
4. DISKRETNA FURIJEOVA TRANSFORMACIJA

4.1 UVOD

Izračunavanje Furijeove transformacije diskretnih signala prema izrazu (2.5) nije jednostavno, jer suma sadrži beskonačan broj članova. Za praktično izračunavanje na digitalnom računaru obično se koristi tzv. Diskretna Furijeova transformacija (DFT) koja se dobija diskretizacijom Furijeove transformacije. Primena Diskretne Furijeove transformacije u digitalnoj obradi signala je velika. Pre svega, DFT se koristi kao neophodan alat u spektralnoj analizi signala. Drugo, DFT omogućava efikasno izvođenje filtriranja u frekvencijskom domenu. Značaj Diskretne Furijeove transformacije u digitalnoj obradi signala potiče od toga što postoje veoma efikasni algoritmi za izračunavanje DFT.

U ovoj glavi će biti objašnjeni definicija i osnovne osobine DFT. Proučiće se veze koje postoje između DFT, Furijeove transformacije diskretnog signala i Furijeove transformacije kontinualnog signala koji je diskretizovan. Efikasni postupci za izračunavanje DFT biće predmet proučavanja u narednom, petom poglavlju.

4.2 DISKRETIZACIJA U FREKVENCIJSKOM DOMENU

U prethodnom poglavlju izveden je izraz (2.5) koji predstavlja spektar diskretnog signala $x[n]$ i koji će radi preglednosti izlaganja biti ponovljen:

$$X(\Omega) = X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \quad (4.1)$$

Kao što je već rečeno, spektar $X(e^{j\Omega})$ je periodična funkcija učestanosti sa periodom 2π . Neka se u osnovnom opsegu $(0, 2\pi)$ izvrši diskretizacija spektra uzimanjem N ekvidistantnih odbiraka sa frekvencijskim razmakom $\Delta\Omega = 2\pi/N$. Smenom $\Omega = 2\pi k/N$, iz jedn. (4.1) se dobija:

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.2)$$

Suma sa beskonačnim brojem članova u (4.2) može se rastaviti na beskonačan broj parcijalnih suma od kojih svaka sadrži N članova:

$$\begin{aligned} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) &= \dots + \sum_{n=-N}^{-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} + \dots = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ako se u jedn. (4.3) u unutrašnjoj sumi izvrši smena promenljive n sa $n - lN$ i promeni redosled sumiranja, dobija se:

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n - lN] \right] e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.4)$$

U izrazu (4.4) suma u zagradi predstavlja periodično ponavljanje signala $x[n]$ sa periodom N . Kako se periodični signali pod određenim uslovima mogu razviti u Furijeov red, može se pisati:

$$x_p[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n - lN] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.5)$$

gde su Furijeovi koeficijenti c_k dati sa:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.6)$$

pa se direktnim poređenjem jedn. (4.4) sa (4.6) dobija:

$$c_k = \frac{1}{N} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.7)$$

odnosno:

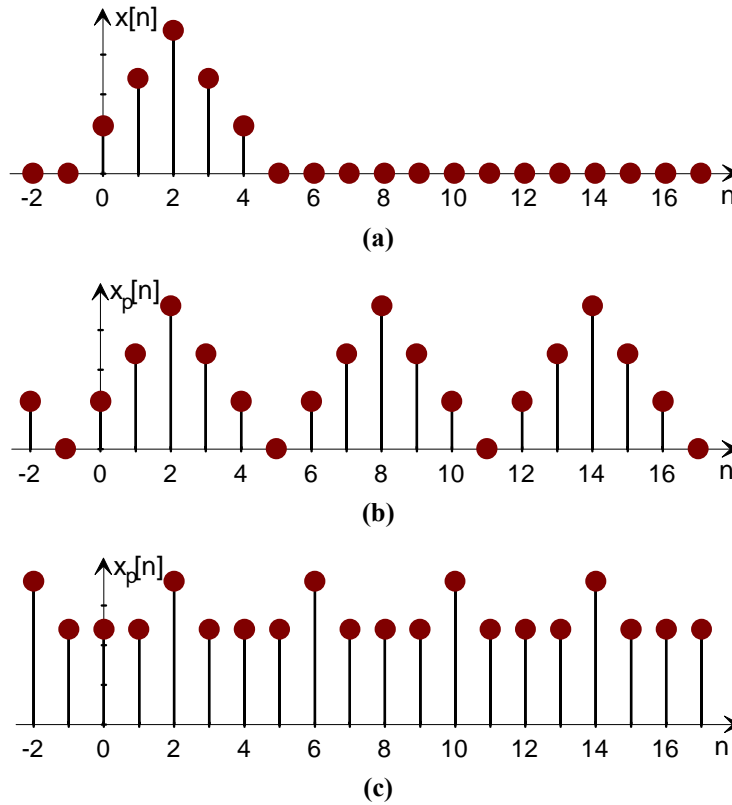
$$x_p[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.8)$$

Relacija (4.8) je veoma važna jer pokazuje mogućnost rekonstrukcije periodične sekvence $x_p[n]$ iz odbiraka spektra $X(e^{j\Omega})$. Međutim, problem rekonstrukcije konačne sekvence $x[n]$ ili spektra $X(e^{j\Omega})$ iz odbiraka spektra nije u potpunosti rešen. Za kompletno rešenje problema rekonstrukcije mora se posmatrati veza između $x_p[n]$ i $x[n]$. Pošto je sekvenca $x_p[n]$ periodično produženje sekvence $x[n]$, jasno je da je za korektnu rekonstrukciju $x[n]$ iz $x_p[n]$ ne sme postojati *preklapanje u vremenskom domenu*. Preklapanje u vremenskom domenu ne postoji ako je sekvenca $x[n]$ ograničene dužine koja je manja od N odbiraka. Na slici 4.1 prikazani su vremenski ograničena sekvenca $x[n]$ dužine L , kao i dve periodično produžene sekvence $x_p[n]$ sa periodima $N \geq L$ (bez preklapanja u vremenskom domenu) i $N < L$ (sa preklapanjem u vremenskom domenu). U prvom slučaju diskretni signal $x[n]$ može biti jednoznačno izdvojen iz $x_p[n]$. U drugom slučaju nije moguće jednoznačno izdvajanje signala $x[n]$ iz periodičnog produženja $x_p[n]$, zbog preklapanja u vremenskom domenu.

Izdvajanjem signala $x[n]$ iz $x_p[n]$ rešen je i problem rekonstrukcije spektra $X(e^{j\Omega})$ iz odbiraka jer se može primeniti jedn. (4.1). Suma u (4.1) ima konačan broj sabiraka N , jer je $x[n]$ sekvenca konačne dužine.

Problemu rekonstrukcije spektra može se pristupiti i na drugi način. Pošto je $x[n] = x_p[n]$ za $0 \leq n \leq N-1$, jedn. (4.8) dobija oblik:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.9)$$



Slika 4.1 Periodično produženje konačne sekvence: (a) originalna sekvence, $L = 5$, (b) produženje bez preklapanja, $L < N = 6$, (c) produženje sa preklapanjem, $L > N = 4$.

Zamenom izraza (4.9) u (4.1) dobija se:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N} \right] e^{-j\Omega n} \quad (4.10)$$

odnosno:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\Omega - 2\pi k/N)n} \right] \quad (4.11)$$

Izraz u srednjoj zagradi predstavlja željenu interpolacionu funkciju i može se napisati u pogodnijem obliku. Ako se definiše funkcija $P(\Omega)$ kao:

$$P(\Omega) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\Omega n} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\Omega N}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{1}{N} \frac{\sin(\Omega N/2)}{\sin(\Omega/2)} e^{-j\Omega(N-1)/2} \quad (4.12)$$

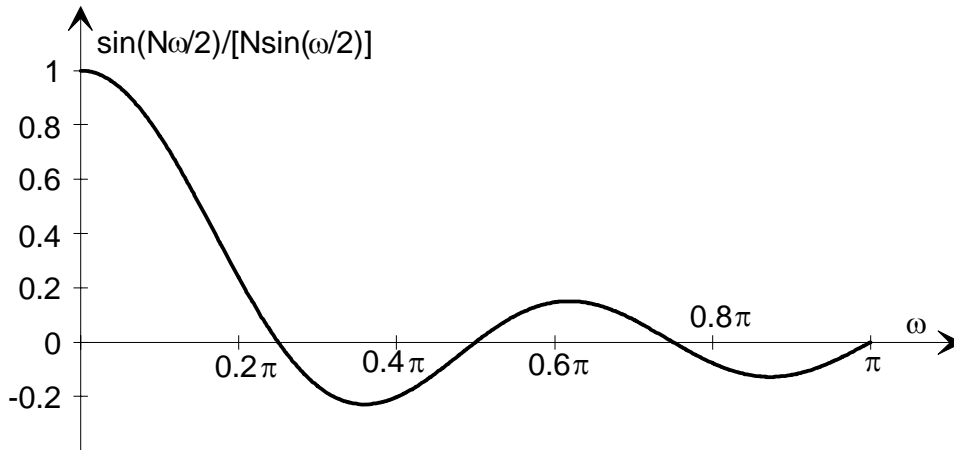
izraz za rekonstrukciju spektra (4.11) može se napisati u konačnom obliku kao:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) P\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \quad (4.13)$$

Interpolaciona funkcija $P(\Omega)$ je periodična funkcija i ima istu ulogu kao aperiodična funkcija $\text{Sinc}\theta = \sin\theta/\theta$ u vremenskom domenu. Grafik funkcije $\sin(\Omega N/2)/[N \sin(\Omega/2)]$ za $N = 8$ je prikazan na slici 4.2. Sa grafika, kao i iz izraza (4.12) lako se uočava da je:

$$P\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (4.14)$$

tako da se u tačkama odabiranja u spektralnom domenu rekonstrukcijom dobijaju tačne vrednosti odbiraka. Eksponencijalni član u (4.12) utiče samo na fazu interpolacione funkcije $P(\Omega)$.



Slika 4.2 Interpolaciona funkcija u frekvencijskom domenu $\sin(\Omega N/2)/[N\sin(\Omega/2)]$.

4.3 DISKRETNÁ FURIJEOVA TRANSFORMACIJA KONAČNE SEKVENCE

Iz izlaganja u prethodnom poglavlju vidi se da je moguće rekonstruisati periodičnu sekvencu $x_p[n]$ i njen spektar $X(e^{j\Omega})$ iz ekvidistantnih odbiraka u spektralnom domenu $X(2\pi k/N)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. U opštem slučaju, odbirci u spektralnom domenu ne omogućavaju jednoznačnu rekonstrukciju originalne aperiodične sekvence $x[n]$. Međutim, u važnom slučaju kada je $x[n]$ sekvenca konačnog trajanja L , periodična sekvenca $x_p[n]$ predstavlja periodično produženje sekvence $x[n]$ sa periodom N . Ako je $N \geq L$, onda sekvenca $x_p[n]$ predstavlja obično periodično ponavljanje sekvence $x[n]$, tako da se $x[n]$ može jednoznačno izdvojiti iz $x_p[n]$ prema formuli:

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & L \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (4.15)$$

U ovom slučaju, dakle, odbirci u spektralnom domenu jednoznačno određuju i originalnu aperiodičnu sekvencu $x[n]$ (dopunjenu sa $N-L$ nula ako je $N > L$). Dakle, za odbirke Furijeove transformacije sekvence konačne dužine L se prema izrazima (4.4), (4.5) i (4.15) dobija:

$$X[k] = X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.16)$$

Izraz (4.16), koji transformiše sekvencu $x[n]$ dužine $L \leq N$ u sekvencu odbiraka u spektralnom domenu $X[k]$ dužine N , naziva se *Diskretna Furijeova transformacija (DFT) sekvence $x[n]$* . Na osnovu (4.8) i (4.15) dobija se izraz za rekonstrukciju sekvence $x[n]$:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.17)$$

koji se naziva *Inverzna Diskretna Furijeova transformacija (IDFT)*. Ako je $L < N$, onda se iz izraza (4.17) dobija $x[n] = 0$ za $L \leq n \leq N-1$.

