

Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet



Katedra za elektroniku

Digitalna obrada signala (19E043DOS)

Domaći zadatak 2024/25.

Cilj ovog domaćeg zadatka je da studenti samostalno probaju osnovne metode frekvencijske analize signala korišćenjem diskretne Furijeove transformacije, da implementiraju jedan brzi algoritam za izračunavanje diskretne Furijeove transformacije, kao i da ovladaju elementarnim korišćenjem programskog jezika Pajton u digitalnoj obradi signala.

Domaći zadatak se sastoji iz tri dela. Prvi deo domaćeg zadatka daje uvid u osnovne probleme koji mogu nastati usled lošeg odabiranja, uvodi diskretnu Furijeovu transformaciju, kao i primene prozorskih funkcija. Drugi deo domaćeg zadatka zahteva implementaciju funkcije za izračunavanje spektrograma i njenu primenu u dvotonskom signaliziranju. Treći deo domaćeg zadatka predstavlja implementaciju jednog algoritma za bto izračunavanje diskretne Furijeove transformacije.

Ceo domaći zadatak treba da bude u fajlu *dos_dz1_GGGG_BBBB.ipynb*, pri čemu treba zameniti *GGGG* i *BBBB* odgovarajućim brojevima koji odgovaraju broju indeksa. Sva tekstualna objašnjenja otkucati u *markdown* ćelijama. Na ovaj način treba integrisati izveštaj i sve kodove u jedan fajl. Potrebno je modifikovati već postojeći fajl i samo njega poslati kao rešenje. Ovo je jedini fajl koji se šalje kao rešenje zadatka! Ne treba slati fajlove sa sajta predmeta. Pročitati uputstvo za slanje rešenja na kraju ovog dokumenta.

Deo 1: Odabiranje, frekvencijska analiza signala i preklapanje u spektru

(10 poena)

1.1

Dat je analogni signal $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 0,5 \cos(2\pi f_2 t) + 3 \cos(2\pi f_3 t)$, $f_1 = 1$ Hz, $f_2 = 3$ Hz, $f_3 = 7$ Hz. Signal se diskretizuje učestanošću $f_s = 100$ Hz.

1. U Pajtonu proceniti **Furijeovu transformaciju** u dovoljnom broju tačaka i nacrtati amplitudsku karakteristiku digitalnih signala $x_1[n]$, $x_2[n]$ i $x_3[n]$ koji su dobijeni odabiranjem signala $x(t)$ u $N_1 = 32$, $N_2 = 128$ i $N_3 = 1024$ tačaka respektivno.
2. Pronaći tri najveće frekvencijske komponente svakog od signala $x_1[n]$, $x_2[n]$ i $x_3[n]$ i odrediti da li se iz spektara mogu tačno proceniti učestanosti f_1 , f_2 i f_3 i sa kojom greškom. Program treba da izračuna tri dominantne učestanosti u spektru sva tri signala, a u *markdown* ćeliji prokomentarisati dobijene rezultate i greške. Primer traženja pozicija maksimalnih vrednosti je dat u skripti *usefulMethods.ipynb* koja prati ovaj tekst.
3. Na signale iz tačke 1 primeniti neku prozorsku funkciju čiji odbirci opadaju do nule ka krajevima. Trajanje te prozorske funkcije je jednako trajanju signala $N_1 = 32$, $N_2 = 128$ ili $N_3 = 1024$. Nacrtati Furijeovu transformaciju modifikovanih signala u istom broju tačaka kao i u tački 1.
4. Kao i u tački 2 pronaći tri najveće frekvencijske komponente svakog od signala $x_1[n]$, $x_2[n]$ i $x_3[n]$ i odrediti da li se iz spektara mogu tačno proceniti učestanosti f_1 , f_2 i f_3 i sa kojom greškom. Prokomentarisati dobijene rezultate i greške.
5. Da li se korišćenjem neke druge prozorske funkcije mogu popraviti rezultati i zašto?

U kodu komentarima jasno naznačiti koji deo koda se odnosi na koji deo zadatka.

Sve vremenske ose u ovom delu treba da budu u sekundama. Frekvencijske karakteristike crtati tako da je frekvencijska osa u hercima od 0 do $f_s/5$. Neophodno je obeležiti sve ose odgovarajućim oznakama/tekstom.

