66}$$

Osnovni interval $-\pi \le \Omega \le \pi$ odgovara intervalu $-\pi/T \le \omega \le \pi/T$. Kada $T \to 0$, taj interval se širi na celu realnu osu.

4.2 Furijeova transformacija kao Rimanova suma

Zamenimo (66) u (65) i pomnožimo obe strane sa T:

$$T\,X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}\big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega nT}\,T. \tag{67}$$

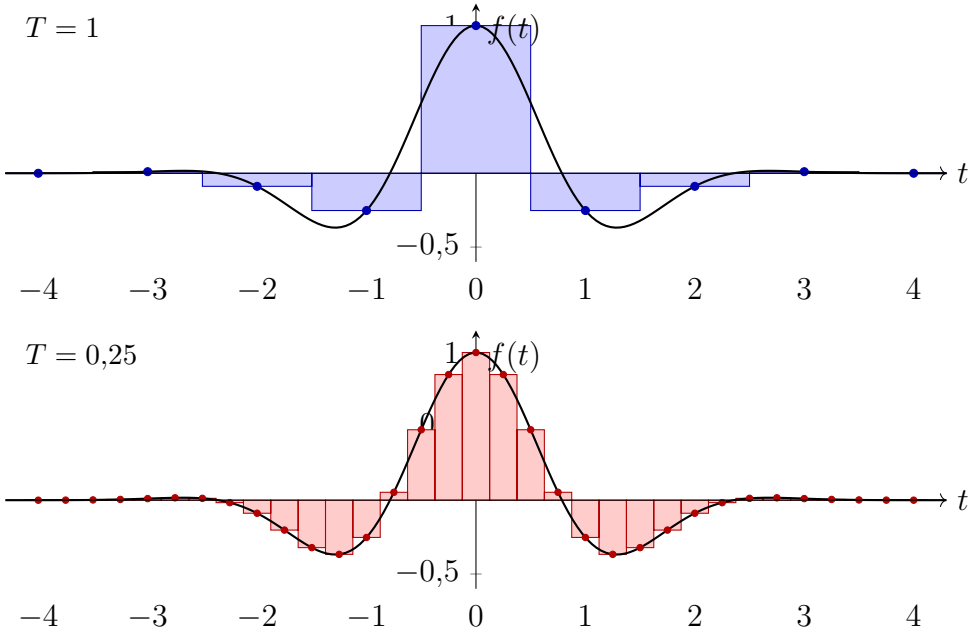
Desna strana je Rimanova suma funkcije $f(t) = x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$ na podeli realne ose tačkama $t_n = nT$. Svaki sabirak $f(t_n)\,T$ je površina pravougaonika širine T i visine $f(t_n)$ (primer na slici 11). Kada $T \to 0$, podela postaje sve finija, pa suma teži integralu:

$$\lim_{T\to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega nT}\,T = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t. \tag{68}$$

Ovu graničnu vrednost definišemo kao Furijeovu transformaciju kontinualnog signala:

$$\boxed{X(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to 0} T\,X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}\big)\,.} \tag{69}$$

Primetimo da je faktor T neophodan. Bez njega bi suma u (65) rasla kao $1/T$, jer se po jedinici vremena sabira sve više odbiraka. Sa njim svaki odbirak daje doprinos srazmeran dužini intervala koji predstavlja.



Slika 11. Rimanova suma iz (67) za $x(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$ i $\omega = 2$. Prikazan je realni deo podintegralne funkcije, $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}\cos(2t)$ (puna linija). Svaki pravougaonik ima širinu T i visinu $f(nT)$. Zbir njihovih površina (sa znakom) je $T\,\mathrm{Re}\{X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}\big)\}$. Što je T manje, pravougaonici sve bolje prate krivu, pa je zbir sve bliži integralu.