Kao što se vidi iz jedn (4.16), DFT se izračunava za diskretne učestanosti čiji je inkrement $\Delta\omega = 2\pi/N$, odnosno, na osnovu (3.7), $\Delta F = F_s/N$. Inkrement učestanosti ΔF naziva se *frekvencijska rezolucija DFT* (engl. *bin spacing*).

Jednačine (4.16) i (4.17) predstavljaju samo polaznu osnovu za izračunavanje DFT i IDFT i direktno su primenljive na *kauzalne sekvence konačne dužine*. Već je rečeno da broj elemenata u jednoj periodu N može biti i veći od dužine originalne sekvence $x[n]$. Da bi se dobio povećani broj tačaka u spektru, *originalna sekvenca se može dopuniti nulama* (engl. *zero padding*). Ovakvo dopunjavanje nulama ima važnu primenu u izračunavanju konvolucije uz pomoć DFT.

Ako je sekvenca koja se transformiše nekauzalna, ona se takođe može periodično produžiti pod istim uslovima kao i kauzalna sekvenca. Međutim, u slučaju IDFT potrebna je pažljiva interpretacija rezultata. Naime, nekauzalni deo sekvence pojaviće se na kraju rekonstruisanog signala $x[n]$ u normalnom redosledu, a može se interpretirati kao nekauzalni deo druge periode periodičnog produženja.

Interesantno je primetiti da se tradicionalno DFT izračunava u opsegu učestanosti $0 \leq \Omega < 2\pi$, a ne u opsegu $-\pi \leq \Omega < \pi$ koji je korišćen u drugoj glavi kod izračunavanja Furijeove transformacije. Razlog za promenu opsega učestanosti leži u pogodnijoj interpretaciji komponente čija je učestanost $\Omega = 0$, a koja je predstavljena prvim elementom DFT sekvence. Naime, iz (4.16) se vidi da $X[0]/N$ predstavlja srednju vrednost (jednosmernu komponentu) signala $x[n]$.

4.3.1 MATRIČNI OBLIK DFT

Izrazi (4.16) i (4.17) za direktnu i inverznu diskretnu Furijeovu transformaciju predstavljaju linearne transformacije sekvenci $x[n]$ i $X[k]$. Ako se sekvence $x[n]$ i $X[k]$ predstavljaju kao vektori sa N vrsta i jednom kolonom, \mathbf{x}_N i \mathbf{X}_N respektivno, a transformacioni koeficijenti predstavljaju u vidu matrice \mathbf{W}_N dimenzija $N \times N$, onda se izraz (4.16) može napisati u matričnom obliku:

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{x}_N \quad (4.18)$$

gde je:

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \quad (4.20)$$

Elementi matrice $\mathbf{W}_N[n,k] = e^{-j2\pi nk/N} = W_N^{nk}$ čine kompleksni bazis ortogonalnih diskretnih funkcija i nazivaju se *rotacioni* (engl. *twiddle*) *faktori* zbog toga što se množenjem sa njima menja samo argument kompleksnih brojeva. Rotacioni faktori su periodični i predstavljaju tačke na jediničnom krugu u kompleksnoj ravni.

Inverzna DFT u matričnom obliku na osnovu (4.17) i (4.18) data je sa:

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{X}_N = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \mathbf{X}_N \quad (4.21)$$

odakle jasno sledi:

$$\mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^* = N \mathbf{I}_N \quad (4.22)$$

gde je \mathbf{I}_N jedinična matrica dimenzija $N \times N$. Na osnovu izraza (4.22) može se zaključiti da je transformaciona matrica \mathbf{W}_N ortogonalna matrica. Zato se kaže da DFT i IDFT predstavljaju ortogonalne transformacije.

4.4 OSOBINE DISKRETNE FURIJEOVE TRANSFORMACIJE

Pošto se DFT sekvenca sastoji od odbiraka iz spektra signala dobijenog Furijeovom transformacijom, osobine Furijeove transformacije diskretnih signala koje su analizirane u drugoj glavi važe i za Diskretnu Furijeovu transformaciju. Dakle, DFT ima sledeće osobine:

Linearnost: $ax_1[n] + ax_2[n] \xrightarrow{DFT} aX_1[k] + aX_2[k]$ (4.23)

Periodičnost: $X[k] = X[k + N]$ (4.24)

Konjugovana kompleksnost: $x^*[n] \xrightarrow{DFT} X^*[N - k]$ (4.25)

Između realnog i imaginarnog dela DFT sekvence takođe postoje određene veze koje su identične vezama koje postoje između realnog i imaginarnog dela Furijeove transformacije diskretnog signala. Dakle, ako je $X[k] = X_R[k] + j X_I[k]$, onda u slučaju kada je sekvenca $x[n]$ realna važi:

$$X[k] = X^*[N - k] \quad (4.26)$$

$$X_R[k] = X_R[N - k] \quad (4.27)$$

$$X_I[k] = -X_I[N - k] \quad (4.28)$$

$$|X[k]| = |X[N - k]| \quad (4.29)$$

$$\arg(X[k]) = -\arg(X[N - k]) \quad (4.30)$$

Ako su pored realnosti sekvence $x[n]$, zadovoljene i osobine parnosti ili neparnosti onda važi:

$$x[n] = x[-n] \Rightarrow X[k] \text{ je čisto realna sekvenca} \quad (4.31)$$

$$x[n] = -x[-n] \Rightarrow X[k] \text{ je čisto imaginarna sekvenca} \quad (4.32)$$

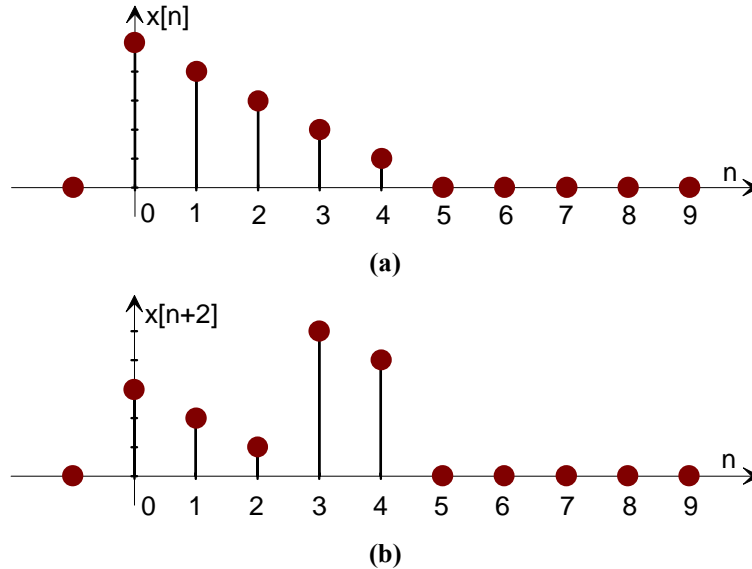
Osobine periodičnosti i simetrije DFT su veoma važne zbog toga što omogućavaju da se za realnu sekvencu $x[n]$ izračunavaju samo vrednosti $H[k]$ za $0 \leq k \leq N/2$, koje odgovaraju vrednostima $H(e^{j\omega})$ za $0 \leq \omega \leq \pi$.

4.5 CIRKULARNA KONVOLUCIJA

Prilikom ispitivanja osobina Furijeove transformacije diskretnih signala u glavi 2, posebna pažnja bila je posvećena Furijeovoj transformaciji konvolucije (poglavlje 2.3.1.5) i Furijeovoj

transformaciji proizvoda dve sekvence (poglavlje 2.3.1.6). Slične veze, samo sa još većim značajem, postoje i između DFT i jedne specijalne vrste konvolucije koja se naziva *cirkularna* (*ciklična, kružna*) *konvolucija*.

Pre svega treba objasniti pojam *cirkularnog pomeraja*. Cirkularni pomeraj u vremenu sekvence konačne dužine može se shvatiti kao pomeraj periodičnog produženja iste konačne sekvence. Na slici 4.3 prikazan je cirkularni pomeraj sekvence dužine $N = 5$ za dva odbirka u levo.



Slika 4.3 Cirkularni pomeraj sekvence: (a) originalna sekvenca, (b) cirkularno pomerena sekvenca za dva odbirka u levo.

Cirkularno pomerena sekvenca ima za transformacioni par:

$$x[n+m] \xleftrightarrow{DFT} W_N^{-mk} X[k] \quad (4.33)$$

Zbog toga što je funkcija W_N^p periodična po p sa periodom N , lako je utvrditi da se za bilo koji pomeraj $m \geq N$ ima isti transformacioni par kao i za kraći pomeraj m_1 , gde je $m = m_1 + m_2 N$, $0 \leq m_1 \leq N-1$, odnosno $m_1 = m \bmod N = \langle m \rangle_N$. U stvari, m_1 predstavlja ostatak kada se m подели sa N .

Cirkularni pomeraj u frekvencijskom domenu se definiše na isti način. Cirkularno pomerena DFT sekvenca ima za transformacioni par :

$$W_N^{mn} x[n] \xleftrightarrow{DFT} X[k+m] \quad (4.34)$$

Da bi objasnili pojam cirkularne konvolucije posmatrajmo dve konačne sekvence dužine N , $x[n]$ i $h[n]$, čije su DFT $X[k]$ i $H[k]$, respektivno. Ako se $X[k]$ i $H[k]$ pomnože član po član, kao rezultat se dobija nova DFT sekvenca, $Y[k]$, sa istim brojem članova N . Dakle, ima se:

$$Y[k] = X[k]H[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.35)$$

Inverzna DFT sekvence $Y[k]$ je:

$$y[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y[k] e^{j2\pi km/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]H[k] e^{j2\pi km/N} \quad (4.36)$$

Zamenom definicionih izraza za $X[k]$ i $H[k]$ u (4.36) dobija se:

$$\begin{aligned}
y[m] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \right] \left[\sum_{l=0}^{N-1} h[l] e^{-j2\pi kl/N} \right] e^{j2\pi km/N} = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sum_{l=0}^{N-1} h[l] \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi k(m-n-l)/N} \right] \quad (4.37)
\end{aligned}$$

Iz elementarne matematike je poznato da izraz u srednjoj zagradi u (4.37) predstavlja geometrijsku progresiju čija je suma članova data izrazom:

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N, & a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a}, & a \neq 1 \end{cases} \quad (4.38)$$

gde se, poređenjem sa (4.37), vidi da je

$$a = e^{j2\pi(m-n-l)/N} \quad (4.39)$$

Iz izraza (4.39) lako se vidi da je $a = 1$ kada je $(m-n-l)$ multipl od N . S druge strane, $a^N = 1$ za bilo koju vrednost $a \neq 0$. Na osnovu toga se iz (4.38) dobija:

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N, & l = m - n + pN = (m-n) \bmod N, \quad p \text{ ceo broj} \\ 0, & \text{drugde} \end{cases} \quad (4.40)$$

Korišćenjem relacija (4.39) i (4.40), izraz (4.37) za $y[m]$ se može napisati u konačnom obliku:

$$y[m] = x[m] \otimes h[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] h\langle m-n \rangle_N = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] x\langle m-n \rangle_N, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.41)$$

koji predstavlja *cirkularnu (kružnu) konvoluciju*. Dakle, može se zaključiti da cirkularna konvolucija dve sekvence i proizvod njihovih DFT sekvenci čine DFT transformacioni par.

