1. [40] Funkcija prenosa kola sa slike 1a, data je izrazom $H(s) = 2\dfrac{s^2}{s^2 + s/R_2C_1 + (1/R_2C_1)^2}$.

a) [2] Odrediti polaritet priključaka operacionog pojačavača (ucrtati direktno na datoj slici 1.a)
b) [4] Obrazložiti (sa dokazom) koji tip filtera predstavlja data prenosna funkcija?
$H(0)=0$, $H(\infty)=K$ $\rightarrow$ filter propusnik viskokih učestanosti
c) [13] Odrediti K, Q, R_1 i C_1, ako je R_2=10kΩ, a rezonantna frekvencija ω_0=100krad/s.
$R_1=\infty$ $\omega_0 = 1/R_2C_1 = 10^5 \Rightarrow C_1 = 10^{-9}\,\text{F}$ **$K = H(\infty)=2$, $Q=1$.**

d) [4+3=7] Odrediti prinudni i ustaljeni odziv kola ako je $v_g(t) = \left(5 + e^{2t}\delta(t)\right)\mathrm{u}(t-2s)$

$$v_g(t) = \left(5 + e^{2t}\delta(t)\right)\mathrm{u}(t-2s) = 5\mathrm{u}(t-2s)$$

Ustaljeni odziv je jenadk nuli jer je pobuda jednosmerni signal u ustaljenom stanju.
Prinudni odziv je 2s zakašnjeni step odziv pomnožen sa 5

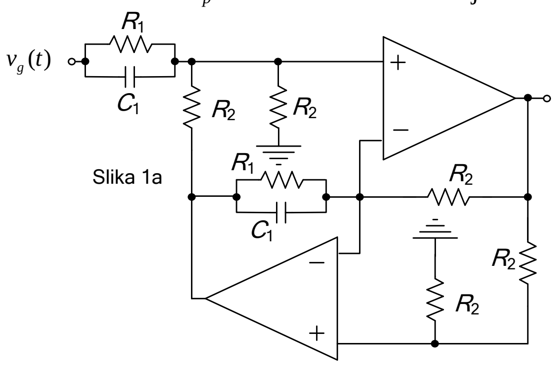
$$S(s) = U(s)H(s) = \frac{1}{s}2\frac{s^2}{s^2 + s\omega_0 + \omega_0^{\,2}} = 2\frac{s}{s^2 + 2s\dfrac{\omega_0}{2} + \dfrac{1}{4}\omega_0^{\,2} + \dfrac{3}{4}\omega_0^{\,2}} = \frac{As+B}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}$$

$$A = 2, B = 0, \alpha = -\frac{\omega_0}{2}, \beta = \frac{\omega_0}{2}\sqrt{3}$$

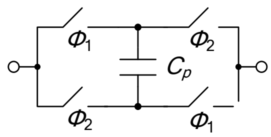
$$s(t) = e^{\alpha t}A(\cos\beta t + \left(\alpha/\beta\right)\sin\beta t)\mathrm{u}(t) \Rightarrow y_{pr}(t) = 5s(t-2)$$

e) [7] Odrediti efektivnu vrednost $y(t)$ u ustaljenom stanju ako je $v_g(t) = \sin(\omega_0 t + \pi/5)$
U ustaljenom stanju, kada se razmatra snaga odnosno efektivna vrednost, bitna je učestanost i amplituda prostoperiodične pobude. Pojačanje na učestanosti pobude iznosi $KQ = 2$ jer je pobuda na rezonantnoj učestanosti. Amplituda ustaljenog prostoperiodičnog odziva je prema tome 2 a efektivna vrednost je $2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$

f) [7] Ako se kolo sa slike 1a) realizuje u prekidačko kapacitivnoj formi pomoću kola u formi sa slike 1b), odrediti vrednosti svih potrebnih kondenzatora C_p . Perioda takta odabiranja T = 0.01 ms.



