| | | | |
|---|---|---|---|
| Odsek za elektroniku, dr Milan Ponjavić | | | 5.7.2019 |
| Signali i sistemi | Br indeksa | | Potpis dežurnog |
| Ime i prezime kandidata ___________________________________ | | | |

1. [40] Funkcija prenosa sistema sa slike 1a, data je izrazom

$$H(s) = 10\frac{s+\omega_n}{s^2+(\omega_{p1}+\omega_{p0})s+\omega_{p0}\omega_{p1}} = \frac{Y(s)}{X(s)}, \quad \omega_n = 1\text{rad/s}, \ \omega_{p0} = 10\omega_n, \omega_{p1} = 100\omega_n$$

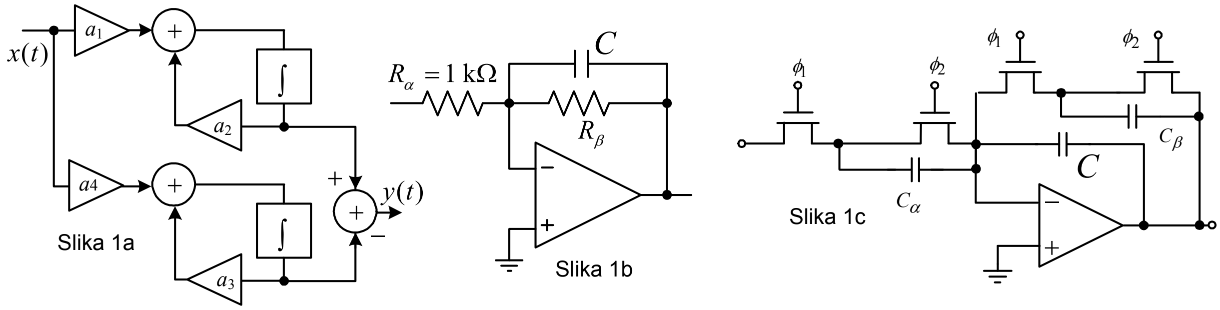
a) [5] Odrediti polaritet priključaka sabirača, i pojačanja $a_{1,2,3,4}$ na slici 1a. Polaritete ucrtati direktno na slici.

b) [10] Realizovati sistem koristeći operacione pojačavače, module u formi kola sa slike 2b, kondenzatore od 10nf i otpornike po izboru.

c) [7] Smatrajući da je $\omega_n << \omega_{p0} << \omega_{p1}$ odrediti približan odziv sistema na pobudu $x(t) = e^{-\omega_{p1}t}\mathrm{u}(t)\cdot[1\,\mathrm{Volt}]$

d) [8] Kolika je minimalna vrednost pozitivnog napona napajanja operacionog pojačavača na izlazu kola da bi kolo imalo odziv iz prethodne tačke ako se može usvojiti da je $\omega_{p0} / \omega_{p1}{}^2 \to 0$?

e) [10] Odrediti vrednosti svih kondenzatora tako da se sva kola u realizovanom sistemu, koja su u formi kola sa slike b) mogu zameniti kolima sa slike 1c, ako je perioda takta odabiranja $T = 0.01$ ms.




Slika 1a Slika 1b Slika 1c

2. [30] U logičkom CMOS kolu sa slike 2 napajanje iznosi $V_{DD}$=5V. Ulazni signal je periodična povorka pravougaonih logičkih impulsa amplitude $V_{DD}$ i periode $1/f_0 = T_0 = 20$ ms, jednakog trajanja impulsa i pauze. Kolo $U_1$ unosi kašnjenje od 5ms, a dioda je idealna. $g(t)$ je prostoperiodičan signal učestanosti $0.5f_0$.

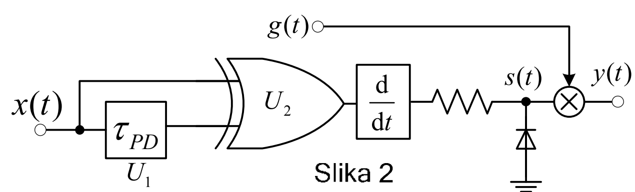
a) [5] Skicirati jedan ispod drugog signale $x(t)$ i $s(t)$ i $y(t)$ u trajanju od dve periode $T_0$.

b) [5] Odrediti amplitudski spektar signala iz prethodne tačke $|X(j\omega)|$, $|S(j\omega)|$ i $|Y(j\omega)|$

c) [5] Odrediti funkciju prenosa $U_1(j\omega)$ kola $U_1$, i nacrtati njegovu amplitudsku i faznu karakteristiku.