Osnovna razlika između linearne konvolucije definisane u poglavlju 1.3.5.1 i cirkularne konvolucije (4.41) je u izračunavanju indeksa članova sekvenci koje ulaze u konvolucionu relaciju. U praktičnom izračunavanju cirkularne konvolucije može se primeniti isti algoritam kao za linearnu konvoluciju koji je opisan u poglavlju 1.3.5.1. Međutim, u prva dva koraka konvolucionog algoritma (refleksija i pomeranje), indeksi se izračunavaju po modulu N , odnosno, operacije nad sekvencama se obavljaju kao da se elementi sa početka sekvence nadovezuju na njen kraj. Odatle dolazi i naziv cirkularna konvolucija. Kao rezultat se dobija da sve tri sekvence imaju istu dužinu N .

Na slici 4.4 je prikazan jedan jednostavan FORTRAN potprogram za direktno izračunavanje cirkularne konvolucije.

4.5.1 IZRAČUNAVANJE LINEARNE KONVOLUCIJE POMOĆU DFT

U izlaganjima u prvoj glavi istaknut je značaj linearne konvolucije prikazane izrazom (1.30) koja daje odziv linearnog kauzalnog diskretnog sistema na proizvoljnu pobudu. S druge strane, veza između cirkularne konvolucije i DFT omogućava primenu DFT za izračunavanje cirkularne konvolucije koja je, kako će se videti u narednoj glavi, izrazito računski efikasna. Stoga bi bilo

veoma interesantno ispitati, da li se, i pod kojim uslovima, može linearna konvolucija izraziti pomoću cirkularne konvolucije.

```

C   IZRACUNAVANJE CIRKULARNE KONVOLUCIJE DVE SEKVENCE
C
C   X - VEKTOR ELEMENATA PRVE SEKVENCE
C   H - VEKTOR ELEMENATA DRUGE SEKVENCE
C   Y - VEKTOR ELEMENATA KONVOLUCIONE SUME
C   N - BROJ ELEMENATA VEKTORA X, Y I H.
C
      SUBROUTINE CIRCON (X,H,Y,N)
      DIMENSION X(1), H(1), Y(1)
      DO 20 K = 1,N
        I = K
        Y(K) = 0.
        DO 10 J = 1,N
          Y(K) = Y(K) + X(J) * H(I)
          I = I - 1
          IF (I.LE.0) I = I + N
        10 CONTINUE
      20 CONTINUE
      RETURN
      END

```

Slika 4.4 FORTRAN potprogram za izračunavanje cirkularne konvolucije dve sekvence.

Kod izračunavanja linearne konvolucije, $y[n] = x[n] * h[n]$, izlazna sekvenca $y[n]$ ima dužinu $N_Y = N_X + N_H - 1$, gde su N_X i N_H dužine sekvenci $x[n]$ i $h[n]$, respektivno. Da bi se odredio transformacioni par sekvence $y[n]$ mora se izračunati DFT sekvence $y[n]$ u N_Y tačaka jer se na taj način potpuno zadržavaju sve informacije o spektru $Y(e^{j\omega})$. Kako je, prema (4.35), $Y[k] = X[k]H[k]$, $0 \leq k \leq N_Y - 1$, DFT spektri $X[k]$ i $H[k]$ moraju takođe biti izračunati u N_Y tačaka. Dakle, sekvence $x[n]$ i $h[n]$ moraju biti dopunjene sa izvesnim brojem nula, prema izrazu:

$$N_{zi} = N_Y - i = N_X + N_H - 1 - i, \quad i = N_X, N_H \quad (4.42)$$

Prethodna analiza odnosila se na izračunavanje linearne konvolucije dve sekvence konačne dužine. U praksi se, naročito u obradi audio signala, često traži linearna konvolucija između kratke sekvence (impulsnog odziva sistema za obradu) i druge znatno duže sekvence (audio signala). Dopunjavanje kratke sekvence velikim brojem nula u takvom slučaju postaje kontraproduktivno jer se primenom DFT ništa ne dobija na brzini izračunavanja. U takvim slučajevima pogodno je primeniti *blok konvoluciju* kod koje se vrši podela dugačke ulazne sekvence na kraće parcijalne sekvence, zatim se izračunavaju linearne konvolucije (koristeći cirkularnu) parcijalnih sekvenci sa impulsnim odzivom, a na kraju se parcijalni rezultati kombinuju na pogodan način. O izračunavanju linearne konvolucije dugačke i kratke sekvence više će biti reči u narednoj glavi, kada budu objašnjeni algoritmi za brzo izračunavanje DFT.

4.6 FREKVENCIJSKE KARAKTERISTIKE DFT

Posmatrajmo signal $x[n] = e^{j\Omega n} = e^{j2\pi nF/F_s}$ čija je učestanost proizvoljna i ne mora se poklapati sa diskretnim učestanostima na kojima se izračunava DFT. Ako se izračuna DFT takvog signala primetiće se da se pojavljuju nenulte vrednosti *svih elemenata DFT sekvence*. Razlog za to je što prema Parsevalovoj teoremi energija izračunata u vremenskom i frekvencijskom domenu mora biti ista. Dakle, ako se učestanost signala ne poklapa sa učestanostima izračunavanja DFT

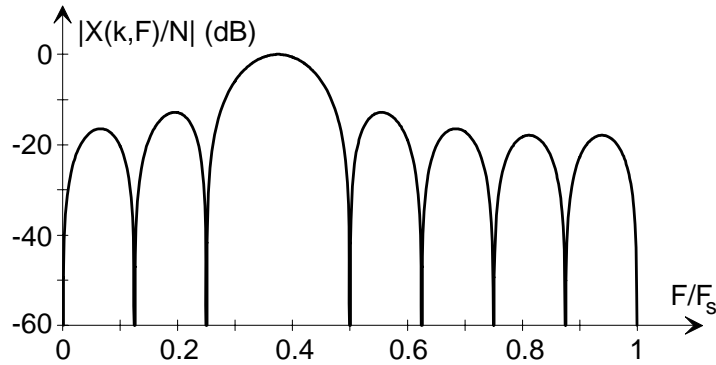
nastaje rasipanje (podela) energije na raspoložive komponente. Da bi bolje ispitali ovu pojavu odredimo k -tu komponentu DFT signala $x[n]$:

$$X(k, F) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi Fn/F_s} W_N^{nk} = \frac{1 - e^{-j2\pi(k/N - F/F_s)N}}{1 - e^{-j2\pi(k/N - F/F_s)}} \quad (4.43)$$

odakle se smenom $\Theta_k = 2\pi(k/N - F/F_s)$ dobija traženi frekvencijski odziv k -tog elementa DFT sekvence:

$$X(\Theta_k) = \frac{\sin(\Theta_k N/2)}{\sin(\Theta_k/2)} e^{-j\Theta_k(N-1)/2} \quad (4.44)$$

koji je, kao što se vidi, po obliku isti kao i interpolaciona funkcija u frekvencijskom domenu $P(\Omega)$ data sa (4.12). Amplitudska karakteristika frekvencijskog odziva DFT (u dB), normalizovana sa N , prikazana je na slici 4.5 za slučaj $N = 8$, $k = 3$. Fazna karakteristika frekvencijskog odziva DFT je linearna.



Slika 4.5 Amplitudska karakteristika DFT za slučaj $N = 8$, $k = 3$.

Amplitudska karakteristika k -tog elementa DFT ima maksimalnu vrednost za učestanosti u okolini $\Theta_k = 0$, tj. $F = kF_s/N$ (glavni luk), i ima nule na učestanostima $F = (k-r)F_s/N$, $r \neq 0$. Delovi karakteristike između nula (bočni lukovi) su manje, ali ne beznačajne amplitude. Ova pojava se naziva *curenje spektra* i rezultat je direktne primene DFT na sekvencu $x[n]$. Spektralno curenje je nepoželjna osobina koja utiče na kvalitet analize spektra. Da bi se smanjilo spektralno curenje primenjuju se razne modifikacije sekvence $x[n]$ koje će biti opisane u narednom izlaganju.

Spektralno curenje je posledica nepoklapanja učestanosti ulaznog signala sa nekom od učestanosti na kojima se izračunava DFT. U radu [H-2] je pokazano da u tom slučaju, pri periodičnom produženju sekvence obavezno nastaju diskontinuiteti na krajevima periode. Kako takvi diskontinuiteti proizvode širok spektrar učestanosti, jasno je zašto se pojavljuju spektralne komponente kojih nema u originalnom aperiodičnom signalu. Prema tome, modifikacija ulaznog signala u cilju smanjenja spektralnog curenja mora da smanji, ili u potpunosti ukloni diskontinuitete u periodičnom produženju ulaznog signala.

Sa slike 4.5 može se uočiti da je širina glavnog luka dvostruko veća od frekvencijskog razmaka DFT odbiraka. To znači da će se glavni lukovi amplitudskih karakteristika susednih DFT odbiraka preklapati sa jednom polovinom svoje širine. Kao posledica te činjenice, ako spektralna komponenta ulaznog signala pada u region preklapanja dve susedne komponente, njena amplituda ne može biti precizno detektovana jer će proizvesti značajne vrednosti dva DFT odbirka. Slabljenje amplitude spektralne komponente zbog curenja u druge DFT odbirke naziva se *scalloping loss* ili *picket-fence effect*.

Frekvencijska selektivnost DFT se definiše kao sposobnost razdvajanja komponenata u spektru ulaznog signala. Komponente koje pripadaju glavnom luku ne mogu se razdvojiti. Dakle, selektivnost DFT zavisi od broja tačaka u kojima se izračunava DFT ali i od načina modifikacija ulazne sekvence radi smanjenja spektralnog curenja jer takva modifikacija utiče na širinu glavnog luka.

Na kraju, definišimo i *ekvivalentni propusni opseg šuma* (engl. *equivalent noise bandwidth - ENBW*) koji se definiše kao propusni opseg idealnog filtra koji propušta beli šum, čija je snaga jednaka snazi belog šuma na odgovarajućem DFT izlazu. *ENBW* može poslužiti kao mera za kvalitet raznih modifikacionih funkcija ulaznog signala.

4.7 MODIFIKACIJA SIGNALA PROZORSKIM FUNKCIJAMA

Da bi se popravile frekvencijske karakteristike DFT, odbirci ulaznog signala se mogu pomnožiti odbircima *težinske* ili *prozorske funkcije* $w[n]$. Dakle, modifikovana ulazna funkcija postaje:

$$y[n] = w[n]x[n] \quad (4.45)$$

a njena diskretna Furijeova transformacija:

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} w[n]x[n]W_N^{nk} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W[n]X[k-n] \quad (4.46)$$

gde je ujedno pokazano da rezultatni spektar predstavlja cirkularnu konvoluciju spektara ulaznog signala $X[k]$ i prozorske funkcije $W[k]$.

