

1. Trajanje ispita 180 minuta.
2. Ispit se radi u vežbanci.
3. Na naslovnoj strani **obavezno** zaokružiti redne brojeve zadataka koji su rađeni.

Zadatak 1 (20 poena)

Digitalni sistem ima impulsni odziv:

$$h[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-3] + \delta[n-4].$$

Na ulaz ovog sistema se može dovesti proizvoljan signal velike dužine. Zbog toga se izračunavanje odziva sistema na pobudu veće dužine izračunava blok konvolucijom kada se segmenti ulazne sekvence ne preklapaju (metod preklopi i saberi – *overlap-and-add*). Blokovi su dužine 4 odbirka. Pojedinačne konvolucije se izračunavaju korišćenjem diskretne Furijeove transformacije. Neka je ulazni signal:

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + 3\delta[n-5] - \delta[n-6].$$

- a) [5] Izračunajte minimalnu potrebnu dužinu N na kojoj treba izračunavati DFT u postupku izračunavanja konvolucije korišćenjem DFT.
- b) [10] Izračunajte rezultate obrade prva dva bloka signala $x[n]$: $y_1[n]$ i $y_2[n]$.
- c) [5] Korišćenjem rezultata iz tačke b) odredite odziv $y[n] = x[n] * h[n]$.

Zadatak 2 (20 poena)

Neka je dat signal:

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2] - \delta[n-3].$$

- a) [5] Nacrtajte šemu koja realizuje *radix-2* algoritam za izračunavanje DFT-a u 4 tačke korišćenjem preuređivanja u vremenu.
- b) [5] Korišćenjem šeme iz tačke a) izračunajte $X[k]$, DFT sekvence $x[n]$. Na šemi naznačite odgovarajuće međurezultate.
- c) [5] Nacrtajte šemu koja realizuje *radix-2* algoritam za izračunavanje DFT-a u 4 tačke korišćenjem preuređivanja u frekvenciji.
- d) [5] Korišćenjem šeme iz tačke c) izračunajte $X[k]$, DFT sekvence $x[n]$. Na šemi naznačite odgovarajuće međurezultate.

Zadatak 3 (30 poena)

Bilinearnom transformacijom sa $T = 2$ s potrebno je projektovati niskopropusni digitalni IIR filtar drugog reda granične učestanosti $\Omega_p = \pi/2$ iz analognog Batervortovog prototipa.

- a) [5] Kolika je granična učestanost ω_p analognog prototipa?
- b) [15] Odredite prenosnu funkciju traženog niskopropusnog digitalnog IIR filtra.
- c) [5] Skicirajte direktnu I realizaciju dobijenog filtra.
- d) [5] Opišite algoritam za transponovanje filtarske strukture i skicirajte transponovanu direktnu I realizaciju.

Pomoć i podsetnik: Za Batervortov prototip važi $H_B(s)H_B(-s) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (s/j\omega_p)^{2N}}$, gde je N red filtra. Uzeti da je $\varepsilon = 1$.

Zadatak 4 (30 poena)

Potrebno je projektovati FIR filter propusnik opsega 4. reda sintezom pomoću pravougaone prozorske funkcije i impulsnog odziva idealnog filtra. Propusni opseg je između učestanosti $\pi/3$ i $2\pi/3$.

- [7] Izračunajte impulsni odziv $h[n]$ idealnog filtra propusnika opsega učestanosti.
- [3] Odredite i skicirajte pravougaoni prozor koji je potrebno iskoristiti za projektovanje FIR filtra.
- [3] Odredite impulsni odziv traženog FIR filtra korišćenjem rezultata iz tačaka a) i b).
- [7] Izračunajte i skicirajte amplitudsku i faznu karakteristiku filtra i odredite grupno kašnjenje.
- [5] Da li je realizovani filter stabilan i kako to zaključujete? Kog je tipa (I, II, III ili IV) realizovani filter?
- [5] Ako bi se umesto pravougaone, za sintezu filtra koristila Hamingova prozorska funkcija, kakve bi razlike u pogledu širine prelazne zone i slabljenja u nepropusnom opsegu imao taj filter u poređenju sa projektovanim filtrom.