Slika 1a



Slika 1b

Samo R2 treba da se ekvivalentira. $R_2 = T/4C_P \rightarrow C_P = T/4R_2 = 0.25\cdot 10^{-5}\cdot 10^{-4} = 0.25\text{nF}$

2. [20]
a) [5] Ako je $\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}\mathrm{u}[n] \xleftrightarrow{z} \left(\dfrac{z}{z-1}\right)^{k+1}$ dokazati da je $\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}a^n\mathrm{u}[n] \xleftrightarrow{z} \left(\dfrac{z}{z-a}\right)^{k+1}$

b) [7] Za sistem opisan jednačinom $(E-3)(y[n+2]-6y[n+1]+9y[n]) = x[n]$ naći impulsni odziv.

$$(z-3)(z^2-6z+9)H(z) = 1 \Rightarrow H(z) = \frac{1}{(z-3)^3} = \left(\frac{z}{z-3}\right)^3 z^{-3} \rightarrow h[n] = D^3\begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix}3^n\mathrm{u}[n] = \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix}3^{n-3}\mathrm{u}[n-3]$$

c) [8] Za sistem opisan u tački b) odrediti prinudni odziv ako je $x[n] = 2\cdot 3^n\mathrm{u}[n]$

$$(z-3)(z^2-6z+9)Y(z) = 2\frac{z}{z-3} \Rightarrow Y(z) = 2\frac{z}{(z-3)^4} = \left(\frac{z}{z-3}\right)^4 z^{-3} \rightarrow y[n] = 2D^3\begin{pmatrix} n+3 \\ 3 \end{pmatrix}3^n\mathrm{u}[n] = 2\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}3^{n-3}\mathrm{u}[n-3]$$

3. [20]

a) [10] Izračunati $h[\infty]$ ako je $H(z)=\prod_{k=0}^{4}\frac{1}{(z-2^{-k})}$ $\quad h[\infty]=(z-1)H(z)|_{z\to 1}=\prod_{k=1}^{4}\frac{(-1)^k 2^k}{1\cdot 3\cdot 7\cdot 9}=\frac{2^{1+2+3+4}}{315}=\frac{1024}{315}$

b) [10] Izračunati

$$y[n]=\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{k}\binom{n-i}{k}=\binom{n}{k}*\binom{n}{k}=Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z-1)^{k+1}}\cdot\frac{z}{(z-1)^{k+1}}\right\}=Z^{-1}\left\{\frac{z^2}{(z-1)^{2k+2}}\right\}=$$

$$=Z^{-1}\left\{\frac{z^{2+2k}}{(z-1)^{2k+2}}z^{-2k}\right\}=D^{2k}\binom{n+2k+1}{2k+1}\mathrm{u}[n]=\binom{n+1}{2k+1}\mathrm{u}[n-2k]=\binom{n+1}{2k+1}\mathrm{u}[n]$$

4. [20=10+10]

$x_1[n]=(1/2)^n\,\mathrm{u}[n]$ i $x_2[n]=x_1[n]\cdot(2/3)^n$, $y[n]=x_1[n+3]*x_2[-n+1]$

$$X_1(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},|z|>\frac{1}{2}\quad X_2(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}},|z|>\frac{1}{3}$$

Koristeći osobinu pomeraja u vremenskom domenu, $x_1[n+3]\xleftrightarrow{z}z^3X_1(z),|z|>\frac{1}{2}$

a koristeći osobine inverzije u vremenu i pomeraja u vremenskom domenu, $x_2[-n+1]\xleftrightarrow{z}z^{-1}X_2(z^{-1}),|z|<3$

$$y[n]=x_1[n+3]*x_2[-n+1]\xleftrightarrow{z}Y(z)=z^3X_1(z)z^{-1}X_2(z^{-1})=\frac{z^2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z\right)},\ \frac{1}{2}<|z|<3$$

$$Y(z)=\frac{3z^3}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(3-z)}=-\frac{3z^3}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-3)}=-3z^2\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-3)}=3z\frac{A\cdot z}{z-3}+3z\frac{B\cdot z}{z-\frac{1}{2}}=$$

$$-3z\cdot\frac{6}{5}\frac{z}{z-3}+3z\cdot\frac{1}{5}\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\Rightarrow y[n]=3B(1/2)^{n+1}\mathrm{u}[n+1]\ -3A(1/3)^{n+1}\mathrm{u}[-n]$$