4.7.1 PRAVOUGAONA PROZORSKA FUNKCIJA

Pravougaona prozorska funkcija definisana je na sledeći način:

$$w_R[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{drugde} \end{cases} \quad (4.47)$$

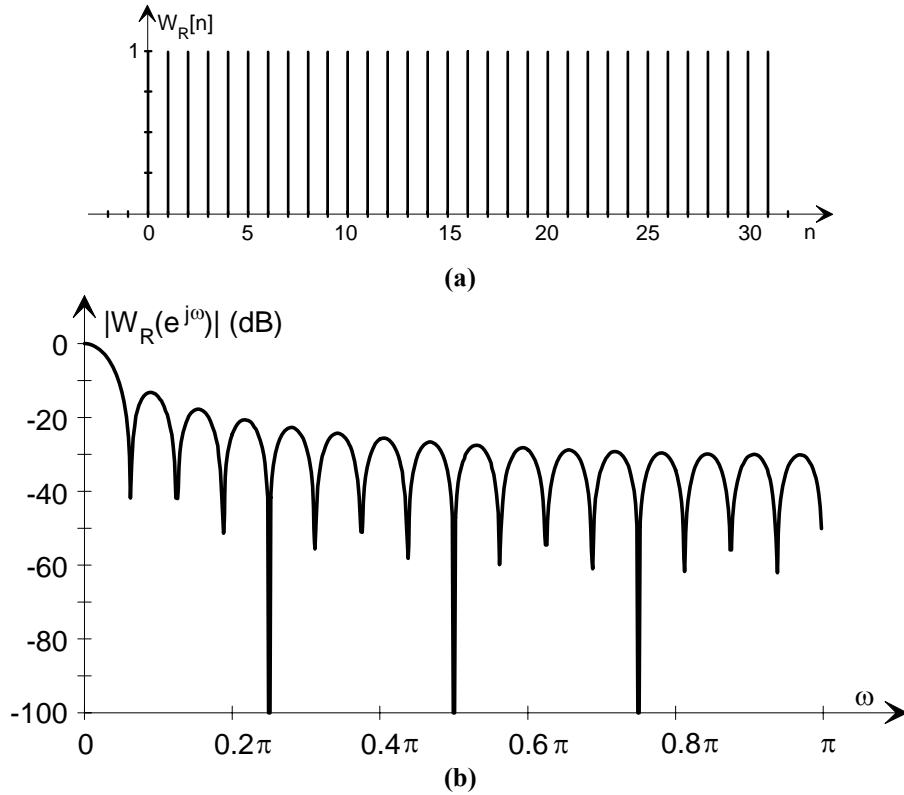
i prikazana na slici 4.6a za slučaj $N = 32$. Kao što se vidi, pravougaona prozorska funkcija ne vrši nikakvu modifikaciju ulaznog signala osim eventualnog odsecanja. To znači da svi do sada izvedeni rezultati važe i za pravougaonu prozorsku funkciju, pa im se na ovaj način može dati novo tumačenje. Spektar pravougaone prozorske funkcije dat je izrazom:

$$W_R(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\Omega n} = \frac{1 - e^{-j\Omega N}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{\sin(\Omega N / 2)}{\sin(\Omega / 2)} e^{-j\Omega(N-1)/2} \quad (4.48)$$

i ima isti oblik kao interpolaciona funkcija $P(\Omega)$ (4.12), ili frekvencijski odziv DFT (4.44).

Na slici 4.6b prikazana je amplitudska karakteristika pravougaone prozorske funkcije. Širina glavnog luka u spektru pravougaone prozorske funkcije je $4\pi/N$. Osnovni nedostatak pravougaone prozorske funkcije je malo slabljenje bočnih lukova u amplitudskom spektru. Amplituda prvog bočnog luka iznosi 22% (-13 dB) od amplitude glavnog luka. Takođe, viši bočni lukovi opadaju sa nagibom od -6 dB/oktavi. Kada se formira konvolucija u spektralnom domenu između spektra $W_R(e^{j\Omega})$ i spektra ulaznog signala, zbog postojanja jakih bočnih lukova nastaje značajna

modifikacija spektra ulaznog signala, tj. $Y[k] \neq X[k]$. Zbog ovakvih karakteristika pravougaone prozorske funkcije, direktna primena DFT na ulazni signal onemogućava detekciju slabih signala u prisustvu jačih signala.



Slika 4.6 (a) Pravougaona prozorska funkcija, $N = 32$, (b) amplitudska karakteristika.

Velika amplituda bočnih lukova u spektru pravougaone prozorske funkcije je posledica *naglog prekida sekvence* $w_R[n]$. Poznato je da sekvence koje imaju manje bočne lukove u spektru nemaju diskontinuitete u vremenskom domenu. U spektralnoj analizi, projektovanju FIR sistema, teoriji antenskih sistema kao i u mnogim drugim oblastima tehnike definisane su brojne prozorske funkcije, od kojih će neke biti opisane u narednom izlaganju. Sve dobre prozorske funkcije imaju postepen prelaz od centra prozorske funkcije prema krajevima.

4.7.2 TROUGAONA PROZORSKA FUNKCIJA

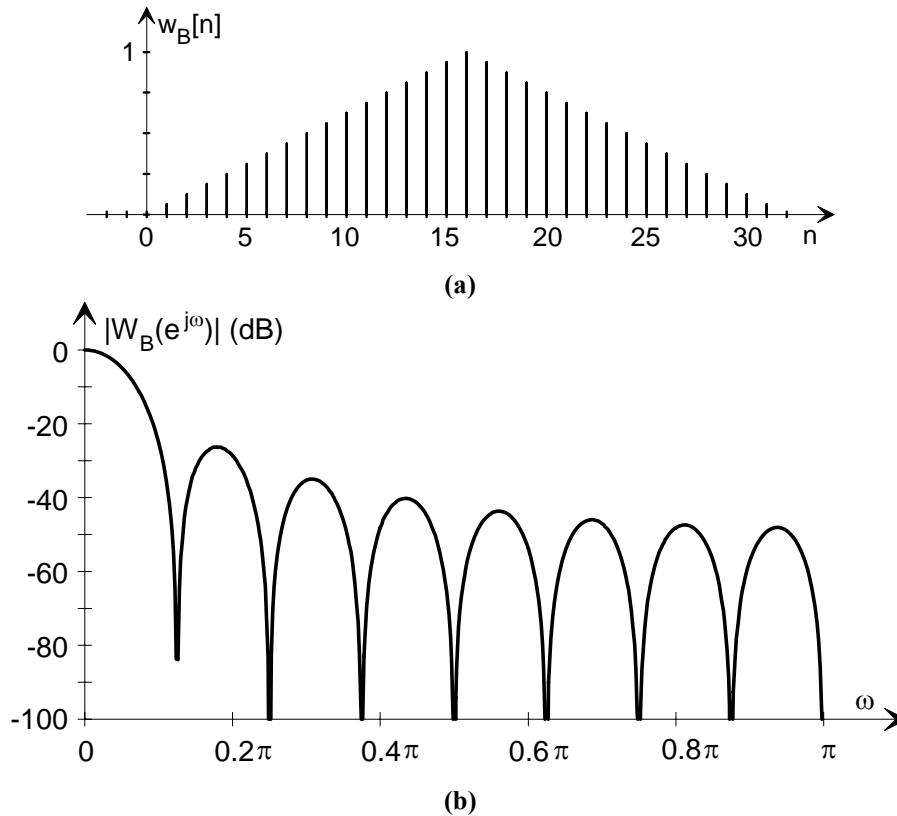
Trougaona ili *Bartletova* (Bartlett) *prozorska funkcija* opisana je relacijom:

$$w_T[n] = \begin{cases} 2n/N & n = 0, 1, \dots, N/2 \\ w_T[N-n], & n = (N/2)+1, (N/2)+2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (4.49)$$

i prikazana na slici 4.7a. U opisanom slučaju trougaona prozorska funkcija je simetrična a poslednja tačka u nizu nedostaje jer je pripisana sledećoj periodu u periodičnom produženju prozorske funkcije. Spektar trougaone prozorske funkcije dobija se direktnom primenom Furijeove transformacije na sekvencu $w_T[n]$ u obliku:

$$W_T(e^{j\Omega}) = \frac{2}{N} \left[\frac{\sin(\Omega N/4)}{\sin(\Omega/2)} \right]^2 e^{-j\Omega(N/2-1)} \quad (4.50)$$

odnosno, *amplitudski spektar trougaone prozorske funkcije predstavlja kvadrat amplitudskog spektra pravougaone prozorske funkcije*. Ovaj rezultat nije neočekivan jer se trougaona prozorska funkcija može shvatiti i kao rezultat konvolucije dve pravougaone prozorske funkcije dužine $N/2$, pri čemu je poslednja tačka rezultata zanemarena. Kako konvoluciji u vremenskom domenu odgovara proizvod Furijeovih transformacija, dobijeni rezultat ima jasno tumačenje. Kao rezultat, maksimalna amplituda bočnih lukova je -26 dB ispod amplitude glavnog luka, dok je širina glavnog luka udvostručena. Maksimalno "scalloping" slabljenje koje se javlja na sredini između dva odbirka u spektralnom domenu iznosi -1.82 dB. Bočni lukovi opadaju sa nagibom od -12 dB/oktavi. Spektar trougaone prozorske funkcije prikazan je na slici 4.7b.



Slika 4.7 (a) Trougaona prozorska funkcija, $N = 32$, (b) amplitudska karakteristika.

4.7.3 PROZORSKE FUNKCIJE KOSINUSNOG (SINUSNOG) TIPRA

Da bi se još više smanjili bočni lukovi *potrebno je napraviti još blaži prelaz u blizini krajeva prozorske funkcije*. To se može postići korišćenjem kosinusnih (sinusnih) funkcija oblika $\cos^\alpha x$ ili $\sin^\alpha x$. Razlike između prozorskih funkcija kosinusnog i sinusnog tipa su u vremenskom pomeraju za polovinu dužine sekvence i u tome što je kosinusna funkcija simetrična u odnosu na koordinatni početak. Prema tome, za primenu u spektralnoj analizi pomoću DFT pogodniji je sinusni oblik funkcije:

$$w[n] = \sin^\alpha \left(\frac{n\pi}{N} \right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.51)$$

gde slobodni parametar ima vrednost $1 \leq \alpha \leq 4$.

