2. zadatak (20 poena)

Sistem je opisan diferencnom jednačinom $9y[n] - 6y[n-1] + y[n-2] = 9x[n]$:

a) [5] Naći impulsni odziv sistema.

b) [7.5] Naći prinudni odziv konvolucijom ako se sistem pobudi signalom $x[n] = 5^n \mathrm{u}[n]$.

c) [7.5] Naći sopstveni odziv ako je pobuda sistema kao u tački b), a početni uslovi su dati sa $y[0] = 8/5$ i $y[1] = 78/5$.

Rešenje:

a) Impulsni odziv se određuje rešavanjem diferencne jednačine

$$9h[n] - 6h[n-1] + h[n-2] = 9\delta[n]$$

čiji su početni uslovi $h[0] = 1$, $h[1] = \frac{2}{3}$, pa se dobija da je

$$h[n] = (1+n)3^{-n}\,\mathrm{u}[n].$$

b) Prinudni odziv se određuje konvolucijom

$$y_P[n] = h[n] * x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 3^{-m}(m+1)\mathrm{u}[m] \cdot 5^{n-m}\,\mathrm{u}[n-m] = 5^n\,\mathrm{u}[n]\left(\sum_{m=0}^{n} 15^{-m} + m \cdot 15^{-m}\right)$$

$$y_{P1}[n] = \sum_{m=0}^{n} 15^{-m} = \left.\frac{15^{-m}}{\frac{1}{15}-1}\right|_0^{n+1} = \frac{15}{14} - \frac{15^{-n}}{14}$$

$$y_{P2}[n] = \sum_{m=0}^{n} m \cdot 15^{-m} = \left.\frac{m \cdot 15^{-m}}{-\frac{14}{15}}\right|_0^{n+1} + \frac{15}{14}\sum_{m=0}^{n} 15^{-(m+1)} = -\frac{n+1}{14}\,15^{-n} - \frac{225}{196}\left(15^{-(n+2)} - 15^{-1}\right)$$

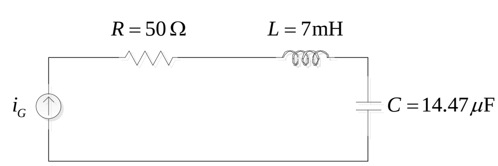
$$y_P[n] = \left(-\frac{29}{196}\,3^{-n} - \frac{1}{14}\,n\,3^{-n} + \frac{225}{196}\,5^n\right)\mathrm{u}[n]$$

c) Početni uslovi za sopstveni odziv su: $y[-1] = -\frac{429}{5}$, $y[-2] = -\frac{2601}{5}$, pa je sopstveni odziv jednak

$$y_S[n] = \left(\frac{3}{5} + \frac{146}{5}\,n\right) \cdot 3^{-n}.$$

3. zadatak (25 poena)

Za kolo prikazano na slici važi: $i_G(t) = I_m\,\frac{4\sin\omega t}{5-4\cos\omega t}$, pri čemu je $I_m = 2$ A, a $\omega = 2\pi \cdot 500$ Hz.



a) [10] Postupno razviti signal i_G u trigonometrijski Furijeov red na intervalu $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

b) [5] Odrediti napon strujnog generatora na frekvenciji $f = 500$ Hz.

c) [5] Odrediti napon strujnog generatora na frekvenciji $f_1 = 2f = 1000$ Hz.

d) [5] Odrediti efektivnu vrednost struje i_G.

Rešenje:

a) Za signal $x(t) = \frac{a \sin \omega t}{1 + a^2 - 2\, a \cos \omega t}$, uvođenjem smene $z = e^{-j\omega t}$ se dobija da je

$$\cos \omega t = \frac{z^2+1}{2z}, \qquad \sin \omega t = \frac{1-z^2}{2j\, z},$$

pa se sređuje izraz

$$x(t) = \frac{a\,(1-z^2)}{2j\,((1+a^2)z - az^2 - a)} = \frac{1}{2j}\left(1 + \frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)\, z - 2}{(z-a)\,\left(z - \frac{1}{a}\right)}\right) = \frac{1}{2j}\left(1 + \frac{a}{z-a} + \frac{1/a}{z - 1/a}\right).$$

