Odsek za elektroniku

Signali i sistemi – I kolokvijum (3.5 sati) 20.4.2019.

1. Dati su signali $h[n]=(0.5\cdot e^{-j\Omega_0})^n\,\mathrm{u}[n]$ i $x[n]=e^{j\pi n/8}$

a) P= nije periodičan; W=4/3=1.333

b) Stabilan je jer je impulsni odziv apsolutno sumabilan.

c) N_0=16.

d) [3] Koliki je osnovni period signala $y[n]=x[n]-e^{-j\pi n/5}-4\sin(0.4n\pi)$.

N_{y0}=NZS(16,10,5)=80

2. Ako je $y[n]=h[n]*x[n]$:

a) Odrediti konstantu a ako je $y[n+2]=h[n+a]*x[n-3]$ a=5

b) Ako su dužine signala $x[n]$: N_x =100, a $h[n]$: N_h =50, koliko članova ima signal $y[n]$? $N_y=N_x+N_h-1=149$

c) [3] Ako je $y[n]=2x[n+1]+4x[n+4]-6x[n-2]$ odrediti $h[n]$

$$\Rightarrow h[n]=2\delta[n+1]+4\delta[n+4]-6\delta[n-2]$$

d) [3] Objasniti sa po jednom rečenicom da li je sistem iz c) kauzalan, sa/bez memorije, vremenski invarijantan?

Nije kauzalan jer zavisi od pedvidjene pobude, zbog toga mora da ima memoriju, jeste vremenski invarijantan

e) [3] ako je $x[n]=n(n+1)$ a $h[n]$ = u$[n]$−u$[n-2]$ odrediti $y[n]$ u formi $y[n]=An^2+Bn+C$ A=2, B=0, i C=0.

f) [3] ako je $(\Delta^3-2E)x[n]=(aE^3+bE^2+cE-1)x[n]$ tada su a=1, b=−3, i c=1.

3. Diskretni sistem je opisan diferencnom jednačinom: $(E-0.5)(E+0.4)y[n-2]=D(2E-1)x[n],\ x[n]=2^{-n}\,\mathrm{u}[n]$

a) [2] Objasniti da li je sistem stabilan

$|\lambda_K|<1$ jeste stabilan

b) [8] Odrediti impulsni odziv u formi $h[n]=(C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n)\cdot\mathrm{u}[n-1]+k\delta[n]$ C_1=0; C_2=2; k=2;

Jednostavniji postupak:

$$\cancel{(E-0.5)}(E+0.4)y[n-2]=2D\cancel{(E-0.5)}x[n]\ \textit{skrati se}\Rightarrow(E+0.4)y[n-2]=2Dx[n]=2x[n-1]$$

$$\Rightarrow(E+0.4)y[n-1]=2Dx[n]=2x[n]$$

$$y[n]+2/5\cdot y[n-1]=2x[n]$$

$$h[0]=2$$

$$h[n]=C(-2/5)^n\,\mathrm{u}[n]\Rightarrow C=2\Rightarrow h[n]=2\cdot(-2/5)^n\,\mathrm{u}[n]=2\cdot(-0.4)^n\,\mathrm{u}[n-1]+2\delta[n]+0\cdot(0.5)^n\,\mathrm{u}[n-1]$$

Algoritamski postupak:

$$y[n]-0.1y[n-1]-0.2y[n-2]=2x[n]-x[n-1]$$

$$h_1[n]-0.1h_1[n-1]-0.2h_1[n-2]=\delta[n]\Rightarrow h_1[0]=1$$

$$h_1[1]-0.1\cdot1=0\Rightarrow h_1[1]=0.1$$

$$h_1[n]=\left(A\cdot\left(1/2\right)^n+B\cdot(-2/5)^n\right)\mathrm{u}[n]$$

$$\left.\begin{aligned}&A+B=1\\&A/2-2B/5=0.1\end{aligned}\right\}A=5/9, B=4/9$$

$$h[n]=2h_1[n]-h_1[n-1]=(2A\cdot\left(1/2\right)^n+2B\cdot(-2/5)^n)\mathrm{u}[n]-\left(A\cdot\left(1/2\right)^{n-1}+B\cdot(-2/5)^{n-1}\right)\mathrm{u}[n-1]$$

$$=(2A\cdot\left(1/2\right)^0+2B\cdot(-2/5)^0)\delta[n]+\left((2A-2A)\left(1/2\right)^n+(2B+5B/2)(-2/5)^n\right)\mathrm{u}[n-1]$$

$$=2\delta[n]+2\cdot(-2/5)^n\mathrm{u}[n-1]=2\cdot(-0.4)^n\mathrm{u}[n-1]+2\delta[n]+0\cdot(0.5)^n\mathrm{u}[n-1]$$

c)

$$h[n]=2(-2/5)^n\mathrm{u}[n]$$

$$y_p[n]=2\cdot(-2/5)^n\mathrm{u}[n]*(1/2)^n\mathrm{u}[n]=2\frac{(1/2)^{n+1}-(-2/5)^{n+1}}{1/2+2/5}\mathrm{u}[n]$$

$$=2\frac{10}{9}\left((1/2)^{n+1}-(-2/5)^{n+1}\right)\mathrm{u}[n]=2\left(\frac{5}{9}(1/2)^n+\frac{4}{9}(-2/5)^n\right)\mathrm{u}[n]$$