d) [10] Odrediti funkciju prenosa idealnog filtera koji obrađuje signal $y(t)$ tako da rezultat filtriranja bude prorstoperiodičan signal amplitude 1V učestanosti $1.5f_0$.

e) [5] Objasniti na koliko načina je moguće realizovati filter iz prethodne tačke




Slika 2

3. [20] Diskretni kauzalni sistem je opisan diferencnom jednačinom

$$y[n+2]+0.2y[n+1]-0.35y[n]=x[n]$$

Primenom Z transformacije odrediti sopstveni i prinudni odziv ukoliko je

$$x[n]=\left(u[n-1]+0.7u[n-2]\right), \quad y[0]=0, y[1]=1;$$

4. [10] Neka je $x(t)=\beta e^{-t}\mathrm{u}(t)$ i $g(t)=x(t)+\alpha x(-t)$. Ako se zna da je $G(s)=s/(s^2-1)$ u oblasti konvergencije $-1<\mathrm{Re}(s)<1$, odrediti konstante α i β.

5. [40]

a) [9] Ako su $x(t)$ i $y(t)$ periodični signali sa istom osnovnom periodom $T_0$ dokazati da su koeficijenti razvoja signala $g(t)=x(t)y(t)$ jednaki $G[k]=X[k]*Y[k]$

b) [6] Dokazati da furijeova trnasformacija signala $y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ iznosi $Y(j\omega)=\left(1/j\omega+\pi\delta(\omega)\right)X(j\omega)$

c) [5] Dokazati da furijeova transformacija signala $x^*(t)$ iznosi $X^*(-j\omega)$.

d) [5] Odrediti osnovni period signala $x[n]=1+e^{j4\pi n/7}-e^{j2\pi n/5}$.

e) [5] Odrediti $x(t)=\mathrm{u}(t+3)*\mathrm{u}(t-5)$;

f) [10] Osnovna kružna učestanost periodičnog signala $x(t)$ je $\omega_0=\pi$, a koeficijenti razvoja signala $x(t)$ u kompleksni Furijeov red su $X[0]=2$, $X[1]=1$, $X[3]=0.5e^{j\pi/4}$ i $X[-3]=0.5e^{-j\pi/4}$. Odrediti realni i maginarni deo signala $x(t)$.

6. Kontinualni sistem je opisan diferencijalnom jednačinom $y''(t)+(10/3)\cdot y'(t)+y(t)=x'(t)$. Analizom u vremenskom domenu:

a) [13] Odrediti impulsni odziv sistema.

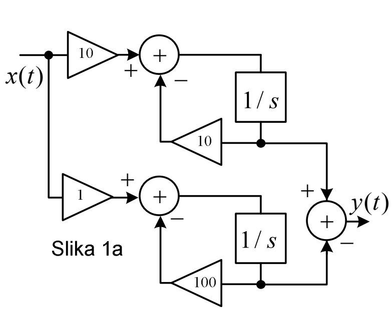
b) [7] Odrediti prinudni odziv ako je $x(t)=2\delta''(t)+2\cos(50\pi t)\delta(t)$.

# Rešenja:

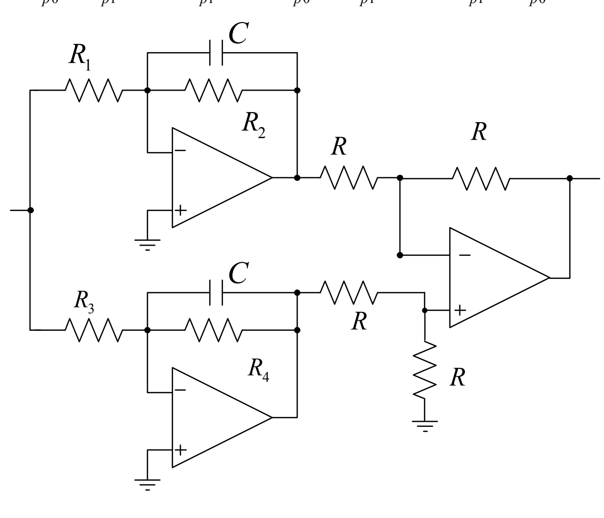
1. a)[5]

$$H(s)=10\frac{s+\omega_n}{s^2+(\omega_{p1}+\omega_{p0})s+\omega_{p0}\omega_{p1}}=10\frac{s+\omega_n}{(s+\omega_{p0})(s+\omega_{p1})}$$