Tako se za $\alpha = 1$ dobija sinusna prozorska funkcija:

$$w_C[n] = \sin\left(\frac{n\pi}{N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.52)$$

4.7.3.1 Hanova prozorska funkcija

Najčešća vrednost parametra u jednačini (4.51) je $\alpha = 2$. Tada se dobija *Hanova prozorska funkcija* koja je dobila naziv po austrijskom meteorologu Hanu (Julius Von Hann). Ova prozorska funkcija se sreće i pod nazivima *kvadratni kosinus*, *podignuti kosinus* ili *Hanning prozorska funkcija*. Dakle, iz (4.51) se za $\alpha = 2$ dobija:

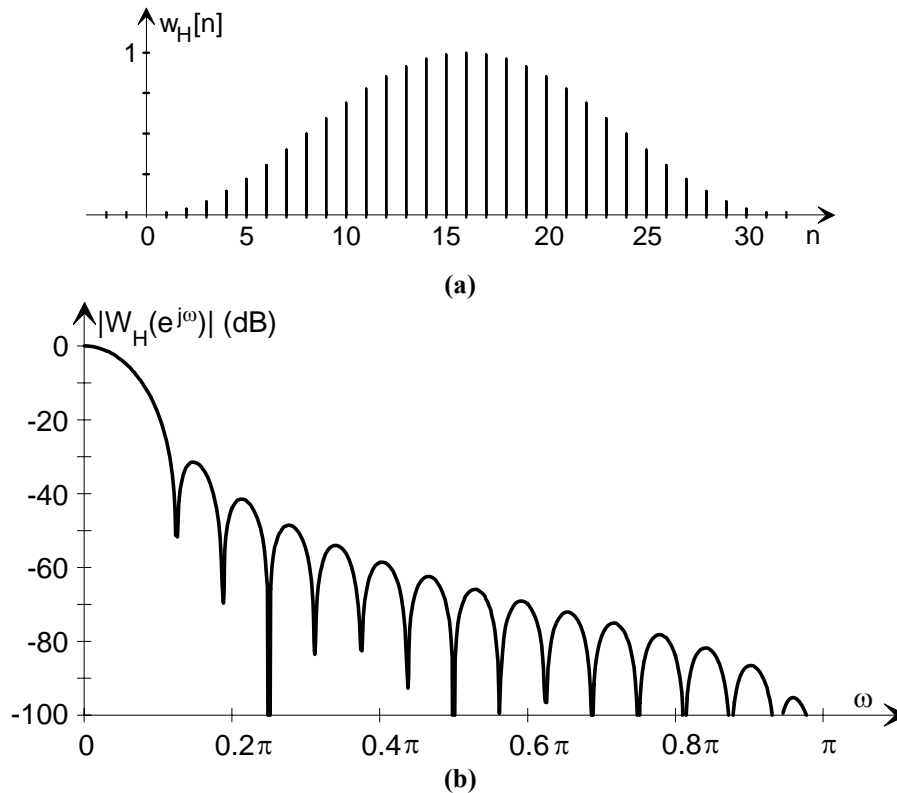
$$w_H[n] = \sin^2\left(\frac{n\pi}{N}\right) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right) \right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.53)$$

a njen spektar:

$$W_H(e^{j\Omega}) = 0.5W_R(e^{j\Omega}) - 0.25[W_R(e^{j(\Omega-2\pi/N)}) + W_R(e^{j(\Omega+2\pi/N)})] \quad (4.54)$$

gde je $W_R(e^{j\Omega})$ spektar pravougaone prozorske funkcije dat izrazom (4.48).

Iz izraza za Hanovu prozorsku funkciju (4.53) se vidi da je $w_H[n] = 0$ na krajevima intervala, tj. Hanova prozorska funkcija nema diskontinuitete na krajevima. Zbog glatkog prelaza sa nenultih na nulte vrednosti prozorske funkcije, spektar prozorske funkcije ima znatno manje bočne lukove koji opadaju sa -18 dB/oktavi. Amplituda najvećeg bočnog luka potisnuta je za -32 dB u odnosu na amplitudu centralnog luka. Širina centralnog luka iznosi $8\pi/N$. Hanova prozorska funkcija i njen spektar prikazani su na slici 4.8.



Slika 4.8 (a) Hanova prozorska funkcija, $N = 32$, (b) amplitudska karakteristika.

Hanova prozorska funkcija ima vrlo interesantnu interpretaciju u frekvencijskom domenu. Iz izraza (4.54) se vidi da spektar Hanove prozorske funkcije predstavlja superpoziciju spektra

pravougaonog prozora pomnoženog sa faktorom 0.5, i spektara pravougaonih prozora pomerenih za $\pm 2\pi/N$ i pomnoženih sa -0.25. Interesantno je da se maksimumi pomerenih spektara nalaze na mestima gde centralni spektar ima nule. Ovakvo sumiranje tri spektra ima za cilj da smanji amplitudu prvog bočnog luka. Međutim, ova spektralna interpretacija ima i vrlo važnu praktičnu primenu. Naime, kada se određuje DFT, iz spektra $W_H(e^{j\Omega})$ se uzimaju odbirci sa frekvencijskim razmakom $2\pi/N$, odnosno, tačno na mestima gde se nalaze nule spektra $W_R(e^{j\Omega})$. Dakle, u rezultatnom spektru $W_H(e^{j\Omega})$ postoje samo tri nenulta odbirka na pozicijama $-2\pi/N$, 0 i $2\pi/N$, odnosno, na mestima gde leže centralni odbirci tri spektra koji ulaze u superpoziciju. Direktna primena uočene pojave omogućava da se množenje u vremenskom domenu sa Hanovom prozorskom funkcijom zameni superpozicijom spektara u frekvencijskom domenu. Dakle, spektar signala ograničenog Hanovom prozorskom funkcijom $Y[k]$ dobija se ako se nađe spektar signala bez množenja sa prozorskom funkcijom $X[k]$ i primeni formula:

$$Y[k] = \frac{1}{2} \left\{ X[k] - \frac{1}{2} (X[k-1] + X[k+1]) \right\} \quad (4.55)$$

za svaki DFT odbirak. Kako se superpozicioni koeficijenti $\pm 1/2$ lako realizuju pomeranjem udesno, a ne množenjem, vidi se da se N realnih množenja u vremenskom domenu zamenjuje sa $2N$ realnih sabiranja i $2N$ pomeraja udesno u spektralnom domenu. Takođe se smanjuje memorijski prostor jer nije potrebno čuvati vrednosti odbiraka prozorske funkcije. U nekim slučajevima, izračunavanje spektra prema (4.55) može predstavljati značajno ubrzanje.

4.7.3.2 Hemingova prozorska funkcija

Hemingova (Hamming) *prozorska funkcija* predstavlja poboljšanu verziju Hanove prozorske funkcije. Osnovni cilj poboljšanja je dalje smanjenje bočnih lukova. Ako se generalizovani oblik Hanove prozorske funkcije i njen spektar napišu u obliku:

$$w_H[n] = \alpha_H - (1 - \alpha_H) \cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.56)$$

$$W_H(e^{j\Omega}) = \alpha_H W_R(e^{j\Omega}) - 0.5(1 - \alpha_H) \{W_R[e^{j(\Omega-2\pi/N)}] + W_R[e^{j(\Omega+2\pi/N)}]\} \quad (4.57)$$

lako se može izračunavanjem utvrditi da se prvi bočni luk može potpuno eliminisati ako je $\alpha_H = 25/46 = 0.543478261 \approx 0.54$. Za ovu vrednost parametra α_H generalizovana prozorska funkcija naziva se Hemingova prozorska funkcija. Maksimalna amplituda bočnih lukova sada iznosi -43 dB. Zbog toga što kod Hemingove prozorske funkcije postoji mali diskontinuitet na krajevima (0.08), bočni lukovi opadaju sa nagibom od samo -6 dB/oktavi. Širina centralnog luka praktično je ista kao kod Hanove prozorske funkcije. Hemingova prozorska funkcija i njen spektar prikazani su na slici 4.9.

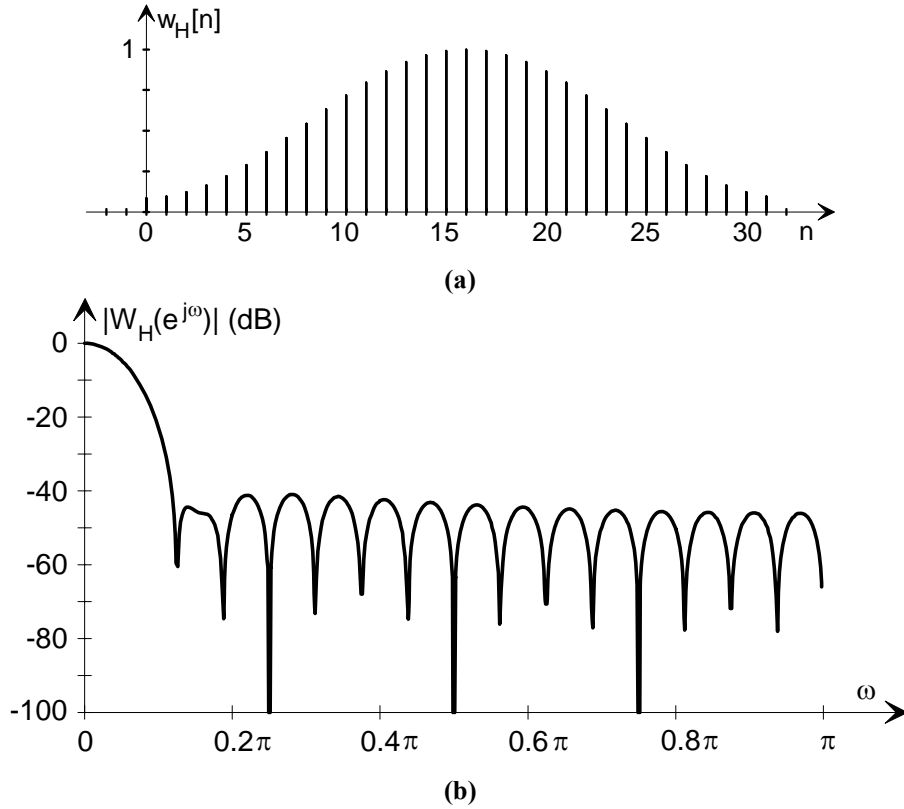
4.7.3.3 Blekmanova prozorska funkcija

Ideje koje su korišćene u razvoju Hannove i Hemingove prozorske funkcije kombinovane su u razvoju *Blekmanove* (Blackman) *prozorske funkcije* koja je u opštem slučaju data izrazom:

$$w_B[n] = \sum_{m=0}^M (-1)^m a_m \cos\left(\frac{2\pi mn}{N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.58)$$

gde koeficijenti a_m zadovoljavaju uslov:

$$\sum_{m=0}^M a_m = 1 \quad (4.59)$$



Slika 4.9 (a) Hemingova prozorska funkcija, $N = 32$, (b) amplitudska karakteristika.

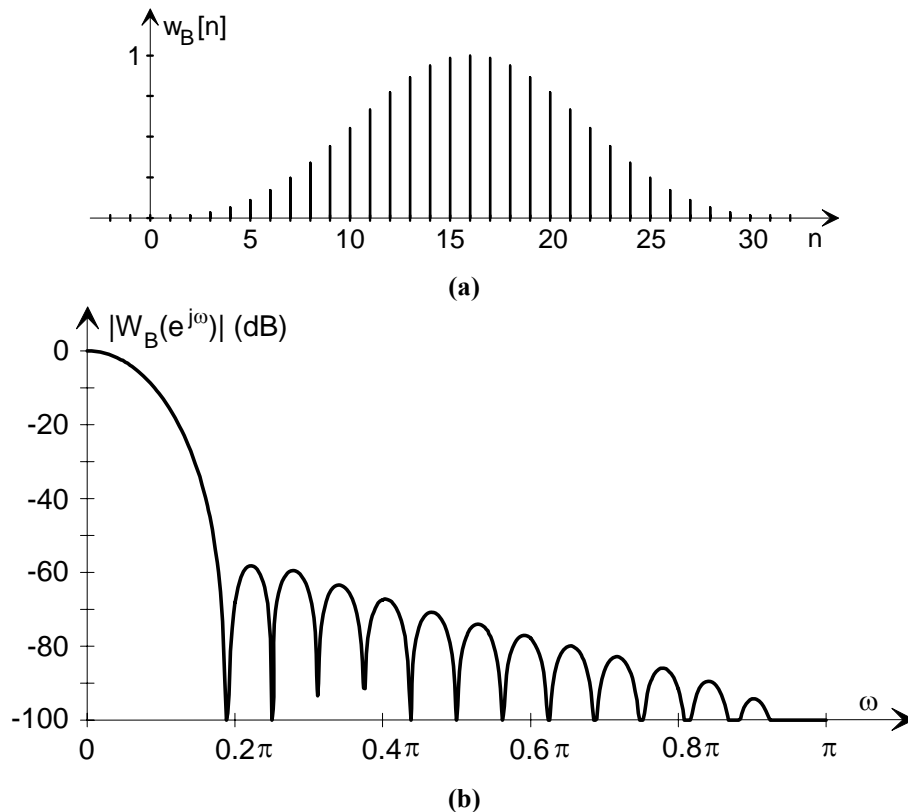
Spektar generalizovane Blekmanove prozorske funkcije je onda dat sa:

$$W_B(e^{j\Omega}) = \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{a_m}{2} [W_R(e^{j(\Omega-2\pi m/N)}) + W_R(e^{j(\Omega+2\pi m/N)})] \quad (4.60)$$