Rešenja:

Rešenja su data na kraju ovog dokumenta u vidu skeniranih rukom pisanih rešenja. Literatura za rešavanje zadataka sa ovog ispitnog roka su prezentacije i beleške sa predavanja i vežbi i knjiga prof. Miodraga Popovića „Digitalna obrada signala“ čiji delovi su objavljeni na sajtu u materijalima koji prate predavanja. Nabrajamo poglavlja po tačkama za svaki zadatak:

Zadatak 1

- Diskretna Furijeova transformacija, poglavlje 4.5.1 – Izračunavanje linearne konvolucije pomoću DFT
- b), c) Efikasno izračunavanje Diskretne Furijeove transformacije, poglavlje 5.10.4.1 - Blok konvolucija kada se segmenti ulazne sekvence ne preklapaju

Zadatak 2

- a), b) Efikasno izračunavanje Diskretne Furijeove transformacije, poglavlje 5.5 - FFT algoritam za $N = 2^p$ sa preuređivanjem u vremenu
- c), d) Efikasno izračunavanje Diskretne Furijeove transformacije, poglavlje 5.6 - FFT algoritam za $N = 2^p$ sa preuređivanjem u frekvencijskom domenu

Zadatak 3

- a) Sinteza sistema sa beskonačnim impulsnim odzivom, poglavlje 8.3 – Bilinearna transformacija
- b) Sinteza sistema sa beskonačnim impulsnim odzivom, poglavlje 8.1.1 – Batervortova aproksimacija; Sinteza sistema sa beskonačnim impulsnim odzivom, poglavlje 8.3 – Bilinearna transformacija
- c) Strukture za realizaciju diskretnih sistema, poglavlje 7.3.1 – Realizacije IIR sistema, direktna realizacija
- d) Strukture za realizaciju diskretnih sistema, poglavlje 7.2.1 – Realizacije FIR sistema, direktna realizacija; Strukture za realizaciju diskretnih sistema, poglavlje 7.3.2 – Realizacije IIR sistema, transponovane forme

Zadatak 4

- a), b), c) Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom, poglavlje 9.2 – Sinteza FIR sistema pomoću prozorskih funkcija
- d) Gradivo signala i sistema i telekomunikacija; Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom, poglavlje 9.1 – Neke važne osobine FIR sistema sa linearnom fazom
- e) Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom, poglavlje 9.1 – Neke važne osobine FIR sistema sa linearnom fazom
- f) Sinteza sistema sa konačnim impulsnim odzivom, poglavlje 9.2 – Sinteza FIR sistema pomoću prozorskih funkcija; Diskretna Furijeova transformacija, poglavlje 4.7.3.2 – Hamingova prozorska funkcija

1.

$$h = [2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]$$

$$x = [1 \ -1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 3 \ -1]$$

a) $N_h = 5 \quad N_{\text{bloka}} = 4 \quad N_{\text{DFT}} = N_h + N_{\text{bloka}} - 1 = 5 + 4 - 1 = 8$