1.2

Dat je analogni signal $x(t) = 5 \cos(2\pi f_1 t) + 1000 \cos(2\pi f_2 t) + 10 \cos(2\pi f_3 t)$, $f_1 = 1$ kHz, $f_2 = 1,3$ kHz, $f_3 = 1,32$ kHz. Signal se diskretizuje učestanošću $f_s = 11,25$ kHz.

6. Odrediti minimalan broj odbiraka N digitalnog signala $x[n]$ za koju prilikom izračunavanja diskretne Furijeove transformacije ne dolazi do curenja spektra. Obrazložiti u izveštaju. Nacrtati ovaj signal u N tačaka, kao i njegovu diskretnu Furijeovu transformaciju (realni i imaginarni deo na istoj slici, jedan grafik ispod drugog).

1.3

U prilogu ovog fajla, nalazi se nepoznati kompleksni signal koji je nastao kao suma nekoliko sinusoidalnih komponenti. Signal je sačuvan u fajlu *nepoznati_signal.pkl*.

7. Nacrtati vremenski oblik zadatog signala (njegov realni i imaginarni deo).
8. Iterativnim postupkom pronaći dužinu pravougaonog prozora N kojim treba odseći ulazni signal tako da ne postoji curenje spektra.
9. Nacrtati amplitudsku i faznu karakteristiku signala odsečenog u N tačaka.
10. Na osnovu nacrtane karakteristike, odrediti analitički oblik signala i zapisati ga u tekstualnoj ćeliji.

1.4

Naredni deo zadatka se odnosi na probleme preklapanja u spektru:

11. Izgenerisati sinusoidalni signal $x_{chirp}[n]$ trajanja 5 s kome se relativna učestanost menja linearno sa vremenom od 0 do $1/2$, pri čemu je $f_s = 8$ kHz (*chirp*¹ signal). Korišćenjem *IPython* biblioteke pustiti ovaj signal na zvučnicima.
12. Uzimanjem svakog drugog odbirka iz signala $x_{chirp}[n]$ izgenerisati signal $x_{chirp,d2}[n]$, a zatim i uzimanjem svakog petog odbirka, izgenerisati signal $x_{chirp,d5}[n]$. Korišćenjem *IPython* biblioteke pustiti novodobijene signale na zvučnicima. Ne zaboraviti da je sada učestanost odabiranja promenjena.
13. Jedan ispod drugog, nacrtati spektrograme izgenerisanog *chirp* signala i njegovih decimiranih verzija. Efekte koji se dobijaju u ovoj i prethodnoj tački objasniti u *markdown* ćelijama.

1.5

Mali dodatak, za zainteresovane: U prilogu ovog fajla, u direktorijumu *dz1_signali*, nalazi se fajl *chopin.wav* u kome se nalaze odbirci snimljenog muzičkog signala (Frederik Šopen - Nokturno broj 9, opus 2).

14. Korišćenjem *IPython* biblioteke učitati signal iz fajla *chopin.wav* i nacrtati spektrogram tog signala. Na osnovu spektrograma proceniti kolika je minimalna učestanost odabiranja ovog signala, a da se prilikom puštanja na zvučnike korišćenjem *IPython* biblioteke ne pokvari značajno kvalitet zvuka.
15. Izbacivanjem određenog broja odbiraka iz učitanoog signala, smanjiti učestanost odabiranja na onu kod koje se čuje značajna degradacija zvučnog signala. Nacrtati spektrogram degradiranog signala.

U kodu komentarima jasno naznačiti koji deo koda se odnosi na koji deo zadatka.

Sve vremenske ose u ovom delu treba da budu u sekundama. Frekvencijske karakteristike crtati tako da je frekvencijska osa u hercima od 0 do $f_s/2$. Neophodno je obeležiti sve ose odgovarajućim oznakama/tekstom.

¹ Linearno frekvencijski modulirani kontinualni *chirp* signal ima sledeći oblik: $x(t) = \sin\left(\theta_0 + 2\pi\left(f_0 t + \frac{\beta}{2} t^2\right)\right)$, gde je θ_0 početna faza, f_0 učestanost u početnom trenutku, a β nagib lineane funkcije po kojoj učestanost raste.