4.3 Inverzna Furijeova transformacija

Polazimo od inverzne Furijeove transformacije diskretnog signala (49). Kako je $x[n] = x(nT)$, za svako T važi:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\big)\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\,\mathrm{d}\Omega.$$

Smenom promenljive $\Omega = \omega T$, $\mathrm{d}\Omega = T\,\mathrm{d}\omega$, granice $\pm\pi$ prelaze u $\pm\pi/T$:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} \underbrace{T\,X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}\big)}_{\to X(\mathrm{j}\omega)}\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\, nT}\,\mathrm{d}\omega. \tag{70}$$

Ovde se faktor T pojavio iz $\mathrm{d}\Omega = T\mathrm{d}\omega$, i zajedno sa $X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}\big)$ daje isti izraz koji se javlja u (69).

Neka $T \to 0$ i $|n| \to \infty$ tako da proizvod nT teži zadatom trenutku t. Tada:

- granice integrala $\pm\pi/T$ teže $\pm\infty$;
- $T\,X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}\big)$ teži $X(\mathrm{j}\omega)$, prema (69);
- $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega nT}$ teži $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, a $x(nT)$ teži $x(t)$.

Iz (70) tako dobijamo inverznu Furijeovu transformaciju kontinualnog signala $x(t)$:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega.} \tag{71}$$

Tumačenje je isto kao kod DTFT-a. Signal $x(t)$ je linearna kombinacija kompleksnih sinusoida $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ sa težinama $\frac{1}{2\pi}X(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{d}\omega$. Razlika je jedino u tome što sada učestvuju sve učestanosti $\omega \in \mathbb{R}$, a ne samo one iz intervala dužine 2π.

Periodičnost i granični prelaz. Funkcija $T\,X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}\big)$ je periodična po ω sa periodom $2\pi/T$, jer je DTFT periodična po Ω sa periodom 2π, a $\Omega = \omega T$. Spektar $X(\mathrm{j}\omega)$ kontinualnog signala u opštem slučaju nije periodičan, pa se postavlja pitanje kako periodična funkcija može da teži neperiodičnoj. Odgovor je u tome što perioda nije fiksna. Kada $T \to 0$, perioda $2\pi/T$ raste, interval $[-\pi/T, \pi/T]$ jedne periode širi se na celu realnu osu, a ponavljanja odlaze u beskonačnost. Za izvođenje je dovoljno da $T\,X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}\big)$ teži ka $X(\mathrm{j}\omega)$ unutar tog intervala, jer se u (70) integrali samo po njemu. Kako tačno izgleda $T\,X_d\big(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}\big)$ za konačno T i šta se dešava kada T nije dovoljno malo, videćemo u materijalu o odabiranju.

Napomena o strogosti. Izvođenje je heurističko. Prelazak na limes je opravdan kada je $x(t)$ dovoljno „lepa“ funkcija, na primer neprekidna i apsolutno integrabilna, i kada njen spektar dovoljno brzo opada. Tada Rimanova suma zaista teži integralu kada $T \to 0$. Svi rezultati za DTFT iz tabele 1, kao što su linearnost, pomeraji, konvolucija, konjugovana simetrija i Parsevalova teorema, prenose se na FT istim prelaskom na limes: sume postaju integrali, faktor $\frac{1}{2\pi}$ ostaje, a granice $\pm\pi$ prelaze u $\pm\infty$.

4.4 Osobine Furijeove transformacije

U tabeli 2 su osnovne osobine FT-a, bez izvođenja; izvođenja se mogu naći u [OWN97]. Pretpostavljamo $x(t) \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} X(\mathrm{j}\omega)$, $y(t) \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} Y(\mathrm{j}\omega)$ i $h(t) \overset{\mathrm{FT}}{\longleftrightarrow} H(\mathrm{j}\omega)$. Sa a, b su označene konstante, a sa t_0 i ω_1 realni brojevi.