Međutim, u slučaju algoritamskog rešenja moguće je jednostvanije doći do prinudnog odziva:

$$f[n]=D(2E-1)x[n]=2\,x[n]-x[n-1]=2\cdot 2^{-n}\mathrm{u}[n]-2^{-n+1}\mathrm{u}[n-1]=2\cdot 2^{-n}\delta[n]=2\delta[n]$$

Prema tome $y_p[n]=2h_1[n]=2\left(A\cdot\left(1/2\right)^n+B\cdot(-2/5)^n\right)\mathrm{u}[n]=2\left(\frac{5}{9}(1/2)^n+\frac{4}{9}(-2/5)^n\right)\mathrm{u}[n]$

---

d) [5] Odrediti sopstveni odziv u formi $y_s[n]=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n$ ako je $y[0]=-y[1]=1$. $\boxed{C_1=-16/9;\ C_2=7/9.}$

$$y[1]-0.1y[0]-0.2y[-1]=2x[1]-x[0]=0$$

$$-1-0.1-0.2y[-1]=0\Rightarrow y[-1]=-11/2$$

$$y[0]-0.1y[-1]-0.2y[-2]=2x[0]-x[-1]=2$$

$$1+1.1/2-0.2y[-2]=2\Rightarrow y[-2]=-9/4$$

$$y_s[n]=C_1(1/2)^n+C_2(-2/5)^n$$

$$\left.\begin{aligned}&y_s[-1]=2C_1-5C_2/2=-11/2\\&y_s[-2]=4C_1+25C_2/4=-9/4\end{aligned}\right\}C_1=-16/9;\quad C_2=7/9$$

4. Linearni kauzalni sistem je opisan diferencijalnom jednačinom:

$(D+3)(D-2)y(t)=(D+1)x(t),\ x(t)=(e^t+1)\mathrm{u}(t),$

a) [10] Rešavanjem u vremenskom domenu odrediti impulsni odziv

$$za\ t>0:$$

$$s_1(t)=Ae^{-3t}+Be^{2t}+1/P[0]=Ae^{-3t}+Be^{2t}-1/6$$

$$\left.\begin{aligned}&s_1(0)=A+B-1/6=0\\&s_1'(0)=-3A+2B=0\end{aligned}\right\}A=1/15; B=1/10$$

$$h_1(t)=s_1'(t)=-3Ae^{-3t}+2Be^{2t}=-\frac{1}{5}e^{-3t}+\frac{1}{5}e^{2t}$$

$$h(t)=h_1'(t)+h_1(t)=\frac{3}{5}e^{-3t}+\frac{2}{5}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-3t}+\frac{1}{5}e^{2t}=\frac{2}{5}e^{-3t}+\frac{3}{5}e^{2t},\quad za\ \ t>0$$

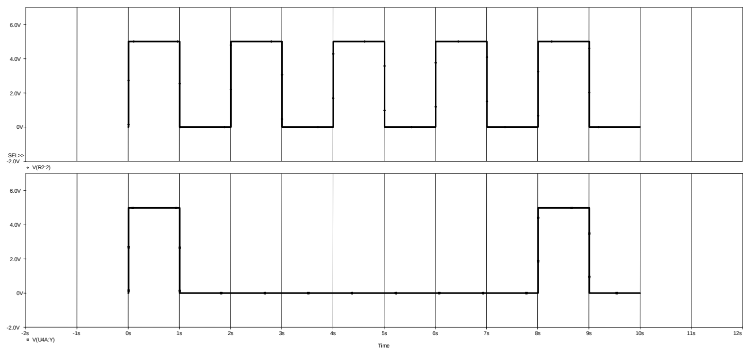
$$h(t)=\left(\frac{2}{5}e^{-3t}+\frac{3}{5}e^{2t}\right)\mathrm{u}(t),\ za\ \forall\ t$$

b) [10] Rešavanjem u vremenskom domenu odrediti prinudni i ustaljeni odziv

$$y_P(t) = x(t) * h(t) = \left(\frac{2}{5}\frac{e^{t} - e^{-3t}}{1+3} + \frac{3}{5}\frac{e^{2t} - e^{t}}{2-1} + \frac{2}{5}\frac{e^{0t} - e^{-3t}}{0+3} + \frac{3}{5}\frac{e^{2t} - e^{0t}}{2-0} \right) \mathrm{u}(t)$$

$$= \left(\underbrace{-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{t}}_{y_{us}(t)} - \frac{7}{30}e^{-3t} + \frac{9}{10}e^{2t} \right) u(t)$$