Deo 2: Spektrogram

(7 poena)

1. Napisati funkciju `S, f, t = dosSpectrogram(x, fs, window, noverlap, nfft, fMaxShow)` koja kao ulazne argumente prima signal `x` čiji je spektrogram potrebno pronaći, učestanost odabiranja `fs`, vektor odbiraka prozorske funkcije kojom se odsecaju pojedinačni delovi signala `window`, broj tačaka preklapanja susednih prozora `noverlap`, broj tačaka izračunavanja diskretne Furijeove transformacije (uz dopunjavanje nulama) `nfft`, i maksimalnu učestanost koju treba prikazati `fMaxShow`. Kao izlazne argumente funkcija vraća matricu `S` u kojoj susedne kolone predstavljaju vektore DFT-a pojedinačnih prozora, niz učestanosti `f` kojima odgovaraju koeficijenti DFT-a iz matrice `S` i niz vremenskih trenutaka `t` u kojima počinje svaki od prozora. Ukoliko je ulazni signal realan, funkcija vraća jednostrani spektar gde su učestanosti raspoređene od 0 do `fMaxShow`. Ukoliko je ulazni signal kompleksan, funkcija vraća dvostrani spektar gde su učestanosti u opsegu od `-fMaxShow` do `fMaxShow`. Dozvoljeno je koristiti ugrađenu funkciju za brzu Furijeovu transformaciju, ali nije dozvoljeno koristiti ugrađene funkcije za izračunavanje spektrograma.

Kao test primer za napisanu funkciju potrebno je iskoristiti signale generisane za dvotonsko signaliziranje. Dvotonsko signaliziranje (*Dual-tone multifrequency - DTMF*) je metod koji se koristi za uspostavljanje veze u fiksnoj telefoniji kod uređaja sa tasterima (tonsko biranje – *tone dialing*). Tonsko biranje omogućava značajno brže biranje broja od ranije korišćenog pulsog rotacionog biranja. Iako napušteno u doba digitalne i IP telefonije, dvotonsko signaliziranje je jedno od najlepših primera za prikaz spektrograma.

	1209Hz	1336Hz	1477Hz
697Hz	1	2	3
770Hz	4	5	6
852Hz	7	8	9
941Hz	*	0	#

Slika 1 - Učestanosti koje odgovaraju različitim tasterima na tastaturi analognog telefona

DTMF signal se sastoji od sume dve sinusoide različitih učestanosti. Učestanosti su predefinisane, a na slici 1 je prikazano koje učestanosti odgovaraju kom tasteru. Tako na primer, tasteru 1 odgovaraju dve sinusoide gde je jedna učestanosti 697 Hz, a druga 1209 Hz, tasteru 9 odgovaraju učestanosti 852 Hz i 1477 Hz itd. Korisnik prilikom biranja broja, pritiska tastere, a telefon šalje dvo-tonske signale centrali u kojoj se detektuje koji je broj biran. U centrali se radi Short-Time Furijeova transformacija, tj. signal koji dolazi se seče na delove i za svaki od delova se nezavisno radi DFT. U fajlu koji prati ovaj dokument *031823159.wav* je dat primer signala koji ispravan telefon šalje prilikom pozivanja broja iz imena fajla.

Međutim, trajanja pritiska tastera i pauza mogu biti različita od korisnika do korisnika, neka od dve sinusoide zbog frekvencijske karakteristike kanala potencijalno može biti oslabljena, pa je zbog toga potrebno napisati robustan algoritam koji će detektovati pozvani broj.

U ovom zadatku je samo potrebno nacrtati spektrograme za nekoliko test sekvenci i na osnovu njih ručno odrediti koji su brojevi pozvani. Test sekvence su date kao .wav fajlovi sa imenom *nepoznati_broj_N* gde je *N* redni broj sekvence.

2. Učitati signal iz fajla *031823159.wav*. Prikazati vremenski oblik signala i spektrogram ovog signala korišćenjem funkcije napisane u tački 2.1. Nacrtati spektrogram i korišćenjem ugrađene funkcije i uporediti rezultate. Vremenska osa treba da bude u sekundama.