b) $x_1 = [1 \ -1 \ 2 \ 3] \quad x_2 = [2 \ 3 \ -1 \ 0]$

$$H[k] = \text{DFT}_8\{h[n]\} = 2 + W_8^k + W_8^{3k} + W_8^{4k}$$

$$X_1[k] = \text{DFT}_8\{x_1[n]\} = 1 - W_8^k + 2W_8^{2k} + 3W_8^{3k}$$

$$y_1[n] = \text{IDFT}_8\{H_1[k] \cdot X_1[k]\}$$

$$X_2[k] = \text{DFT}_8\{x_2[n]\} = 2 + 3W_8^k - W_8^{2k}$$

$$y_2[n] = \text{IDFT}_8\{H_2[k] \cdot X_2[k]\}$$

$$\begin{aligned} Y_1[k] &= H[k] \cdot X_1[k] = (2 + W_8^k + W_8^{3k} + W_8^{4k})(1 - W_8^k + 2W_8^{2k} + 3W_8^{3k}) = \\ &= 2 - 2W_8^k + 4W_8^{2k} + 6W_8^{3k} + W_8^k - W_8^{2k} + 2W_8^{3k} + 3W_8^{4k} + W_8^{3k} - W_8^{4k} + \\ &+ 2W_8^{5k} + 3W_8^{6k} + W_8^{4k} - W_8^{5k} + 2W_8^{6k} + 3W_8^{7k} = \\ &= 2 - W_8^k + 3W_8^{2k} + 9W_8^{3k} + 3W_8^{4k} + W_8^{5k} + 5W_8^{6k} + 3W_8^{7k} \end{aligned}$$

$$y_1[n] = [2 \ -1 \ 3 \ 9 \ 3 \ 1 \ 5 \ 3]$$

$$Y_2[k] = H[k] \cdot X_2[k] = (2 + W_8^k + W_8^{3k} + W_8^{4k})(2 + 3W_8^k - W_8^{2k}) =$$

$$\begin{aligned} &= 4 + 6W_8^k - 2W_8^{2k} + 2W_8^k + 3W_8^{2k} - W_8^{3k} + 2W_8^{3k} + 3W_8^{4k} - W_8^{5k} + \\ &+ 2W_8^{4k} + 3W_8^{5k} - W_8^{6k} = 4 + 8W_8^k + W_8^{2k} + W_8^{3k} + 5W_8^{4k} + 2W_8^{5k} - W_8^{6k} \end{aligned}$$

$$y_2[n] = [4 \ 8 \ 1 \ 1 \ 5 \ 2 \ -1 \ 0]$$

c) $y_1 \rightarrow \begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 3 & 9 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ y_2 & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & & & 4 & 8 & 1 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \end{array}$

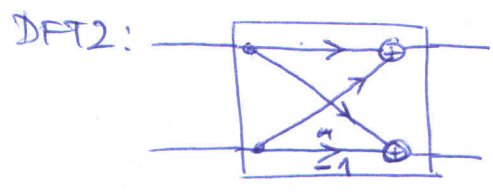
$$y = [2 \ -1 \ 3 \ 9 \ 7 \ 9 \ 6 \ 4 \ 5 \ 2 \ -1]$$

$$\begin{aligned} y[n] &= 2\delta[n] - \delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 9\delta[n-3] + 7\delta[n-4] + 9\delta[n-5] + 6\delta[n-6] + \\ &+ 4\delta[n-7] + 5\delta[n-8] + 2\delta[n-9] - \delta[n-10] \end{aligned}$$

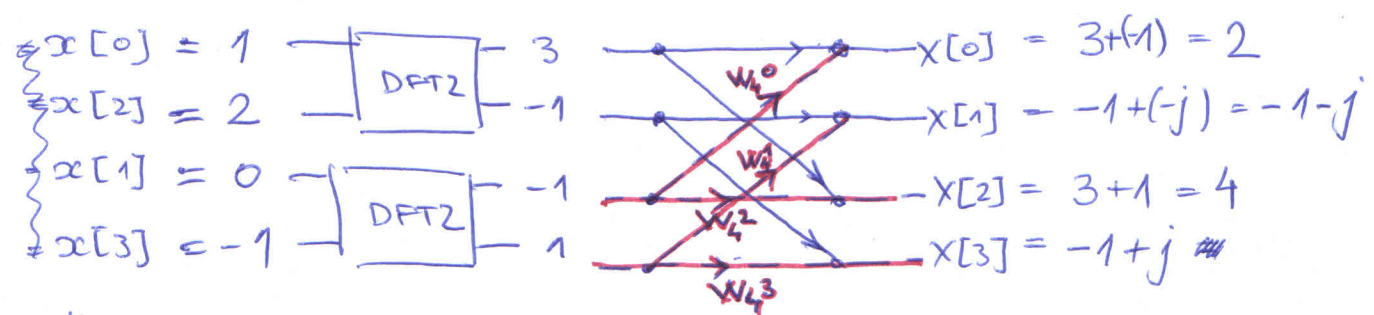
2. a) $X[k] = \sum_{n=0}^3 x[n] \cdot W_4^{nk} = \sum_{n=0}^1 x[2n] W_4^{2nk} + \sum_{n=0}^1 x[2n+1] W_4^{(2n+1)k} =$
 b) $= \sum_{n=0}^1 x[2n] W_2^{nk} + \sum_{n=0}^1 x[2n+1] W_2^{nk} \cdot W_4^k$