$$H(s)=\frac{10}{-\omega_{p1}+\omega_{p0}}\cdot\frac{-\omega_{p1}+\omega_n}{s+\omega_{p1}}+\frac{10}{s+\omega_{p0}}\cdot\frac{-\omega_{p0}+\omega_n}{-\omega_{p0}+\omega_{p1}}\approx\frac{10}{s+\omega_{p1}}-\frac{1}{s+\omega_{p0}}=\frac{10}{\omega_{p1}}\cdot\frac{1}{1+s/\omega_{p1}}-\frac{1}{\omega_{p0}}\cdot\frac{1}{1+s/\omega_{p0}}$$



Slika 1a



b) [10]

Prenosna funkcija ovakvog bloka je $A(s) = A(0)\dfrac{1}{1+s/\omega_p}, A(0) = -\dfrac{R_\beta}{R_\alpha}, \omega_p = 1/R_\beta C$ . Potrebna su dva takva bloka i jedan diferencijalni pojačavač

$$H(s) = \frac{10}{\omega_{p1}} \cdot \frac{1}{1+s/\omega_{p1}} - \frac{1}{\omega_{p0}} \cdot \frac{1}{1+s/\omega_{p0}}$$

$$A_1(s) = A_1(0)\frac{1}{1+s/\omega_{p1}}, A_1(0) = -\frac{R_2}{R_1} = 10/\omega_{p1} = 1/10, \omega_{p1} = 1/R_2C = 100 \Rightarrow R_2 = 1/100C = 1\mathrm{M\Omega} \Rightarrow R_1 = 10\mathrm{M\Omega}$$

$$A_2(s) = A_2(0)\frac{1}{1+s/\omega_{p0}}, A_2(0) = -\frac{R_4}{R_3} = 1/\omega_{p0} = 1/10, \omega_{p0} = 1/R_4C = 10 \Rightarrow R_4 = 1/10C = 10\mathrm{M\Omega} \Rightarrow R_3 = 100\mathrm{M\Omega}$$

c)[7]

$$x(t) = e^{-\omega_{p1}t}\mathrm{u}(t) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+\omega_{p1}}$$

$$Y(s) = 10\frac{s+\omega_n}{(s+\omega_{p0})(s+\omega_{p1})^2} = 10\left(\frac{\omega_n - \omega_{p0}}{\left(\omega_{p1}-\omega_{p0}\right)^2(s+\omega_{p0})} + \frac{\omega_n - \omega_{p1}}{\left(\omega_{p0}-\omega_{p1}\right)(s+\omega_{p1})^2} - \frac{\omega_n - \omega_{p0}}{\left(\omega_{p1}-\omega_{p0}\right)^2(s+\omega_{p1})}\right) \approx$$

$$10\left(-\frac{\omega_{p0}}{\omega_{p1}{}^2(s+\omega_{p0})} + \frac{1}{(s+\omega_{p1})^2} + \frac{\omega_{p0}}{\omega_{p1}{}^2(s+\omega_{p1})}\right)$$

$$y(t) = 10\left(-\frac{\omega_{p0}}{\omega_{p1}{}^2}e^{-\omega_{p0}t} + te^{-\omega_{p1}t} + \frac{\omega_{p0}}{\omega_{p1}{}^2}e^{-\omega_{p1}t}\right)\mathrm{u}(t)$$

d)[8]

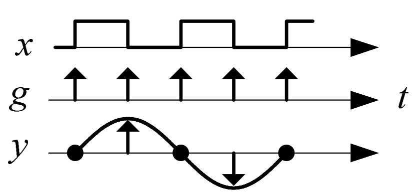
$$y(t) = 10\left(-\frac{\omega_{p0}}{\omega_{p1}{}^2}e^{-\omega_{p0}t} + te^{-\omega_{p1}t} + \frac{\omega_{p0}}{\omega_{p1}{}^2}e^{-\omega_{p1}t}\right)\mathrm{u}(t) \approx 10te^{-\omega_{p1}t}\mathrm{u}(t)$$

$ekstremum \le V_{CC\min}$ :

$za\ t > 0\ \ y'(t) = 10e^{-\omega_{p1}t} - 10\omega_{p1}te^{-\omega_{p1}t} = 0 \Rightarrow t = 1/\omega_{p1} = 1/10\,\mathrm{sec} \Rightarrow y(1/10\,\mathrm{sec}) = e^{-1}$[ u volitima]