Kako je $|a| < 1$ i $|z| = 1$, dobija se da je

$$x(t) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-a/z} - \frac{1}{1-az}\right) = \frac{1}{2j}\sum_{k=0}^{\infty} a^k (z^{-k} - z^k) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \sin(k\omega t)\,.$$

U zadatku je $a = \frac{1}{2}$, pa je

$$i_G(t) = 2\, I_m\, \frac{\frac{1}{2}\sin \omega t}{\frac{5}{4} - \cos \omega t} = 2\, I_m\ \cdot \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sin(k\omega t)\,.$$

b) Na ovoj frekvenciji je kolo u rezonanciji, a $k = 1$, pa je

$$V_G = R\, I_m \sin \omega t = 100\ \mathrm{V}\ \sin \omega t.$$

c) Za ovu frekvenciju je $k = 2$ i impendansa koju vidi strujni izvor je

$$Z = R + 2j\omega L + \frac{1}{2j\omega C} = (50 + j33)\Omega = 59.9\ \cdot e^{j30.96°}\ \Omega,$$

pa je napon jednak

$$V_G = Z\frac{I_m}{2}\sin 2\omega t = 59.9\ \cdot e^{j120.96°}\ \mathrm{V}.$$

d) Efektivna vrednost se određuje na osnovu Parsevalove teoreme

$$i_{G,eff} = 2I_m \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2^{-k}}{\sqrt{2}}\right)^2} = I_m\ \sqrt{\frac{8}{3}} = 3.266\ \mathrm{A}.$$

3. zadatak (10 poena)

Sistem nije linearan, jeste vremenski nepromenljiv i jeste kauzalan?

4. zadatak (10 poena)

Iz uslova periodičnosti diskretnog signala $x[n] = x[n+10]$ i uslova periodičnosti sinusoidalne funkcije sledi $x[n+10] = \sin \Omega(n+10) = \sin(\Omega n + 10\Omega) = \sin(\Omega n + 2k\pi)$, odnosno,

$$10\Omega = 2k\pi$$

pa je:

$$\Omega = \frac{2k\pi}{10} = \frac{k\pi}{5}$$

Minimalna vrednost za Ω se dobija za $k = 1$, pa je:

$$\Omega_{\min} = \frac{\pi}{5}$$

5. zadatak (10 poena)

Po definiciji konvolucije imamo:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^{-k}\mathrm{u}[-k]\mathrm{u}[n-k]$$

Moramo posmatrati zasebno dva slučaja: $n \leq 0$ i $n > 0$ jer od toga zavisi gornja granica sume.
Kada je $n \leq 0$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^{-k}\mathrm{u}[-k]\mathrm{u}[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} a^{-k} = \sum_{k=-n}^{\infty} a^{k} = \frac{a^{-n}}{1-a}$$

Kada je $n > 0$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^{-k}\mathrm{u}[-k]\mathrm{u}[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{0} a^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^{k} = \frac{1}{1-a}$$

6. zadatak (10 poena)

Imamo da je osnovna učestanost $\omega_0 = 2\pi/T_0$, pa je:

$$X[2k] = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2k\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} x(t)e^{-j2k\omega_0 t}dt + \frac{1}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2k\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} x(t)e^{-j2k\omega_0 t}dt - \frac{1}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} x(t-T_0/2)e^{-j2k\omega_0 t}dt$$

Ako u drugom integralu izvršimo smenu $t - T_0/2 = p$, dobija se:

$$X[2k] = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} x(t)e^{-j2k\omega_0 t}dt - \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} x(p)e^{-j2k\omega_0 (p+T_0/2)}\,dp$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} x(t)e^{-j2k\omega_0 t}dt - \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} x(p)e^{-j2k\omega_0 p}e^{-j2k\pi}\,dp$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} x(t)e^{-j2k\omega_0 t}dt - \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} x(p)e^{-j2k\omega_0 p}\,dp = 0$$