Može se uočiti da ovoj klasi pripadaju i prethodno opisane Hanova i Hemingova prozorska funkcija ($M = 1$). Još bolji rezultati se mogu dobiti sumiranjem tri ($M = 2$) ili četiri člana ($M = 3$) člana u (4.58) i (4.60). Na primer, za $M = 2$, postavljanjem nula funkcije $W_B(e^{j\Omega})$ na učestanosti $\omega = 7\pi/N$ i $9\pi/N$ koje odgovaraju položajima maksimuma trećeg i četvrtog bočnog luka pravougaone prozorske funkcije, dobijaju se sledeće vrednosti za koeficijente:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.42659071 \approx 0.42 \\ a_1 &= 0.49656062 \approx 0.50 \\ a_2 &= 0.07684867 \approx 0.08 \end{aligned} \quad (4.61)$$

Prozorska funkcija koja koristi aproksimativne vrednosti koeficijenata naziva se Blekmanova prozorska funkcija i prikazana je na slici 4.10. Slabljenje bočnih lukova je -58 dB, a strmina opadanja bočnih lukova je -18 dB/oktavi. Ovako dobre karakteristike u pogledu slabljenja postignute su po cenu povećanja širine glavnog luka na $12\pi/N$. Prozorska funkcija sa tačnim vrednostima koeficijenata ima lošije karakteristike (slabljenje bočnih lukova od -51 dB i strminu opadanja bočnih lukova od samo -6 dB/oktavi, jer je $w_B[n] \neq 0$ na krajevima intervala definisanosti).



Slika 4.10 (a) Blekmanova prozorska funkcija, $N = 32$, (b) amplitudska karakteristika.

Još bolji rezultati se mogu dobiti ako se vrednosti koeficijenata odrede optimizacionim postupkom. Na taj način dobijaju se *optimalne Blekmanove* ili *Blekman-Harisove* (Blackman-Harris) *prozorske funkcije* sa tri ili četiri člana koje su prikazane u trećoj i četvrtoj koloni Tabele 4.1. Za primene gde nije potrebno tako veliko slabljenje bočnih lukova može se smanjiti širina glavnog luka na račun smanjenja slabljenja bočnih lukova. Tako se dobija familija Blekman-Harisovih prozorskih funkcija kod kojih se može ostvariti kompromis između slabljenja bočnih lukova i širine glavnog luka.

Tabela 4.1 Vrednosti koeficijenata Blekman-Harisovih prozora.

	3 člana (-51 dB)	3 člana (-58 dB)	3 člana (-67 dB)	4 člana (-92 dB)
a_0	0.42659071	0.42	0.42323	0.35875
a_1	0.49656062	0.50	0.49755	0.48829
a_2	0.07684867	0.08	0.07922	0.14128
a_3				0.01168

4.7.4 KAJZEROVA PROZORSKA FUNKCIJA

Problem konstruisanja dobre prozorske funkcije svodi se na matematički problem određivanja vremenski ograničene funkcije koja ima minimalnu energiju izvan nekog izabranog opsega učestanosti. U teoriji kontinualnih sistema taj problem je rešen korišćenjem tzv. "prolate spheroidal wave" funkcija nultog reda. Njihovo izračunavanje i primena su vrlo komplikovani pa se ove funkcije praktično ne koriste u sintezi analognih filtara. *Kajzerova* (Kaiser) ili *Kajzer-Beselova*

(Kaiser-Bessel) *prozorska funkcija predstavlja jednostavnu diskretnu aproksimaciju funkcije ograničenog trajanja T_K koja maksimizira energiju sadržanu u opsegu učestanosti B_K pomoću modifikovane Beselove funkcije prve vrste nultog reda $I_0(x)$. Aproksimativna vrednost funkcije $I_0(x)$ izračunava se pomoću reda:*

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2 \quad (4.62)$$

koji veoma brzo konvergira tako da se sa samo nekoliko sabiraka postiže maksimalna tačnost izračunavanja na korišćenom računaru. Koristeći funkciju $I_0(x)$ odbirci Kajzerove prozorske funkcije se izračunavaju iz izraza:

$$w_K[n] = \frac{I_0\left\{\beta\sqrt{1-[1-2n/(N-1)]^2}\right\}}{I_0(\beta)}, \quad n = 0,1,2,\dots,N-1 \quad (4.63)$$

gde je parametar $\beta = 0.5T_K B_K$. Kontinualnom promenom parametra β može se povećavati slabljenje bočnih lukova na račun proširenja glavnog luka. Kod prethodno opisanih prozorskih funkcija to je bilo moguće samo promenom dužine prozorske funkcije N što nije dovoljno fleksibilno. Tipične vrednosti parametra β leže u intervalu $4 \leq \beta \leq 10$. Spektar Kajzerove prozorske funkcije dat je aproksimativnim izrazom:

$$W_K(e^{j\Omega}) \approx \begin{cases} \frac{N-1}{I_0(\beta)} \frac{\sinh\left\{\sqrt{\beta^2 - [(N-1)\Omega/2]^2}\right\}}{\sqrt{\beta^2 - [(N-1)\Omega/2]^2}} e^{-j\Omega(N-1)/2} & |\Omega| \leq \frac{2\beta}{N-1} \\ \frac{N-1}{I_0(\beta)} \frac{\sin\left\{\sqrt{[(N-1)\Omega/2]^2 - \beta^2}\right\}}{\sqrt{[(N-1)\Omega/2]^2 - \beta^2}} e^{-j\Omega(N-1)/2} & |\Omega| > \frac{2\beta}{N-1} \end{cases} \quad (4.64)$$

Kajzerova prozorska funkcija i njen spektar su prikazani na slici 4.11 za $N = 32$ i dve vrednosti parametra β , $\beta = 2\pi$ i $\beta = 3.5\pi$.

U praktičnoj primeni Kajzerove prozorske funkcije u spektralnoj analizi signala potrebno je, na osnovu zadatih zahteva za slabljenje bočnih lukova A_{sl} (od čega zavisi curenje spektra) i širine glavnog luka $\Delta\Omega_0$ (od čega zavisi sposobnost razdvajanja po frekvenciji), odrediti vrednosti karakterističnih parametara prozorske funkcije, β i N . Parametar β se određuje na osnovu empirijske formule [K-4]:

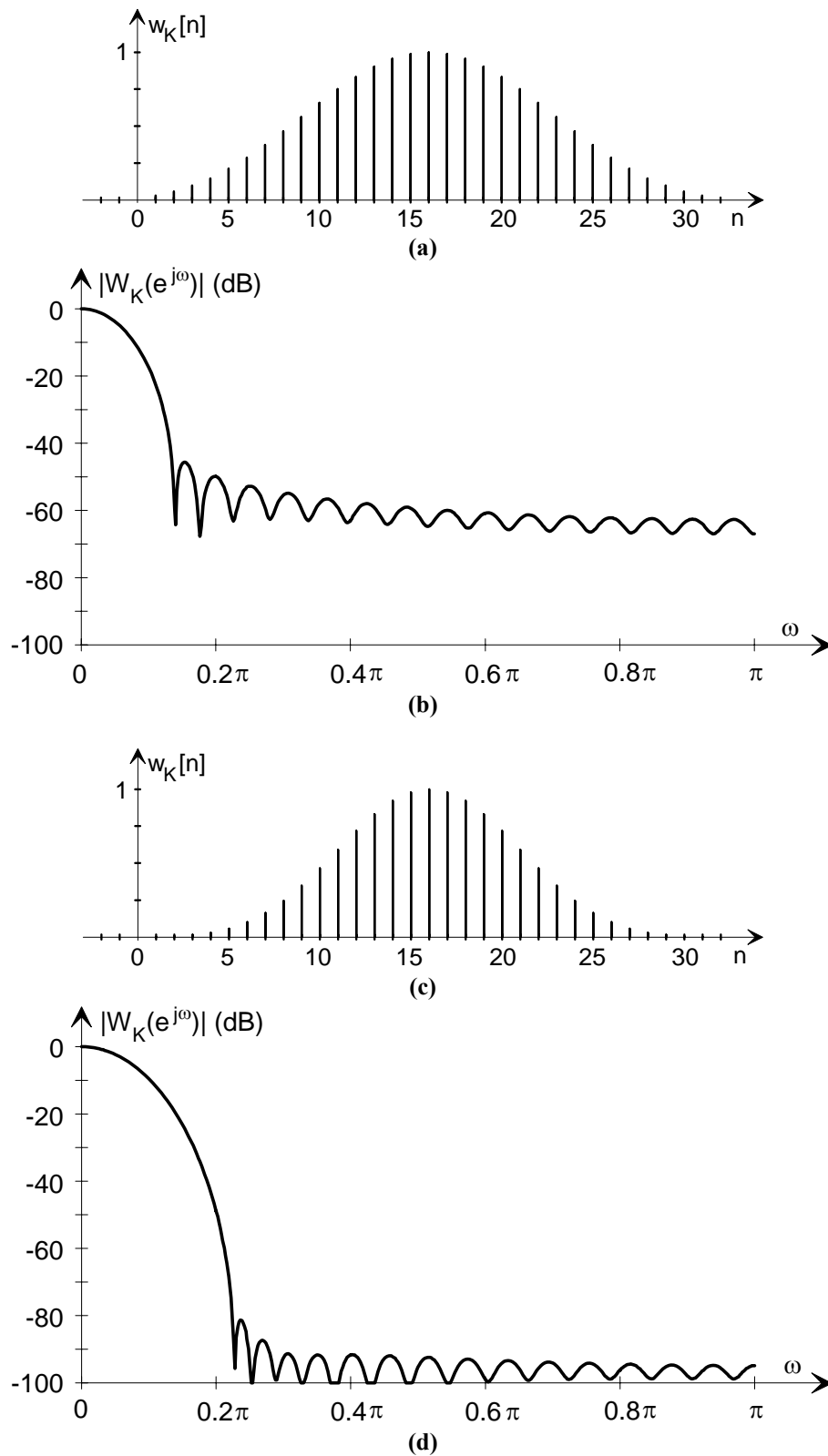
$$\beta = \begin{cases} 0 & A_{sl} \leq 13.26 \text{ dB} \\ 0.76609(A_{sl} - 13.26)^{0.4} + 0.09834(A_{sl} - 13.26) & 13.26 \text{ dB} < A_{sl} \leq 60 \text{ dB} \\ 0.12438(A_{sl} + 6.3) & 60 \text{ dB} < A_{sl} \leq 120 \text{ dB} \end{cases} \quad (4.65)$$

gde $A_{sl} = 13.26$ dB odgovara slabljenju pravougaone prozorske funkcije na koju se svodi Kajzerova prozorska funkcija za $\beta = 0$. Prozorska funkcija projektovana za vrednost β određenu prema (4.65) imaće slabljenje bočnih lukova koje odstupa od A_{sl} najviše za 0.36% [K-4].