$x[0]$
 $x[2]$ \rightarrow DFT2

$x[1]$
 $x[3]$ \rightarrow DFT2

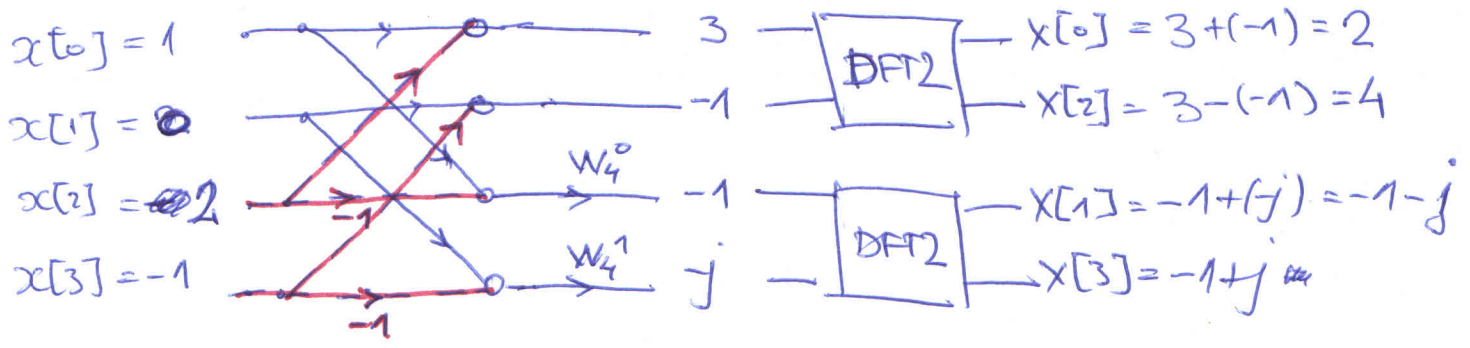


$W_4^0 = 1$ $W_4^2 = -1$
 $W_4^1 = -j$ $W_4^3 = j$



c) + d) $X[k] = \sum_{n=0}^3 x[n] \cdot W_4^{nk} = \sum_{n=0}^1 x[n] W_4^{nk} + \sum_{n=0}^1 x[n+2] W_4^{(n+2)k}$
 $X[2k] = \sum_{n=0}^3 x[n] W_4^{2nk} = \sum_{n=0}^1 x[n] W_4^{2nk} + \sum_{n=2}^3 x[n] W_4^{2nk} =$
 $= \sum_{n=0}^1 x[n] W_4^{2nk} + \sum_{n=0}^1 x[n+2] W_4^{2k(n+2)}$
 $= \sum_{n=0}^1 (x[n] + x[n+2]) W_2^{kn} \Rightarrow \text{DFT}_2 \{ x[n] + x[n+2] \}$

$X[2k+1] = \sum_{n=0}^3 x[n] W_4^{n(2k+1)} = \sum_{n=0}^1 x[n] \cdot W_4^{n(2k+1)} + \sum_{n=0}^1 x[n+2] \cdot W_4^{(n+2)(2k+1)}$
 $= \sum_{n=0}^1 (x[n] - x[n+2]) \cdot W_4^n \cdot W_2^{kn} \Rightarrow \text{DFT}_2 \{ (x[n] - x[n+2]) W_4^n \}$



3) a) $\omega_p = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_p}{2} = \frac{2}{2s} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \text{ rad/s}$

b) Filter 2. reda $N=2$:

$$H_B(s) = H_B(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\omega_p}\right)^4}$$

