1. [7+8] Za sistem opisan diferencijalnom jednačinom:

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=x'(t)$$

odrediti:

a) Impulsni odziv sistema.

b) Prinudni odziv na pobudu $x(t)=\mathrm{e}^{-4t}\mathrm{u}(t)$.

Rešenje:

a) Neka je $h_1(t)$ impulsni odziv sistema $h_1''(t)+5h_1'(t)+6h_1(t)=\delta(t)$. Tada je $h(t)=h_1'(t)$ impulsni odziv traženog sistema.

Računaju se početni uslovi: $h_1'(0^+)=1$ i $h_1(0^+)=0$. Impulsni odziv je oblika

$$h_1(t)=C_1\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{u}(t)+C_2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t),$$

a njegov izvod je $h_1'(t)=(-3C_1\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{u}(t)-2C_2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t))+(C_1+C_2)\delta(t)$. Određuju se konstante na osnovu početnih uslova $C_2=-C_1=1$.

$$h_1(t)=-\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{u}(t)+\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)$$

$$h(t)=h_1'(t)=3\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{u}(t)-2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)$$

b) Prinudni odziv se određuje konvolucijom.

$$y(t)=(-2\mathrm{e}^{-4t}+\ 3\mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-2t})\mathrm{u}(t)$$

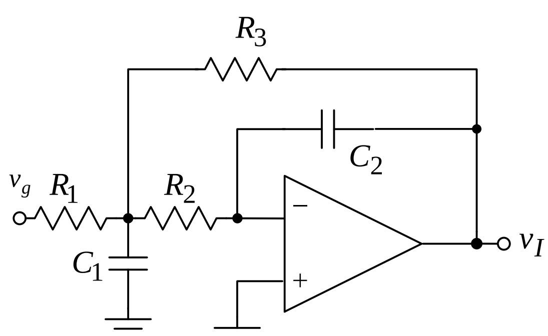
2. [10+8+13+3] Na slici je dato je električno kolo čija funkcija penosa ima dva konjugovano kompleksna pola učestanosti pola $\omega_P=5000\,\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ i Q-faktora $Q=0.625$.

a) Ako važi $R_2=R_3$ i $C_1=100\,\mathrm{nF}$, $C_2=40.96\,\mathrm{nF}$ odrediti vrednosti svih otpornosti u kolu.

b) Nacrtati Bodeove asimptotske karakteristike kola.

c) Konvolucijom odrediti odziv na pobudu $x(t)=\mathrm{u}(t)$.

d) Ispitati stabilnost sistema.



Rešenje:

a) Prenosna funkcija je filtar propusnik niskih učestanosti:

$$H(s)=\frac{-\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}{s^2+\frac{s}{R_2C_1}\left(1+\frac{R_2}{R_3}+\frac{R_2}{R_1}\right)+\frac{1}{R_3R_2C_1C_2}}.$$

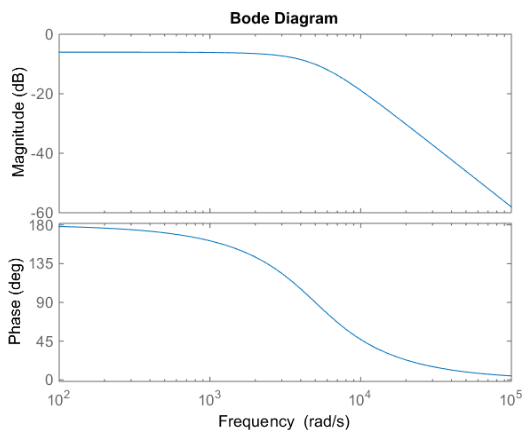
Očigledno je $\omega_P^2=\frac{1}{R_2R_3C_1C_2}$, pa je $R_2=R_3=\frac{1}{\omega_P\sqrt{C_1C_2}}=3.125\,\mathrm{k}\Omega$ .Računa se

$$R_1=\frac{R_2}{\frac{\omega_P}{Q}C_1R_2-1-\frac{R_2}{R_3}}=6.25\,\mathrm{k}\Omega.$$

b) Prenosna funkcija je:

$$H(s)=-\frac{1.25\cdot 10^7}{s^2+8000s+5000^2}$$

Bodeovi dijagrami su prikazani na slici 2.



Slika 2

c) Prenosna funkcija se može napisati kao:

$$H(s)=-\frac{1.25\cdot 10^7}{s^2+8000s+5000^2}=\frac{-1.25\cdot 10^7\cdot\frac{3000}{3000}}{(s+4000)^2+3000^2},$$

što odgovara impulsnom odzivu: $h(t)=-\frac{12500}{3}e^{-4000t}\sin(3000t)\mathrm{u}(t)$.

Konvolucijom se dobija:

$$y(t)=-\frac{12500}{3}\frac{e^{-4000t}(-3000\cos(3000t)+4000\sin(3000t))+3000}{5000^2}\mathrm{u}(t)=\left(\frac{1}{2}\cos(3000t)-\frac{2}{3}\sin(3000t)-\frac{1}{2}\right)e^{-4000t}\mathrm{u}(t)$$

.

d) Sistem je stabilan zato što su polovi sistema u levoj kompleksnoj poluravni.