Osobina	Signal	Furijeova transformacija
Linearnost	$a\,x(t) + b\,y(t)$	$a\,X(\mathrm{j}\omega) + b\,Y(\mathrm{j}\omega)$
Pomeraj u vremenu	$x(t - t_0)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\,X(\mathrm{j}\omega)$
Pomeraj u frekvenciji	$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 t}\,x(t)$	$X\big(\mathrm{j}(\omega - \omega_1)\big)$
Skaliranje vremena	$x(at)$, $a \neq 0$	$\dfrac{1}{\lvert a\rvert}\,X\Big(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{a}\Big)$
Inverzija vremena	$x(-t)$	$X(-\mathrm{j}\omega)$
Konjugacija	$x^*(t)$	$X^*(-\mathrm{j}\omega)$
Diferenciranje	$\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$	$\mathrm{j}\omega\,X(\mathrm{j}\omega)$
Integracija	$\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\dfrac{X(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega} + \pi X(0)\,\delta(\omega)$
Konvolucija	$(x * h)(t)$	$X(\mathrm{j}\omega)\,H(\mathrm{j}\omega)$
Množenje	$x(t)\,y(t)$	$\dfrac{1}{2\pi}\,(X * Y)(\mathrm{j}\omega)$
Dualnost	$X(\mathrm{j}t)$	$2\pi\,x(-\omega)$
Konjugovana simetrija	$x(t)$ realan	$X(-\mathrm{j}\omega) = X^*(\mathrm{j}\omega)$
Parsevalova teorema	$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2\,\mathrm{d}t$	$\mathrm{Re}\,X$ i $\lvert X\rvert$ parni, $\mathrm{Im}\,X$ i $\arg X$ neparni $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(\mathrm{j}\omega)\rvert^2\,\mathrm{d}\omega$

Tabela 2. Osnovne osobine Furijeove transformacije kontinualnih signala.

5 Furijeov red kontinualnih signala – FS

Postupak kojim smo iz DTFT-a dobili Furijeovu transformaciju kontinualnih signala možemo primeniti i na DTFS. Tako dobijamo Furijeov red (FS, engl. *Fourier series*) periodičnih kontinualnih signala [OWN97].

5.1 Od DTFS-a do Furijeovog reda

Neka je $x(t)$ periodičan sa periodom T_0 i osnovnom učestanošću $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Na periodi uzmimo N odbiraka, sa korakom $T = T_0/N$. Niz $x[n] = x(nT)$ je tada periodičan sa periodom N, a njegov Furijeov red je, prema izrazima (26) i (25),

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n}, \qquad x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{2\pi}{N}n}.$$

Pošto je $\frac{2\pi}{N}n = \omega_0\,nT$ i $\frac{1}{N} = \frac{T}{T_0}$, normalizovani koeficijent $\tilde{X}[k]/N$ možemo napisati kao

$$\frac{\tilde{X}[k]}{N} = \frac{1}{T_0}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 nT}\,T. \tag{72}$$

To je ponovo Rimanova suma, ovog puta na jednoj periodi $[0, T_0)$. Faktor T se ovde nije morao dodati: sadržan je već u normalizaciji $1/N$. Kada $N \to \infty$ (tj. $T \to 0$), dobijamo koeficijente Furijeovog reda:

$$\boxed{c_k = \lim_{N\to\infty} \frac{\tilde{X}[k]}{N} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}\, \mathrm{d}t.} \tag{73}$$

U sintezi, $\tilde{X}[k]$ je periodično po k sa periodom N (izraz (29)). Zato sumu možemo uzeti po bilo kojih N uzastopnih indeksa, recimo simetrično oko nule:

$$x(nT) = \sum_{k=-\lfloor N/2 \rfloor}^{\lceil N/2 \rceil - 1} \frac{\tilde{X}[k]}{N}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 nT}. \tag{74}$$