5. [40]

a) [6] $x(t)$ je realan periodični signali sa osnovnom učestanošću ω_0 =1rad/s. Ako su amplitudski i fazni spektar signala za vrednosti indeksa $k\geq 0$ dati izrazima $|X[k]|=k\nabla\mathrm{u}[k-2]+\delta[k-4]$ i $\theta[k]=k\pi/4$, odrediti kompletan spektar signala $x(t)$.

$$k\geq 0:|X[k]|=k\nabla\mathrm{u}[k-2]+\delta[k-4]=k(\mathrm{u}[k-2]-\mathrm{u}[k-3])+\delta[k-4]=k\delta[k-2]+\delta[k-4]=2\delta[k-2]+\delta[k-4]$$

Prema tome ispunjeno je da je $|X[k]|=|X[-k]|$ za svako k. Za fazni spektar vazi $\theta[k]=-\theta[-k]$

Konačno:

$$X[k]=2\delta[k-2]e^{j2\pi/4}+\delta[k-4]e^{j4\pi/4}+2\delta[-k-2]e^{-j2\pi/4}+\delta[-k-4]e^{-j4\pi/4}=$$

$$2\delta[k-2]e^{j\pi/2}+\delta[k-4]e^{j\pi}+2\delta[k+2]e^{-j\pi/2}+\delta[k+4]e^{-j\pi}=$$

$$=2j\delta[k-2]-\delta[k-4]-2j\delta[k+2]-\delta[k+4]$$

b) [4] Kolika je srednja snaga a kolika energija signala $x(t)$? $\quad P=2^2+1+1+2^2=10,\ W=\infty$

c) [4] Odrediti izraze za koeficijente razvoja $A[k]$, i $B[k]$ u trigonometrijski Furijeov red neparnog dela signala $x(t)$

$A[k]=0,\ B[k]=2\,\mathrm{Im}\{X[k]\}=4\delta[k-2]-4\delta[k+2]$

d) [6] Ako je $y(t)=x(t)h(t)$ (množenje!), a $h(t)=1+\cos(3\omega_0 t)+\cos(5\omega_0 t)$, odrediti $Y[0]$. **Y[0]=0**

e) [4] Ako se signal $x(t)$ razvije na periodi T_1=2T_0 za takav razvoj odrediti koeficijente razvoja $X_2[k]$

$$X_2[k]=\begin{cases}X\left[\frac{k}{2}\right],k\ parno\\ 0,k\quad neparno\end{cases}\Rightarrow \text{ubacivanje nule izmedju svaka 2 stara odbirka}$$

$$X_2[k]=2j\delta[k-4]-\delta[k-8]-2j\delta[k+4]-\delta[k+8]$$

f) [4] Dat je signal $g(t)=\sin(e^t+t+t^2)/(e^t+t+t^2)$. Odrediti parni i neparni deo datog signala.

Signal je oblika sin(x)/x sto znaci da je paran. Neparni deo je 0.

g) [6] Odziv jednog sistema na jediničnu odskočnu funkciju iznosi $s(t)=\mathrm{u}(t)+\mathrm{rect}(t)+\mathrm{tri}(t)$. Odrediti odziv sistema na pobude oblika $x_1(t+1)=\delta(t),\ x_2(t)=\delta'(t)$ i $x_3(t)=\delta(5t)$

$h(t)=\delta(t)+\delta(t+1/2)+\delta(t-1/2)+\mathrm{u}(t+1)-2\mathrm{u}(t)+\mathrm{u}(t-1)$

$x_1(t)=\delta(t-1)\rightarrow y_1(t)=h(t)*\delta(t-1)=h(t-1)$

$y_2(t)=h(t)*x_2(t)=h(t)*\delta'(t)=h'(t)=h(t)=\delta'(t)+\delta'(t+1/2)+\delta'(t-1/2)+\delta(t+1)-2\delta(t)+\delta(t-1)$