5. Signal sa slike 1 $x(t)$ je periodičan sa periodom 2s, a u njegovoj osnovnoj periodi je definisan sa $x_F(t) = V_{DD} \cdot \mathrm{rect}(t - 0.5)$, gde je $V_{DD} = 5\mathrm{V}$ napajanje CMOS logičkih kola.



a) [10] Odrediti koeficijente razvoja $Y[k]$ signala $y(t)$ u Furijeov red na njegovoj osnovnoj periodi. Stanje flip-flopova je 0 u $t = 0^-$.

Tablica i kašnjenje za 0.5: $Y[k] = 5\mathrm{V} \cdot \frac{1}{8} \mathrm{sinc}(k/8) e^{-jk\omega_0/2} \quad T_0 = 4T_F = 8; \quad \omega_0 = 2\pi / T_0 = \pi/4$

b) [10] Ako je osnovna učestanost signala $y(t)$ jednaka ω_0, i ako se signal $y(t)$ dovede na sistem čija je funkcija prenosa $H(j\omega) = 3\left(\mathrm{u}(\omega + 2.5\omega_0) - \mathrm{u}(\omega - 2.5\omega_0)\right)$, odrediti Furijeovu transformaciju signala $g(t) = y(t) * h(t)$

$$Y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi Y[k] \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$G(j\omega) = Y(j\omega) H(j\omega) =$$

$$= 3\left(\mathrm{u}(\omega + 2.5\omega_0) - \mathrm{u}(\omega - 2.5\omega_0)\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi Y[k] \delta(\omega - k\omega_0) =$$

$$= \sum_{k=-2}^{+2} 6\pi Y[k] \delta(\omega - k\omega_0)$$

c) Signal $g(t)$ se satoji od 3x pojačanih: - jednosmerne komponente, - dva kompleksna harmonika sa negativnim indeksom
- i dva sa pozitivnim indeksom,

$$G[k] = 3Y[k](\mathrm{u}[k+2] - \mathrm{u}[k-3])$$

$$P = \sum_{k=-2}^{+2} \left| G[k] \right|^2 = (5\mathrm{V})^2 \frac{9}{64} \left(1 + 2\left(0.97^2 + 0.9^2 \right) \right) = 16\ \mathrm{V}^2$$

6. Jedno od mogućih rešenja

a) $x(t) = e^{-3|t|}\sin(2t)$

$$F\{e^{-3|t|}\} = \frac{1}{j\omega+3} - \frac{1}{j\omega-3}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{j\omega+3} - \frac{1}{j\omega-3}\right) * j\pi\left(\delta(\omega+2) - \delta(\omega-2)\right)$$

$$\frac{1}{j\omega+3} * \left(\delta(\omega+2) - \delta(\omega-2)\right) = \frac{1}{j(\omega+2)+3} - \frac{1}{j(\omega-2)+3} =$$

$$\frac{1}{(j\omega+3)+2j} - \frac{1}{(j\omega+3)-2j} = \frac{-4j}{(j\omega+3)^2+4}$$

Slični se dobija za drugi sabirak

$$\frac{1}{j\omega-3} * \left(\delta(\omega+2) - \delta(\omega-2)\right) = \frac{1}{j(\omega+2)-3} - \frac{1}{j(\omega-2)-3} =$$

$$\frac{1}{(j\omega-3)+2j} - \frac{1}{(j\omega+3)-2j} = \frac{-4j}{(j\omega-3)^2+4}$$

$$X(j\omega) = \frac{2}{(j\omega+3)^2+4} - \frac{2}{(j\omega-3)^2+4} = \frac{2}{(3+j\omega)^2+4} + \frac{-2}{(3-j\omega)^2+4}$$

$$X(j\omega) = \frac{k_1}{(a+j\omega)^2+b} + \frac{k_2}{(c-j\omega)^2+d} \Rightarrow k_1 = -k_2 = 2; \quad a = c = 3; \quad b = d = 4.$$

b) [10] Koristeći Paservalovu teoremu odrediti energiju signala $x(t) = 2\operatorname{sinc}^2(3t)$.

$$X(j\omega) = 2\cdot\frac{1}{3}\operatorname{tri}\left(\frac{1}{3}\frac{\omega}{2\pi}\right),$$

$$W = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2\, d\omega =$$

$$= \frac{2}{9\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 6\pi\cdot\operatorname{tri}^2\left(\frac{\omega}{6\pi}\right) d\left(\frac{\omega}{6\pi}\right) = \frac{12}{9}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{tri}^2(\tau)\, d(\tau) = 2\cdot\frac{12}{9}\int_0^1 \tau^2 d(\tau) = \frac{8}{9}.$$