Kada $N \to \infty$, opseg indeksa se širi na sve cele brojeve, pa je

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}.} \tag{75}$$

Razlika u odnosu na prelaz DTFT $\to$ FT je u tome šta se dešava sa frekvencijama. Ovde učestanosti $k\omega_0$ ostaju diskretne i ne postaju gušće, jer je ω_0 određeno periodom signala. Raste samo broj harmonika koje odbirci mogu da predstave, do $|k\omega_0| < \pi/T$. Periodičnost koeficijenata $\tilde{X}[k]$ nestaje na isti način kao periodičnost spektra $T\, X_d(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})$: sa porastom N raste i perioda N, pa u limesu ostaje neperiodičan niz koeficijenata c_k.

5.2 Četiri oblika Furijeove analize

Time smo dobili sva četiri oblika Furijeove analize, za diskretne i kontinualne, aperiodične i periodične signale. Oni su sažeti u tabeli 3. Diskretnost u jednom domenu prati periodičnost u drugom, a kontinualni oblici dobijaju se iz diskretnih prelaskom na limes $T \to 0$.

	Aperiodični signali	**Periodični signali**
Diskretno vreme	DTFT: spektar periodičan i kontinualan	DTFS: koeficijenti periodični i diskretni
Kontinualno vreme	FT: spektar aperiodičan i kontinualan	FS: koeficijenti aperiodični i diskretni
Prelaz $T \to 0$	suma $\cdot\, T \to$ integral po $\mathbb{R}$	suma $\cdot\, \frac{1}{N} \to$ integral po periodi

Tabela 3. Četiri oblika Furijeove analize i prelazak na limes iz diskretnog u kontinualno vreme.

Dodatak A. Dirihleovo jezgro i povorka Dirakovih impulsa

U dokazu ortogonalnosti kompleksnih sinusoida beskonačnog trajanja koristili smo sumu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}$ i zamenili redosled sumiranja i integracije. Taj korak nije opravdan uobičajenim pravilima analize. Zamena $\int \sum_n f_n = \sum_n \int f_n$ dozvoljena je kada red konvergira dovoljno „lepo“, na primer ravnomerno ili apsolutno. Ovde to nije slučaj: članovi reda imaju modul $|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}| = 1$, pa ne teže nuli, i red ne konvergira ni za jedno Ω. Izraz $\int \big(\sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\big)\mathrm{d}\Omega$ zato nije integral nijedne funkcije. U ovom dodatku pokazujemo kako se rezultat dobija egzaktno: računamo sa konačnim sumama, a limes uzimamo tek na kraju, i to u smislu u kome je definisana i Dirakova delta funkcija.

Parcijalna suma: Dirihleovo jezgro

Za prirodan broj N posmatrajmo konačnu sumu

$$S_N(\Omega) = \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n} = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \cos(n\Omega). \tag{76}$$

Za $\Omega \neq 2k\pi$ ovo je geometrijski red sa količnikom $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega} \neq 1$:

$$S_N(\Omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}N\Omega} \sum_{m=0}^{2N} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega m} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}N\Omega}\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2N+1)\Omega} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega} - 1}.$$

Iz brojioca izdvojimo $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2N+1)\Omega/2}$, a iz imenioca $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega/2}$. Pošto je $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha} = 2\mathrm{j}\sin\alpha$, dobijamo

$$S_N(\Omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}N\Omega}\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2N+1)\Omega/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega/2}} \cdot \frac{2\mathrm{j}\sin\big((N+\tfrac{1}{2})\Omega\big)}{2\mathrm{j}\sin(\Omega/2)}.$$

Eksponencijalni faktori se poništavaju, jer je $-N\Omega + (N+\tfrac{1}{2})\Omega - \tfrac{1}{2}\Omega = 0$, pa je

$$S_N(\Omega) = \frac{\sin\big((N+\tfrac{1}{2})\Omega\big)}{\sin(\Omega/2)}, \qquad \Omega \neq 2k\pi, \qquad\qquad S_N(2k\pi) = 2N+1. \tag{77}$$

Funkcija S_N se naziva Dirihleovo jezgro (engl. *Dirichlet kernel*). Ona je realna, parna i periodična sa periodom 2π. Dirihleovo jezgro i njegova uloga u konvergenciji Furijeovih redova detaljno su obrađeni u [Fol92].