Optimalna vrednost N se takođe može proceniti iz empirijske formule [K-4]:

$$N \approx \frac{24\pi(A_{sl} + 12)}{155\Delta\Omega_0} + 1 \quad (4.66)$$

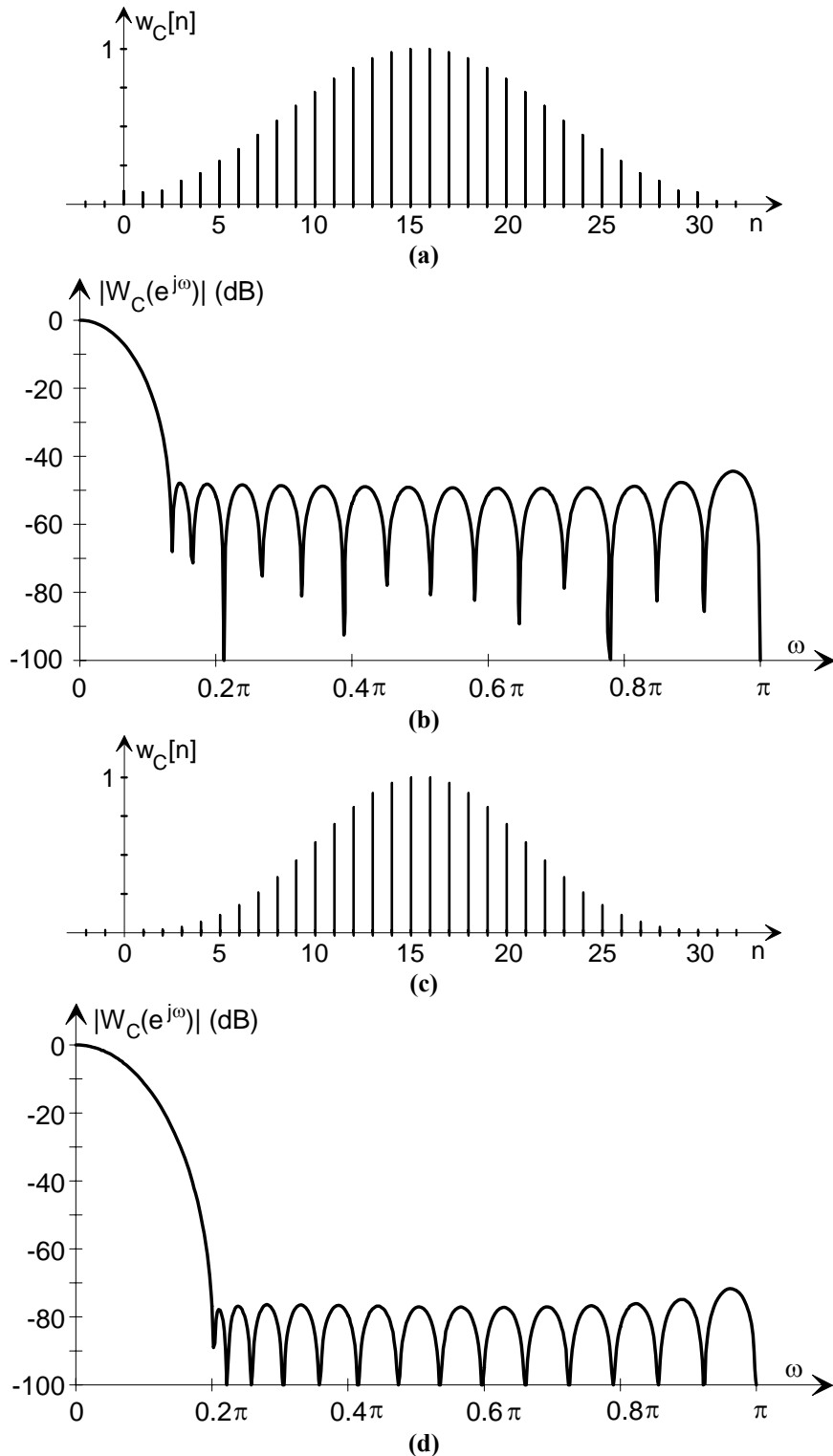
Dakle, Kajzerova prozorska funkcija predstavlja pogodan metod za ograničenje dužine ulazne sekvence čiji spektar treba odrediti, kojim se na optimalan način ostvaruje kompromis između dužine sekvence, frekvencijske rezolucije i curenja spektra.



Slika 4.11 Kajzerova prozorska funkcija, $N = 32$: (a) vremenski domen, $\beta = 2\pi$, (b) amplitudska karakteristika, $\beta = 2\pi$, (c) vremenski domen, $\beta = 3.5\pi$, (d) amplitudska karakteristika, $\beta = 3.5\pi$.

4.7.5 DOLF-ČEBIŠEVljeVA PROZORSKA FUNKCIJA

Problem određivanja optimalne prozorske funkcije može se matematički postaviti i na drugačiji način kao optimizacioni *problem određivanja prozorske funkcije čiji centralni luk ima minimalnu širinu za zadato slabljenje bočnih lukova*. Ovaj problem je poznat iz teorije antenskih nizova i njegovo rešenje u kontinualnom slučaju zahteva korišćenje Dirakovih impulsa. U slučaju diskretnih sistema postoji egzaktno rešenje u spektralnom domenu.



Slika 4.12 Dolf-Čebiševljeva prozorska funkcija, $N = 32$: (a) vremenski domen, $\alpha = 2.5$, (b) amplitudska karakteristika, $\alpha = 2.5$, (c) vremenski domen, $\alpha = 4$, (d) amplitudska karakteristika, $\alpha = 4$.

Odbirci spektra *Dolf-Čebiševljeve* (Dolph-Chebyshev) *prozorske funkcije* dati su izrazom:

$$W_D[k] = (-1)^k \frac{\cos\{N \cos^{-1}[\beta \cos(\pi k/N)]\}}{\cosh[N \cosh^{-1}(\beta)]}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.67)$$

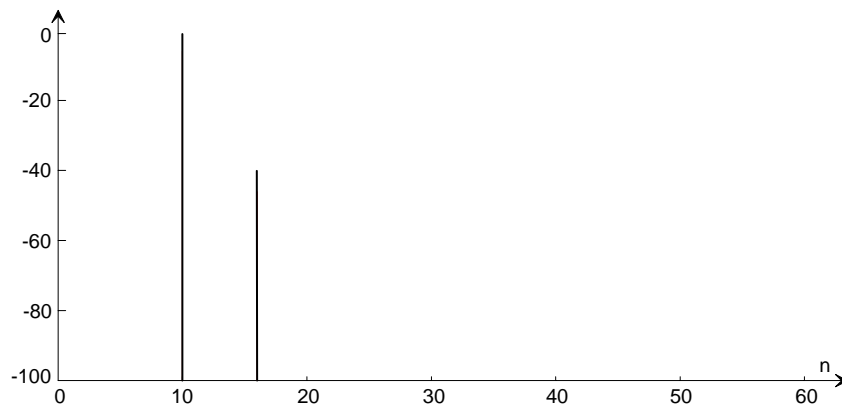
gde je:

$$\beta = \cosh\left[\frac{1}{N} \cosh^{-1}(10^\alpha)\right] \quad (4.68)$$

a α predstavlja logaritam odnosa amplitude centralnog luka i amplituda jednakih bočnih lukova. Odbirci *Dolf-Čebiševljeve* prozorske funkcije u vremenskom domenu, $w_D[n]$, se dobijaju primenom inverzne DFT na odbirke $W_D[k]$ iz (4.67), posle čega se vrši skaliranje da bi maksimalna amplituda bila jednaka 1. Na slici 4.12 prikazani su primeri *Dolf-Čebiševljeve* prozorske funkcije.

4.7.6 KVALITATIVNO POREĐENJE PROZORSKIH FUNKCIJA

Uticaj prozorske funkcije na kvalitet analize spektra signala najbolje se može uočiti posmatranjem rezultata spektralne analize istog signala ograničenog različitim prozorskim funkcijama. Stoga posmatrajmo spektralnu analizu signala koji se sastoji od dve sinusoidalne komponente koje imaju jako različite amplitude 1 (0 dB) i 0.01 (-40 dB). Neka učestanost prve komponente bude $10(2\pi/N)$ a druge $16(2\pi/N)$, što odgovara desetoj i šesnaestoj komponenti u DFT spektru bez obzira na to kolika je dužina analizirane sekvence. Amplitudski spektar dobijen korišćenjem pravougaone prozorske funkcije prikazan je na slici 4.13. Vidi se da su amplitude obe komponente korektno određene zahvaljujući tome što se učestanosti komponenata poklapaju sa učestanostima na kojima se izračunava DFT.



Slika 4.13 Spektar dvokomponentnog sinusnog signala sa pravougaonim prozorom.

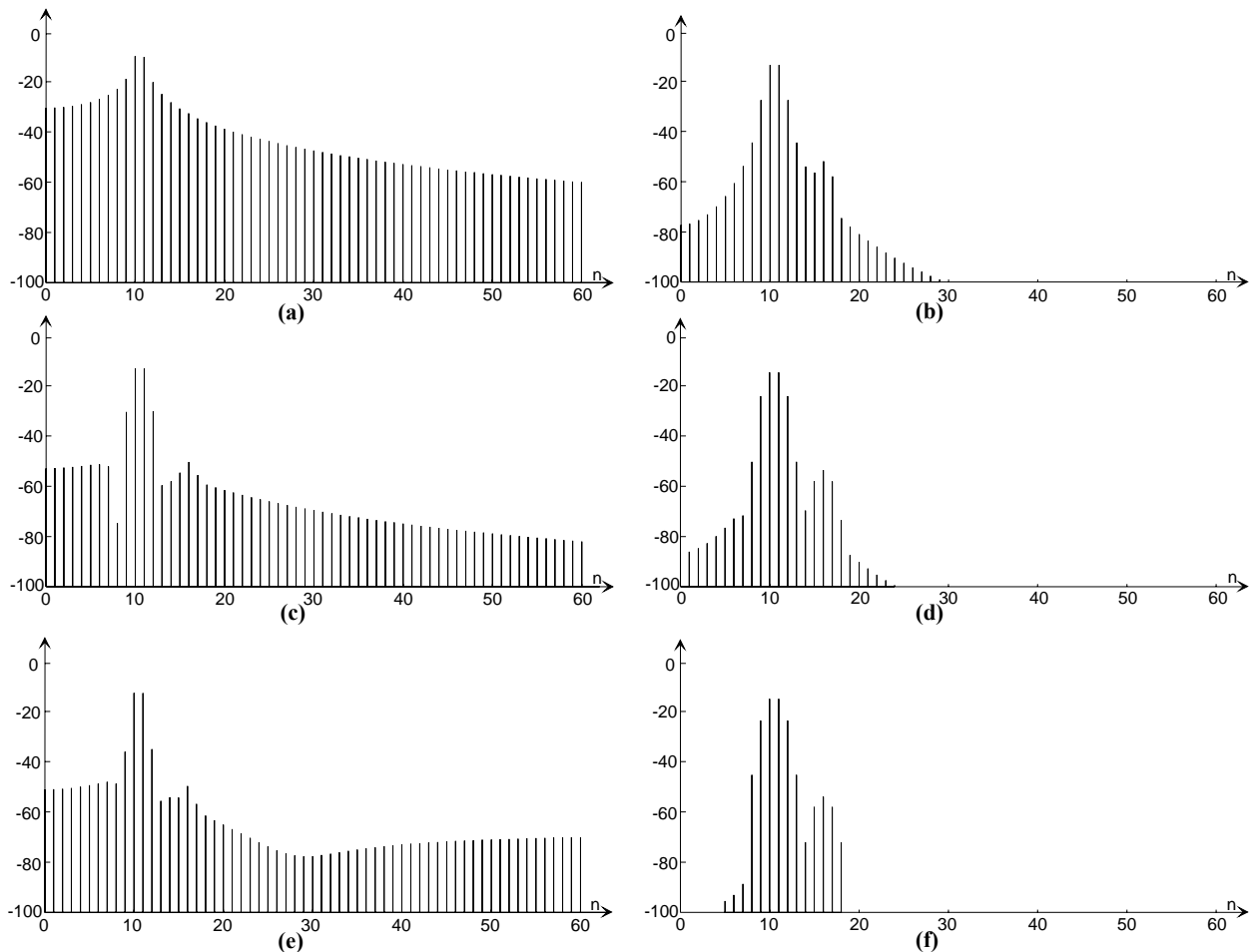
Neka se zatim učestanost prve komponente promeni na $10.5(2\pi/N)$ što predstavlja najgori slučaj za curenje spektra jer učestanost signala leži na sredini između dve učestanosti na kojima se izračunava DFT. Ako se dužina sekvence ograniči pravougaonim prozorom primenom DFT se dobija rezultat prikazan na slici 4.14a. Zbog curenja spektra pojavljuju se frekvencijske komponente kojih nema u ulaznom signalu, a komponenta manje amplitude je maskirana curenjem spektra komponente signala sa većom amplitudom. To se moglo i očekivati s obzirom da se iz spektra pravougaone prozorske funkcije (4.48) dobija da je na učestanosti $5.5(2\pi/N)$ slabljenje svega 25 dB, što znači da signal koji je slabiji za 40 dB ne može biti detektovan. Ako se za ograničenje sekvence primeni trougaona prozorska funkcija curenje spektra se smanjuje ali ne dovoljno da bi se detektovao signal manje amplitude.