5) $y_1(t) = x(t) - x(-t) = 2x_o(t)$

6) $Y_1[k] = 2 \cdot \left(\frac{-j\,B[k]}{2} \right) = -j\,B[k]$

$y(t) = y_1(t - t_0) \Rightarrow Y[k] = -j\,B[k]\,e^{-jk\omega_0 t_0}$

$Y[k] = -j\,B[k]\left(\cos(k\omega_0 t_0) - j\sin(k\omega_0 t_0)\right)$

$= -B[k]\sin(k\omega_0 t_0) - j\,B[k](\cos k\omega_0 t_0)$

$Y[k] = \frac{Y_c[k] - j\,Y_s[k]}{2}$

$Y_c[k] = -2\,B[k]\sin(k\omega_0 t_0)$

$Y_s[k] = -2\,B[k]\cos(k\omega_0 t_0)$

a) $X[k] = \frac{A[k] - j\,B[k]}{2}$ $\quad X^*[k] = \frac{A[k] + j\,B[k]}{2}$

$A[k] = X[k] + X^*[k] \quad B[k] = j\left(X[k] - X^*[k]\right)$

3) ЗАДАТАК $\boxed{\text{БОДОВИ } a) = 15b \quad б) = 10b \quad c) = 15b}$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2 \quad \lambda_{1/2} = \pm\sqrt{2} \qquad x[n] = 2\cdot 3^n u[n-1]$

б) $y_{os}[n-2] = \frac{1}{P(E)} 2\cdot 3^n = \frac{2\cdot 3^n}{7} \Rightarrow y_{os}[n] = \frac{18\cdot 3^n}{7}$

ПРИНУДНИ ОДЗИВ ЈЕ ОДЗИВ СА НУЛТИМ ПОМОЋНИМ УСЛОВИМА (УСЛОВИ ПРЕ ПОБУДЕ)

$y[-1] = y[-2] = 0$: ПОМОЋНИ УСЛОВИ ЗА ВРЕМЕ ПОБУДЕ СУ ПОТРЕБНИ ДА БИ СЕ ОДРЕДИЛИ C_1 и C_2

$y[n] = \left(C_1(\sqrt{2})^n + C_2(-\sqrt{2})^n + \frac{18}{7}3^n\right)u[n]$

$y[0] - 2\underbrace{y[-2]}_{\to 0} = x[0] = 0 \Rightarrow y[0] = 0$; $\quad y[0] = 0 = C_1 + C_2 + \frac{18}{7}$

$y[1] - 2\underbrace{y[-1]}_{0} = x[1] = 6 \Rightarrow y[1] = 6$; $\quad y[1] = 6 = \sqrt{2}C_1 - \sqrt{2}C_2 + 3\cdot\frac{18}{7}$

$C_1 = -\frac{3}{7}(3+\sqrt{2}) \quad C_2 = -\frac{3}{7}(3-\sqrt{2})$

НАПОМЕНА: ИСТО РЕШЕЊЕ СЕ ДОБИЈА НАЛАЖЕЊЕМ ИМПУЛСНОГ ОДЗИВА + КОНВОЛУЦИЈОМ

---

4) а) $x[n] = \underbrace{\underbrace{\sin(|n|)}_{П}\cdot\underbrace{\cos(\sin(n))}_{П}}_{П} + \underbrace{\underbrace{\cos(|n|)}_{П}\cdot\underbrace{\sin(\sin(n))}_{НП}}_{НП}$

б) $2\pi\cdot F_0 \cdot 3 = 2k\pi \quad F_0 = k/3$

МОГУЋА РЕШЕЊА ЗА ОСНОВНУ ПЕРИОДУ

$k = 0, 1, 2$

0 НИЈЕ РЕШЕЊЕ ЈЕР ЈЕ $5\cos(0) = 5 =$ КОНСТАНТА

СВА РЕШЕЊА: $\Omega_0 \in \{2\pi + 2m\pi,\ 4\pi + 2m\pi\}\ m \in \mathbb{Z}$

---

c) НИЈЕ ИНВАРИЈАНТАН

$x_1[n] = x[n - n_0]$

$O\{x_1[n]\} = x_1[an-2] = x[an-2-n_0] \quad a = 3/2$

$y[n-n_0] = x[a(n-n_0)-2] = x[an-2-an_0] \neq O\{x[n-n_0]\}$

б) $\cos\omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}_t} \pi(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0))$

$\sin\omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}_t} -j\pi(\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0))$

$u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}_t} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

$x(t)\cdot y(t) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$ $\quad \boxed{j\omega = s}$

$\cos(\omega_0 t)\cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}_t} \underbrace{\frac{s}{\omega_0^2 + s^2}}_{NP + Im} + \underbrace{\frac{\pi}{2}(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0))}_{P + Re}$

$\sin(\omega_0 t)\cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}_t} \underbrace{\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + s^2}}_{P + Re} + \underbrace{\frac{\pi}{2j}(\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0))}_{NP + Im}$