Tri osobine Dirihleovog jezgra

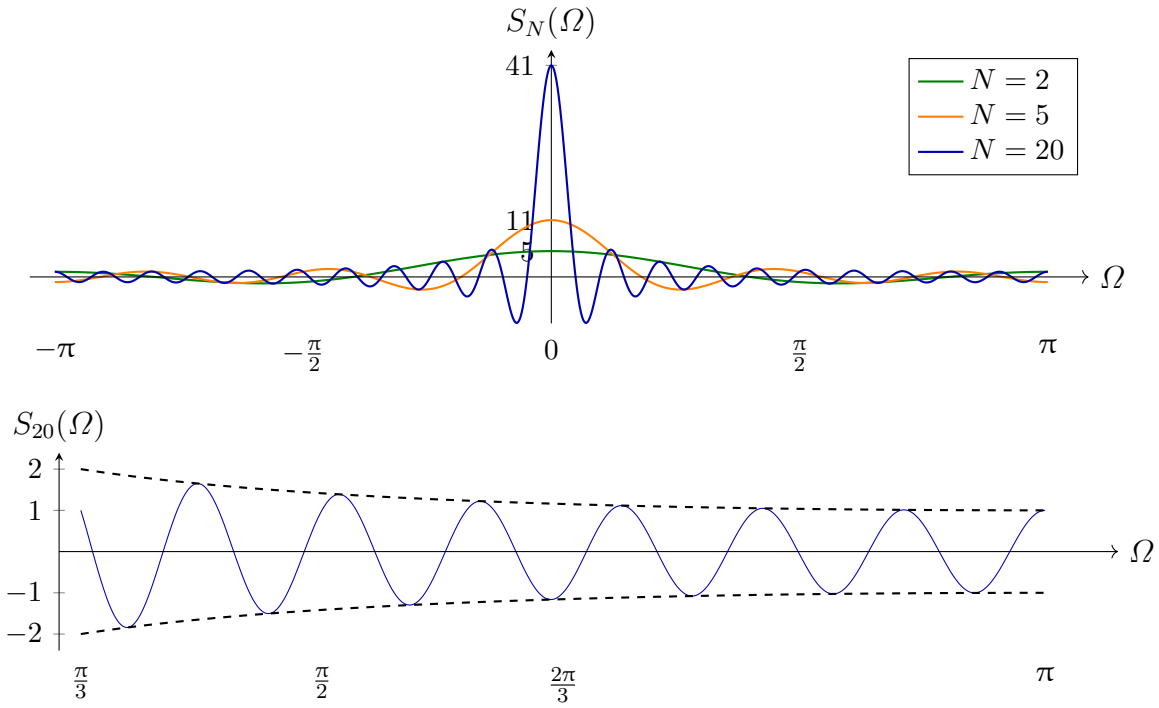
1. Površina na jednoj periodi je uvek 2π. Suma je konačna, pa je zamena sumiranja i integracije sada potpuno legalna:

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_N(\Omega)\,\mathrm{d}\Omega = \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\,\mathrm{d}\Omega = \sum_{n=-N}^{N} I_n = I_0 = 2\pi. \tag{78}$$

2. Vrh u nuli raste neograničeno. $S_N(0) = 2N+1 \to \infty$, a prve nule su u $\Omega = \pm 2\pi/(2N+1)$, pa se glavni vrh sužava.