Hanova prozorska funkcija još više smanjuje curenje spektra tako da se u amplitudskom spektru primećuje postojanje manje komponente signala što je prikazano na slici 4.14b. Ipak, zbog nedovoljnog potiskivanja curenja spektra, minimum između dva maksimuma je svega 3 dB manji od amplitude manje komponente. Zbog toga je u prisustvu šuma otežana detekcija slabijeg signala. Nešto bolji rezultati dobijaju se primenom Hemingove prozorske funkcije ali se sa slike 4.14c vidi da je zbog curenja spektra amplituda slabije komponente povećana i iznosi oko -35 dB.

Primenom Blekmanove prozorske funkcije dobijaju se značajno bolji rezultati što se vidi sa slike 4.14d. Minimum između dva maksimuma je manji za oko 17 dB od amplitude slabije komponente što obezbeđuje pouzdanu detekciju obe komponente signala.

Dolf-Čebiševljeva prozorska funkcija daje takođe odlične rezultate koji su prikazani na slici 4.14e za vrednost parametra $\alpha = 2$. Nedostatak ove prozorske funkcije je konstantan nivo spektralnog curenja koji, iako je mali, može smetati u nekim primenama.

Kajzerovom prozorskom funkcijom dobija se najbolji izgled spektralnog sadržaja signala. Na slici 4.14f prikazan je amplitudski spektar dobijen primenom Kajzerove prozorske funkcije sa parametrom $\beta = 3\pi$. Minimum između maksimuma je potisnut za 22 dB u odnosu na amplitudu slabije komponente. Potiskivanje komponenata usled curenja spektra je bolje od 70 dB u većem delu skale učestanosti. Dodatna pogodnost Kajzerove prozorske funkcije je mogućnost kontrole curenja spektra promenom slobodnog parametra β što je objašnjeno u odeljku 4.7.4.



Slika 4.14 Spektar dvokomponentnog sinusnog signala sa prozorskim funkcijama: (a) pravougaona, (b) Hanova, (c) Hamingova, (d) Blekmanova, (e) Dolf-Čebiševljeva, $\alpha = 3$, (f) Kajzerova, $\beta = 3\pi$.

4.7.7 KVANTITATIVNO POREĐENJE PROZORSKIH FUNKCIJA

Da bi se kvantitativno uporedio kvalitet prozorskih funkcija u pogledu uticaja na spektar signala koji se ograničava prozorskom funkcijom potrebno je ispitati frekvencijske karakteristike DFT signala ograničenog prozorskom funkcijom. Postupak je istovetan kao postupak koji je sproveden u odeljku 4.6 za DFT bez prozorske funkcije, odnosno, DFT sa pravougaonom prozorskom funkcijom. Najvažniji rezultati detaljnijeg kvantitativnog ispitivanja uticaja prozorskih funkcija na izračunavanje spektra signala prikazani su u Tabeli 4.2.

Pored maksimalne amplitude bočnih lukova koja je prikazana u prvoj koloni Tabele 4.2, od interesa je i *brzina kojom amplitude bočnih lukova opadaju sa porastom učestanosti*. Nagib anvelope koja spaja maksimume bočnih lukova u spektru izražava se u dB/okt i iznosi $-6m$ dB/okt. Brzina opadanja amplitude bočnih lukova prikazana je u drugoj koloni Tabele 4.2.

Koherentno pojačanje (engl. coherent gain) predstavlja promenu amplitude k -te komponente DFT kada ulazni signal predstavlja diskretnu eksponencijalnu funkciju čija se učestanost poklapa učestanošću k -te komponente DFT. Zbog uticaja prozorske funkcije dolazi do promene vrednosti detektovane amplitude:

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} (w[n] A e^{j2\pi kn/N}) e^{-j2\pi kn/N} = AN \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w[n] \right) = ANG_c \quad (4.69)$$

Koherentno pojačanje G_c , definisano izrazom (4.69), prikazano je u trećoj koloni Tabele 4.2.

Ekvivalentni propusni opseg šuma (ENBW) definisan je u odeljku 4.6 kao propusni opseg idealnog filtra koji propušta beli šum čija je snaga jednaka snazi belog šuma koja se registruje na nekom DFT izlazu. Ako beli šum na ulazu ima srednju vrednost nula i konstantnu gustinu spektra snage, onda se za ekvivalentni propusni opseg šuma dobija [H-3]:

$$ENBW = \frac{N \sum_{n=0}^{N-1} w^2[n]}{\left(\sum_{n=0}^{N-1} w[n] \right)^2} \quad (4.70)$$

što je prikazano u četvrtoj koloni Tabele 4.2. Propusni opseg, prikazan u Tabeli 4.2, normalizovan je deljenjem sa frekvencijskim razmakom DFT odbiraka ($\Delta\omega = 2\pi/N$, ili $\Delta F = F_s/N$). Interesantno je primetiti da prozorske funkcije sa širokim glavnim lukom imaju veliki ekvivalentni propusni opseg šuma.

Kao mera za širinu glavnog luka može se iskoristiti i *propusni opseg definiisan slabljenjem od 3 dB* u odnosu na maksimum spektra prozorske funkcije pri čemu se normalizacija vrši na širinu razmaka DFT odbiraka. Ponekad se kao mera koristi i propusni opseg definiisan slabljenjem od 6 dB. Normalizovani propusni opseg definiisan slabljenjem od 3 dB prikazan je u petoj koloni Tabele 4.2.

Signali koji se ne poklapaju sa učestanostima DFT komponenata biće detektovani sa oslabljenom amplitudom usled "*scalloping*" slabljenja. Ovo slabljenje se definiše kao odnos amplitude DFT odbirka koji se dobija kada se na ulazu pojavi signal čija je učestanost jednaka učestanosti DFT komponente i DFT odbirka koji se dobija kada se na ulazu pojavi signal čija se učestanost razlikuje od učestanosti DFT komponente za polovinu frekvencijskog razmaka. Dakle:

$$SL = \frac{W(e^{j\pi/N})}{W(e^{j0})} \quad (4.71)$$

"Scalloping" slabljenje prozorskih funkcija (u dB) prikazano je u šestoj koloni Tabele 4.2.

Slabljenje usled procesiranja (engl. worst-case processing loss) predstavlja meru smanjenja odnosa signal/šum usled primene prozorske funkcije. Pošto se ovo slabljenje definiše kao zbir maksimalnog "scalloping" slabljenja (u dB) i logaritma ekvivalentnog propusnog opsega šuma $10 \log ENBW$ nije prikazano u Tabeli 4.2 jer se može lako izračunati.

Iz prethodnih analiza se vidi da od svih prozorskih funkcija najmanju širinu centralnog luka ima pravougaona prozorska funkcija. To znači da će druge prozorske funkcije imati veću snagu šuma na izlazu pa je potrebno dodatno procesiranje za otklanjanje šuma. Dodatno procesiranje se, kao što će biti objašnjeno u glavi 13, vrši podelom ulazne sekvence na delove koji se preklapaju i usrednjavanjem dobijenih rezultata. Ako je preklapljeni deo podsekvenci $1-1/R$, gde se $R \geq 1$ naziva redundansa, *korelacioni koeficijent preklapanja* definiše se kao:

$$C(l) = \frac{\sum_{n=0}^{(1-1/R)N} w[n]w[n+1N/R]}{\sum_{n=0}^{N-1} |w(n)|^2} \quad (4.72)$$

i predstavlja stepen korelacije sukcesivnih DFT izlaza u funkciji R kada je ulazni signal Gausov šum nulte srednje vrednosti. U sedmoj koloni Tabele 4.2 prikazane su vrednosti korelacionog koeficijenta preklapanja za preklapanje od 75% ($R = 4$).

Tabela 4.2 Karakteristike najvažnijih prozorskih funkcija.

Prozor	Bočni lukovi	Opadanje lukova	Koherentno pojačanje	ENBW	BW (-3 dB)	Scalloping slabljenje	Korelacija (75%)
Pravougaoni	- 13	- 6	1.00	1.00	0.89	3.92	75.0
Trougaoni	- 27	- 12	0.50	1.33	1.28	1.82	71.9
$\sin(x)$	- 23	- 12	0.64	1.23	1.20	2.10	75.5
Hanov	- 32	- 18	0.50	1.50	1.44	1.42	65.9
Hemingov	- 43	- 6	0.54	1.36	1.30	1.78	70.7
Blekmanov	- 58	- 18	0.42	1.73	1.68	1.1	56.7
Blekman-Haris (3 člana)	- 61	- 6	0.45	1.61	1.56	1.27	61.0
Blekman-Haris (3 člana)	- 67	- 6	0.42	1.71	1.66	1.13	57.2
Blekman-Haris (4 člana)	- 74	- 6	0.40	1.79	1.74	1.03	53.9
Blekman-Haris (4 člana)	- 92	- 6	0.36	2.00	1.90	0.83	46.0
Kajzerov ($\beta = 2\pi$)	- 46	- 6	0.49	1.50	1.43	1.46	65.7
Kajzerov ($\beta = 3.5\pi$)	- 82	- 6	0.37	1.93	1.83	0.89	48.8
Dolf-Čebišev ($\alpha = 2.5$)	- 50	0	0.53	1.39	1.33	1.70	69.6
Dolf-Čebišev ($\alpha = 4$)	- 80	0	0.42	1.73	1.65	1.10	55.9