$x_3(t)=\delta(5t)=\dfrac{1}{5}\delta(t)\Rightarrow y_3(t)=\dfrac{1}{5}h(t)$

h) [6] Ako je dat FIR sistem opisan sa E$y[n]$ = $x[n]$ + $x[n+3]$ − D$x[n-1]$, i ako je $g[n]=h[n]*(\mathrm{u}[n-1]-\mathrm{u}[n-2])$ gde je $h[n]$ impulsni odziv datog sistema, tada je $g[n]=\delta[n-2]+\delta[n+1]-\delta[n-4]$

$y[n+1]=x[n]+x[n+3]-x[n-2]\rightarrow y[n]=x[n-1]+x[n+2]-x[n-3]\rightarrow h[n]=\delta[n-1]+\delta[n+2]-\delta[n-3]$

$g[n]=h[n]*(\mathrm{u}[n-1]-\mathrm{u}[n-2])=h[n]*\delta[n-1]=\delta[n-2]+\delta[n+1]-\delta[n-4]$

6. [20] Kontinualni sistem je opisan diferencijalnom jednačinom $y''(t)+3\cdot y'(t)+2y(t)=x'(t)$. Odrediti

a) [5] impulsni odziv, rešavanjem jednačine u vremenskom domenu;

$s_1(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}e^{-2t}\mathrm{u}(t)-e^{-t}\mathrm{u}(t)$

$h_1(t)=s_1{}'(t)=0-e^{-2t}\mathrm{u}(t)+e^{-t}\mathrm{u}(t)$

$h(t)=h_1{}'(t)=2e^{-2t}\mathrm{u}(t)-e^{-t}\mathrm{u}(t)$

b) [8] prinudni odziv ako je $x(t)=\delta'(t-1)-2\cos(50\pi t)\delta(t)$ (bilo kako),

$x(t)=\delta'(t-1)-2\cos(50\pi\cdot 0)\delta(t)=\delta'(t-1)-2\delta(t)$

$y(t)=h'(t-1)-2h(t)$

$h'(t)=-4e^{-2t}\mathrm{u}(t)+2e^{-2t}\delta(t)+e^{-t}\mathrm{u}(t)-e^{-t}\delta(t)=-4e^{-2t}\mathrm{u}(t)+2\delta(t)+e^{-t}\mathrm{u}(t)-\delta(t)$

$=-4e^{-2t}\mathrm{u}(t)+e^{-t}\mathrm{u}(t)+\delta(t)$

$y(t)=-4e^{-2t+2}\mathrm{u}(t-1)+e^{-t+1}\mathrm{u}(t-1)+\delta(t-1)-2h(t)$

c) [7] konstante $A,\ \omega_0,\ \varphi$, ako je ustaljeni odziv u formi $y(t)=A\cdot\cos(\omega_0 t+\varphi)$, i ako je $x(t)=2\cdot\cos(3t+\pi/7)$

$H(j3)=\dfrac{j3}{(j3+1)(j3+2)};\left|H(j3)\right|=\dfrac{3}{\sqrt{130}};\theta(3)=-ArcTan[7/9]$

$A=2\dfrac{3}{\sqrt{130}};,\ \omega_0=3,\ \varphi=\theta(3)+\pi/7$

Napomena:
Opcija 1: samo II kolokvijum (100 bodova), rade se zadaci 1,2,3,4.
Opcija 2: I + II kolokvijum (60+60 bodova), rade se zadaci 2,3,4,5,6.
Obavezno naznačiti koja se opcija radi.
Zadaci 1 i 4 - pregleda se samo formular. Ostali zadaci se rade u svesci gde se i pregledaju, a krajnje rezultate uneti u formular hemijskom olovkom tamo gde je to predviđeno. Formular se predaje yajedno sa sveskom. Ako se radi Opcija 2 bodovi se skaliraju na 100.

Trajanje izrade zadataka 3h.