3. Van nule ne postoji limes tačku po tačku. Za $0 < |\Omega| \le \pi$ važi $|S_N(\Omega)| \le 1/|\sin(\Omega/2)|$, dakle S_N ostaje ograničeno, ali ne teži nuli. Ono sve brže osciluje između anvelopa $\pm 1/\sin(\Omega/2)$. Na primer, $S_N(\pi) = \sin\big((N+\frac{1}{2})\pi\big) = (-1)^N$, što nema limes kada $N \to \infty$.

Prve dve osobine podsećaju na pravougaoni impuls $d_\varepsilon(x)$ iz digresije o Dirakovoj delta funkciji. Treća pokazuje bitnu razliku: tvrdnja da je „suma jednaka nuli za $\Omega \neq 0$“ nije tačna tačka po tačku. Tačna je samo u integralnom smislu, što pokazuje teorema koja sledi.



Slika 12. Gore: Dirihleovo jezgro $S_N(\Omega)$ na jednoj periodi za $N = 2$, 5 i 20. Vrh u nuli ima visinu $2N+1$ i sve je uži, a površina ispod krive je uvek 2π. Dole: uvećan deo za $N = 20$ i $\pi/3 \le \Omega \le \pi$. Jezgro ne teži nuli, već brzo osciluje između anvelopa $\pm 1/\sin(\Omega/2)$ (isprekidano).

Intuicija: šta se dešava pod integralom

Dirakova delta funkcija ima smisla samo pod integralom: ona je određena time šta radi kada se pomnoži nekom funkcijom f i integrali. Zato ne treba da gledamo samo $S_N(\Omega)$, nego proizvod $f(\Omega)\,S_N(\Omega)$, i da se pitamo kolika je površina ispod njega kada N raste. Na slici 13 gore prikazan je taj proizvod za jednu glatku funkciju f i $N = 20$.

Funkciju f napišimo kao zbir konstante i ostatka, $f(\Omega) = f(0) + \big(f(\Omega) - f(0)\big)$. Konstantni deo je lak: prema prvoj osobini, $\int_{-\pi}^{\pi} f(0)\,S_N(\Omega)\,\mathrm{d}\Omega = 2\pi f(0)$ za svako N. Ostaje da vidimo šta se dešava sa ostatkom $\big(f(\Omega) - f(0)\big)S_N(\Omega)$, i tu razlikujemo dve oblasti.

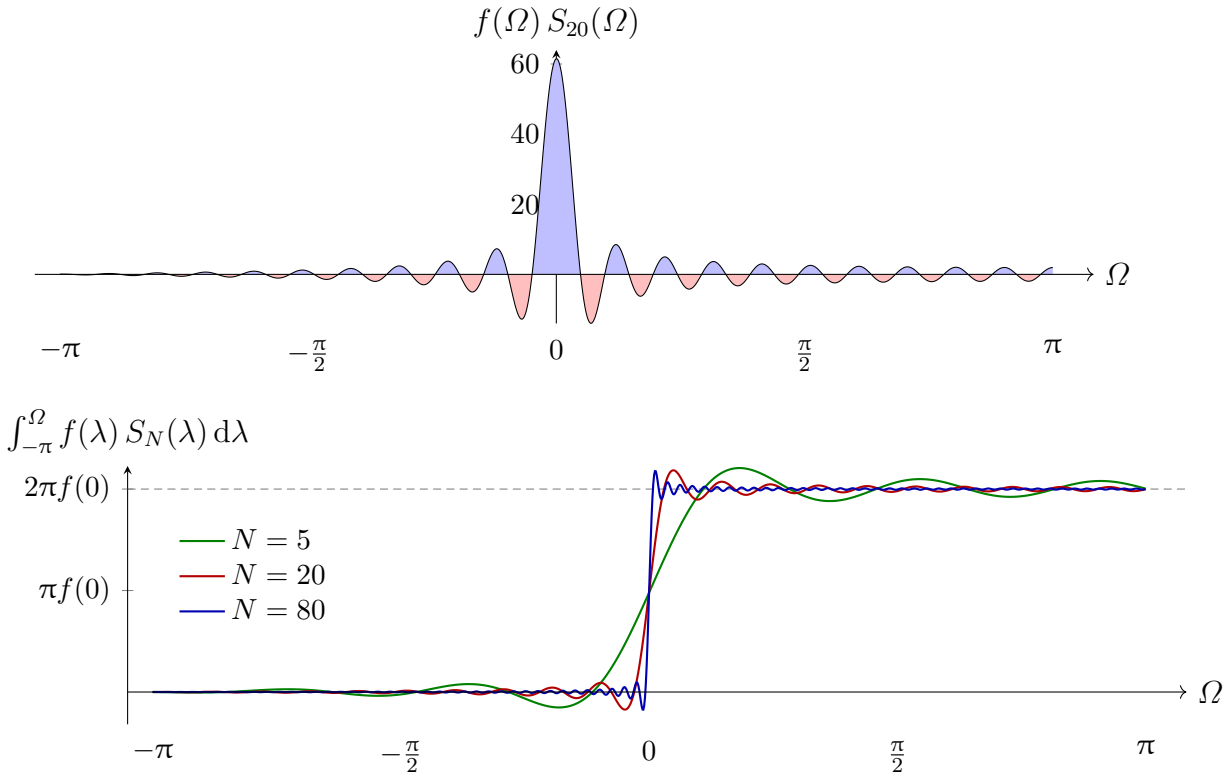
- U okolini nule jezgro ima ogroman vrh, ali je tu $f(\Omega) - f(0) \approx 0$, jer je f neprekidna. Visoki vrh se množi skoro nulom, pa ovaj deo ne doprinosi gotovo ništa.