Koreni polinoma u imenitelju:

$$s_k = \omega_p \cdot e^{j\pi \cdot \frac{2k+1}{4}}$$

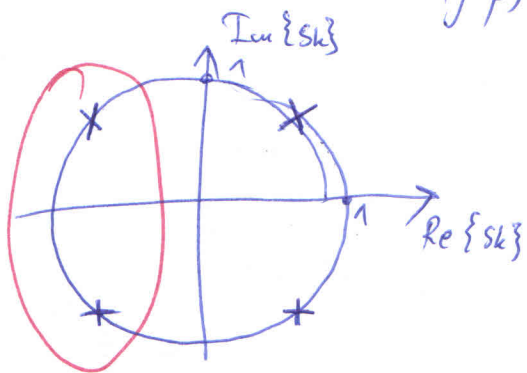
↓

$$s_{0,1} = 1 \text{ rad/s} \cdot e^{j\pi/4}$$

$$s_1 = 1 \text{ rad/s} \cdot e^{j3\pi/4}$$

$$s_2 = 1 \text{ rad/s} \cdot e^{j5\pi/4} = 1 \text{ rad/s} \cdot e^{-j\pi/4}$$

$$s_3 = 1 \text{ rad/s} \cdot e^{j7\pi/4} = 1 \text{ rad/s} \cdot e^{-j3\pi/4}$$



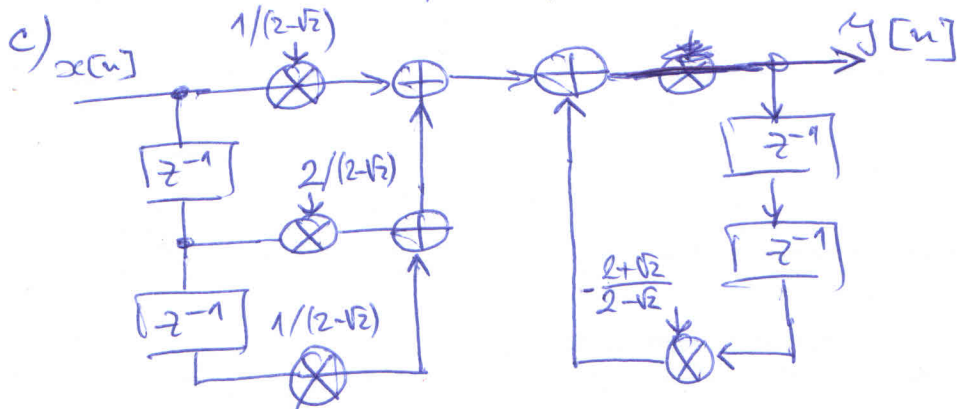
Da bi $H_B(s)$ bilo stabilno:

$$H_B(s) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{1}{(s-e^{j3\pi/4})(s-e^{-j3\pi/4})} \Rightarrow$$

$$H_B(s) = \frac{1}{s^2 - \sqrt{2}s + 1}$$

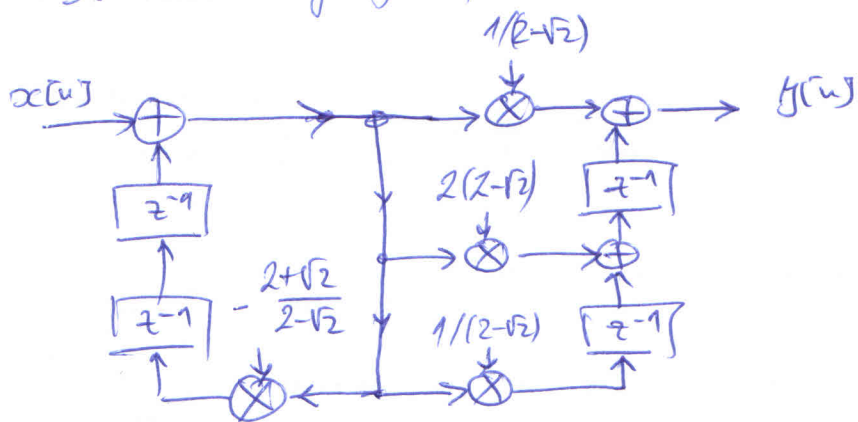
Biocavna transformacija:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{z^2 + 2z + 1}{(2-\sqrt{2})z^2 + 2 + \sqrt{2}} = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{(2-\sqrt{2}) + (2+\sqrt{2})z^{-2}}$$