3. Nacrtati vremenske oblike test signala i njihove spektrograme, odrediti i ispisati detektovane brojeve. Ukoliko je potrebno, primeniti neku prozorsku funkciju kako bi se bolje uočile frekvencijske komponente.
4. Za spektrograme i usvojenu prozorsku funkciju iz tačaka 2.2 i 2.3 vizuelnom inspekcijom odrediti minimalno i maksimalno trajanje prozora za koje se dobija dovoljno dobra frekvencijska i vremenska rezolucija za jasno uočavanje pozvanog broja. Obrazložiti odgovor u Markdown ćeliji i nacrtati spektrograme sa minimalnom i maksimalnom dužinom prozora.

Sve vremenske ose u ovoj tački treba da budu u sekundama. Neophodno je obeležiti sve ose odgovarajućim oznakama/tekstom.

Deo 3: Implementacija Radix-2 algoritma za izračunavanje brze diskretne Furijeove transformacije

(8 poena)

1. U programskom jeziku *Pajton* napisati funkciju `X = fft_radix_2(x)` koja kao ulazni argument ima vektor odbiraka signala, a kao izlazni argument vraća vektor koeficijenata diskretne Furijeove transformacije tog signala. Funkcija treba da izračuna diskretnu Furijeovu transformaciju signala `x` korišćenjem Radix-2 algoritma sa fiksnom geometrijom leptirova. Ulazni signal može biti proizvoljne dužine. Ako signal nije dužine koja je stepen broja 2, potrebno ga je produžiti nulama do prve veće dužine koja jeste stepen broja 2.
2. Korišćenjem funkcije `fft_radix_2` nacrtati spektar signala iz tačke 6 prvog dela domaćeg zadatka. Da li se spektar razlikuje od spektra nacrtanog naredbom `fft`? Zašto? Ako je proizvoljan broj tačaka u kojoj se izračunava DFT funkcijom `fft_radix_2`, da li je moguće dobiti da ne postoji curenje spektra? Obrazložiti i zapisati odgovore u tekstualnoj ćeliji.
3. Izračunati diskretnu Furijeovu transformaciju i nacrtati amplitudski spektar dela signala učitano iz fajla *chopin.wav*. Izračunavanje se radi nad 0,25 s signala kada postoje neki tonovi sa klavira. DFT treba izračunati najpre po definiciji, a zatim korišćenjem funkcije `fft_radix_2`. U izveštaj upisati vreme izračunavanja korišćenjem jedne i korišćenjem druge funkcije. Zašto se ova vremena razlikuju?

Obeležiti sve ose odgovarajućim oznakama/tekstom. Amplitudske spektre crtati tako da je frekvencijska osa u hercima od 0 do $f_s/2$. U kodu komentara jasno naznačiti koji deo koda se odnosi na koji deo zadatka.

Uputstvo za slanje rešenja domaćeg zadatka

Jedini fajl koji potrebno dostaviti je fajl `dos_dz1_godinaupisa_brojindeksa.ipynb`. Pre slanja **obavezno** očistiti sve izlaze ćelija klikom na *Edit* → *Clear All Outputs* i sačuvati takav fajl.

NE slati fajlove koji su dati kao prilog zadatku jer oni samo povećavaju veličinu fajla i postoji mogućnost da će u tom slučaju mejl biti isfiltriran.

Smatrati da su svi ulazni signali na putanji `"dz1_signali"`, baš kao u primerima koji prate ovaj tekst.

Rešenje zadatka poslati asistentu na mejl petrovicv@etf.rs najkasnije **do nedelje 22.12. u 23:59**. Naslov mejla treba da bude **19E043DOS – Prvi domaci zadatak GGGG/BBBB**, gde je GGGG godina upisa, a BBBB broj indeksa. Vrlo je važno da mejl bude naslovljen kako je napisano, u suprotnom će biti isfiltriran. Obaveštenja o odbrani domaćeg zadatka biće naknadno postavljena na sajtu predmeta.

Opšte: Trudite se da napisani kod bude pregledan i detaljno komentaran. To će vam uštedeti vreme. Nemojte pisati komentare samo da biste zadovoljili zahtev domaćeg zadatka, pokušajte da izvučete prednosti iz preglednog i lepo komentaranog koda. **Domaći zadaci se rade samostalno. Prepisivanje povlači 0 poena na domaćem zadatku i disciplinsku prijavu.**