- Daleko od nule jezgro ne teži nuli, ali sve brže osciluje: perioda oscilacija je približno $2\pi/(N+\frac{1}{2})$. Funkcija f i anvelopa $1/\sin(\Omega/2)$ se, nasuprot tome, menjaju sporo, pa su na dužini jedne oscilacije praktično konstantne. Zato se površina pozitivne poluperiode proizvoda (plavo na slici) i površina susedne negativne poluperiode (crveno) gotovo potpuno ponište. Ostatak je srazmeran tome koliko se f promeni na dužini jedne oscilacije, pa teži nuli kao $1/N$.

Dakle, kada $N \to \infty$, od celog integrala ostaje samo $2\pi f(0)$: doprinos vrednosti funkcije f u jednoj jedinoj tački, $\Omega = 0$. To je tačno osobina izdvajanja Dirakove delta funkcije pomnožene sa 2π.

Isto se vidi i na donjem delu slike 13, gde je prikazan integral proizvoda od $-\pi$ do promenljive gornje granice Ω. Kako N raste, on je sve ravniji svuda osim u okolini nule, gde sve strmije skoči za $2\pi f(0)$. Upravo tako izgleda integral funkcije $2\pi f(\Omega)\,\delta(\Omega)$: nula levo od nule, $2\pi f(0)$ desno od nje, sa skokom u nuli.

Uporedimo ovo sa pravougaonim impulsom $d_\varepsilon(x)$ iz digresije o Dirakovoj delta funkciji. Tamo je funkcija van uskog intervala bila jednaka nuli, pa se doprinos izvan njega uopšte nije pojavljivao. Kod Dirihleovog jezgra funkcija van nule nije jednaka nuli, ali se njen doprinos pod integralom poništava zbog oscilacija. Rezultat u limesu je isti, pa kažemo da i jedan i drugi niz funkcija teže Dirakovoj delta funkciji, ali ne zato što njihove vrednosti teže nečemu u svakoj tački, nego zato što se pod integralom ponašaju isto.