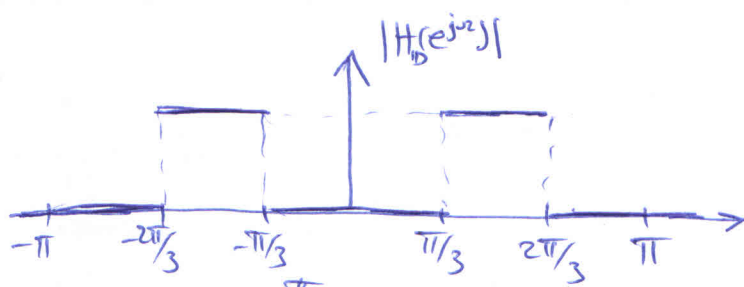
$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{(2-\sqrt{2}) \left(1 + \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} z^{-2}\right)}$$

- d) 1. Ulaz i izlaz zamene mesta
 2. Čvorovi i sabirajući zamenene mesta
 3. Grane grafa promene smer



4.

a)



$$h_{10}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\omega}) \cdot e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 1 \cdot e^{jn\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} 1 \cdot e^{jn\omega} d\omega =$$

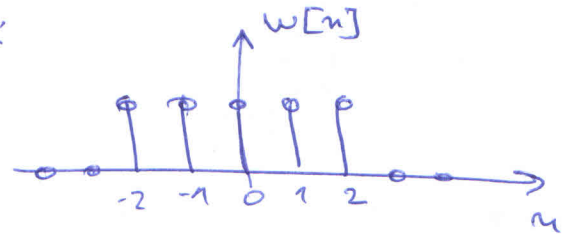
$$= \frac{1}{n\pi} (\sin(\frac{2\pi}{3}n) - \sin(\frac{\pi}{3}n)) \quad \text{za } n \neq 0$$

za $n=0$

$$h_{10}[0] = \lim_{n \rightarrow 0} h_{10}[n] = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n\pi} (\sin(\frac{2\pi}{3}n) - \sin(\frac{\pi}{3}n)) =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

b) $w[n] = \begin{cases} 1 & \text{za } n = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$



ili $w[n] = \begin{cases} 1 & \text{za } n = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$, ako se prvo radi pomerenje idealnog impulsnog odziva, a zatim množenje prozorskom f-jom (kao u kvizi)

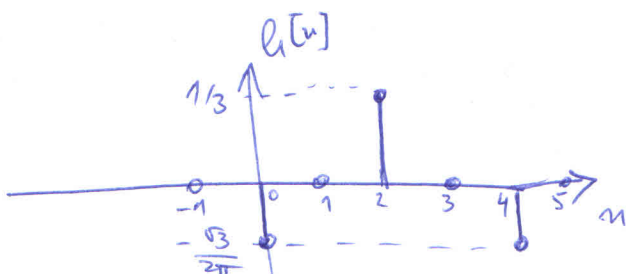
c) $h[n] = h_{10}[n - \frac{5-1}{2}] \cdot w[n] = h_{10}[n-2] \cdot w[n]$

~~$$h[0] = h[4] = h_{10}[-2] = h_{10}[2] = \frac{1}{2\pi} (\sin(\frac{4\pi}{3}) - \sin(\frac{2\pi}{3})) = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$~~

$$h[0] = h[4] = h_{10}[-2] = h_{10}[2] = \frac{1}{2\pi} (\sin(\frac{4\pi}{3}) - \sin(\frac{2\pi}{3})) = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

$$h[1] = h[3] = h_{10}[-1] = h_{10}[1] = \frac{1}{2\pi} (\sin(\frac{2\pi}{3}) - \sin(\frac{\pi}{3})) = 0$$

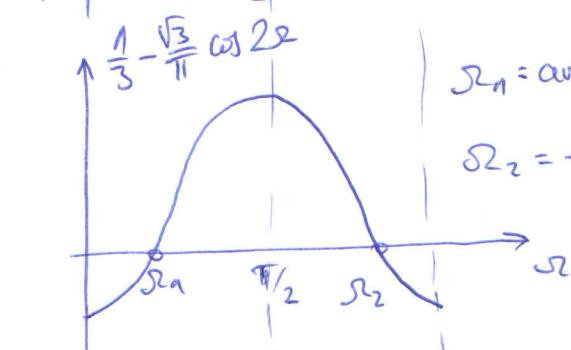
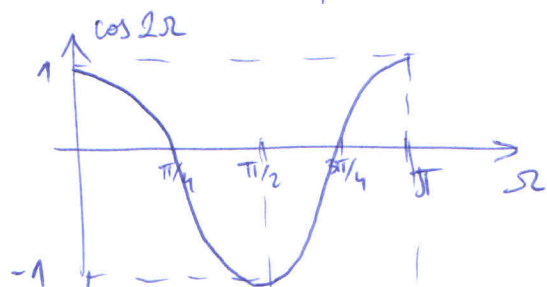
$$h[2] = h_{10}[0] = \frac{1}{3}$$



$$d) H(z) = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{1}{3}z^{-2} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}z^{-4}$$

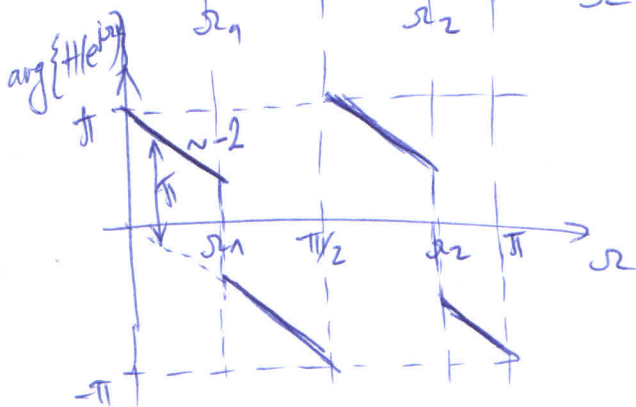
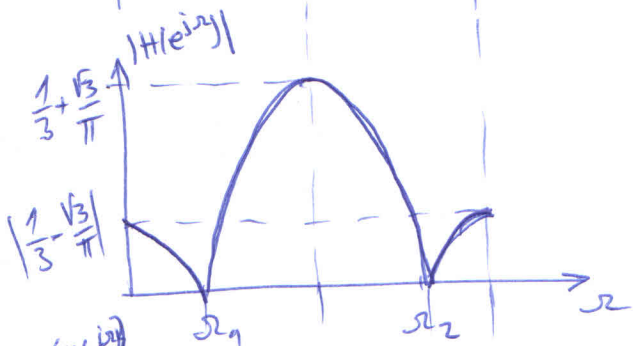
$$H(e^{j\Omega}) = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{1}{3}e^{-2j\Omega} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}e^{-4j\Omega} = e^{-2j\Omega} \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cos 2\Omega \right)$$

$$|H(e^{j\Omega})| = \left| \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cos 2\Omega \right|$$



$$\Omega_1 = \arccos \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\Omega_2 = -\arccos \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \pi$$



$$\arg(H(e^{j\Omega})) = -2\Omega + \arg\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cos 2\Omega\right)$$

$$\arg\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cos 2\Omega\right) = \begin{cases} \pi, & \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cos 2\Omega < 0 \\ 0, & \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cos 2\Omega \geq 0 \end{cases}$$

e) Filtar je stabilan jer su mu svi polovi unutar jediničnog kruga (FIR filter). **Tip I.** Gde su polovi FIR filtra?

f) Hanningova proz. fja ima široki glavni luk i veće slabije bočnih lukova, pa bi filter imao veće slabije u nepropusnoj zoni i veću prelaznu zonu.