Slika 13. Gore: proizvod glatke funkcije $f(\Omega) = 1{,}5 + 0{,}3\,\Omega - 0{,}05\,\Omega^2$ i Dirihleovog jezgra za $N = 20$. Van okoline nule plave i crvene površine se gotovo ponište. Dole: integral proizvoda od $-\pi$ do Ω za $N = 5$, 20 i 80. Kako N raste, integral je sve ravniji van nule, a u nuli sve strmije skoči za $2\pi f(0)$, što je ponašanje integrala funkcije $2\pi f(\Omega)\,\delta(\Omega)$.

Teorema: Dirihleovo jezgro teži $2\pi\delta(\Omega)$

Za svaku beskonačno diferencijabilnu (glatku) funkciju $f(\Omega)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ važi

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\Omega)\, S_N(\Omega)\, \mathrm{d}\Omega = 2\pi f(0). \tag{79}$$

Teorema precizno zapisuje argument iz prethodnog odeljka. Primetimo uslov da je funkcija f glatka: Dirihleovo jezgro nije takozvano ,,dobro jezgro“, pa tvrđenje ne važi za svaku neprekidnu funkciju. Strogi dokaz zasniva se na razdvajanju $f(\Omega) = f(0) + \big(f(\Omega) - f(0)\big)$ i parcijalnoj integraciji, tj. na posebnom slučaju Riman–Lebegove leme, i može se naći u [SS03, Fol92], a značenje limesa u smislu distribucija detaljno je objašnjeno u [Str03].

Značenje: limes u smislu distribucija

Izraz (79) je upravo ono što se podrazumeva pod

$$\lim_{N\to\infty} S_N(\Omega) = 2\pi\,\delta(\Omega) \qquad \text{na intervalu } [-\pi, \pi]:$$

ovaj limes nije limes vrednosti funkcije u svakoj tački, već limes dejstva pod integralom na glatke funkcije, isto kao kod osobine izdvajanja $\int f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0)$. Pošto je S_N periodično sa periodom 2π, isti rezultat važi na svakom intervalu $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$, pa je na celoj realnoj osi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n} \overset{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty} S_N(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2k\pi), \tag{80}$$

gde znak jednakosti znači da obe strane daju isti rezultat kada se pomnože proizvoljnom glatkom funkcijom $f(\Omega)$ koja je jednaka nuli van nekog ograničenog intervala, i integrale po Ω:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega)\, S_N(\Omega)\, \mathrm{d}\Omega = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2k\pi).$$

Suma sa desne strane je konačna, jer je f različito od nule samo na ograničenom intervalu.

Povratak na ortogonalnost

Zamenom $\Omega \to \Omega_2 - \Omega_1$ u (80) dobijamo, sada sa egzaktnim značenjem,

$$\langle \mathbf{e}^{(\Omega_1)}, \mathbf{e}^{(\Omega_2)} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega_2-\Omega_1)n} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega_2 - \Omega_1 - 2k\pi),$$

što je isti rezultat kao ranije, jer je zbir po svim celim k isti bez obzira na znak ispred $2k\pi$. Račun u glavnom tekstu je, dakle, korektna skraćenica ovog postupka: računa se sa konačnim N, gde su sve operacije dozvoljene, a limes $N \to \infty$ uzima se tek na kraju, u smislu distribucija.

Literatura

[Fol92] Gerald B. Folland. *Fourier Analysis and Its Applications*. Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1992. Reprinted by the American Mathematical Society, 2009.

[OS10] Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schafer. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-Hall Signal Processing Series. Pearson, Upper Saddle River, NJ, 3rd edition, 2010.

[OWN97] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, and S. Hamid Nawab. *Signals and Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2nd edition, 1997.

[PM07] John G. Proakis and Dimitris G. Manolakis. *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 4th edition, 2007.

[PV08] Paolo Prandoni and Martin Vetterli. *Signal Processing for Communications*. CRC Press / Communication Science (Free Online Edition), 2008. Available online at https://www.sp4comm.org/.

[SS03] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction*, volume 1 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[Str03] Robert S. Strichartz. *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*. World Scientific, Singapore, 2003.