2. a)

Neka je $g(t)$ sinusoida jedinične amplitude. $s(t)$ je periodična povorka Delta impulsa površine 5V, dok je $y(t)$ samplovana sinusoida sa 4 odbirka po periodi:



b) odrediti amplitudski spektar signala $|X(j\omega)|$, $|S(j\omega)|$ i $|Y(j\omega)|$

$$X[k]=5\frac{w}{T_0}\mathrm{sinc}\left(k\frac{w}{T_0}\right)=5\cdot\frac{1}{2}\mathrm{sinc}(k/2)=2.5\cdot\mathrm{sinc}(k/2)$$

$$X(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}X[k]\delta(\omega-k\omega_0)\Rightarrow\left|X(j\omega)\right|=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}2.5\cdot\left|\mathrm{sinc}(n/2)\right|\delta(\omega-n\omega_0)=5\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\mathrm{sinc}(n/2)\right|\delta(\omega-n\omega_0)$$

$$|S(j\omega)|=5\frac{1}{T_0/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2n\omega_0)=\frac{10}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2n\omega_0)$$

$$G(j\omega)=\pi(\delta(\omega+0.5\omega_0)+\delta(\omega-0.5\omega_0))$$

$$\left|Y(j\omega)\right|=\left|\frac{10}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}G(j(\omega-2n\omega_0))\right|=\frac{10\pi}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-0.5\omega_0-2n\omega_0)+\delta(\omega+0.5\omega_0-2n\omega_0)$$

c) Odrediti funkciju prenosa $U_2(j\omega)$ kola U2, i nacrtati njegovu amplitudsku i faznu karakteristiku

$$U_2(j\omega)=F_T\{x(t-\tau)\}/X(j\omega)=e^{-j\omega\tau}$$

$$\left|U_2(j\omega)\right|=1;\phi(\omega)=\omega\tau$$

d), e) Prostoperiodičan signal, na primer $\cos(1.5\omega_0 t)$ ima amplitudski spektar $\pi(\delta(\omega+1.5\omega_0)+\delta(\omega-1.5\omega_0))$ tako da filter treba da izdvoji samo ta dva impulsa iz signala $Y(j\omega)$ i da pojača amplitude sa faktorom $T_0/10$ .

Zahtevu odgovara svaki filter koji je oblika

$$H(j\omega)=\frac{T_0}{10}\mathrm{rect}\left(\frac{\omega-1.5\omega_0}{A}\right)+\frac{T_0}{10}\mathrm{rect}\left(\frac{\omega+1.5\omega_0}{A}\right)$$

gde je *A* bilo koja vrednost, ali takva da se ne obuhvate ostali impulsi. Samim tim je moguće i beskonačno mnogo ralizacija

3.

$$y[n+2]+0.2y[n+1]-0.35y[n]=x[n]$$

polovi: $$z_{1,2}=\frac{-0.2\pm\sqrt{0.04+4\cdot0.35}}{2}=\begin{cases}-0.7\\0.5\end{cases}$$

Prinudni odziv: pomoćni uslovi jednaki nuli

$$x[n]=\left(\mathrm{u}[n-1]+0.7\mathrm{u}[n-2]\right)\Rightarrow X(z)=\frac{z+0.7}{z-1}z^{-1}$$

$$Y_p(z)=\frac{z+0.7}{(z-1)(z+0.7)(z-0.5)}z^{-1}=\frac{1}{(z-1)(z-0.5)}z^{-1}=\left(\frac{2}{z-0.5}-\frac{2}{z-1}\right)z^{-1}=$$

$$=\left(\frac{2z}{z-0.5}-\frac{2z}{z-1}\right)z^{-2}$$

$$y_p[n]=\left(2(0.5)^{n-2}-2\right)\mathrm{u}[n-2]$$

Sopstveni odziv, pobuda jednaka nuli

$$\left(z^2Y_s(z)-z^2y[0]-zy[1]\right)+0.2\left(zY_s(z)-zy[0]\right)-0.35Y_s(z)=0$$

$$\left(z^2Y_s(z)-z\right)+0.2\left(zY_s(z)\right)-0.35Y_s(z)=0$$

$$Y_s(z)=\frac{z}{(z+0.7)(z-0.5)}=\frac{1}{1.2}\frac{z}{(z-0.5)}-\frac{1}{1.2}\frac{z}{(z+0.7)}$$

$$y_s[n]=\frac{1}{1.2}\left((0.5)^n-(-0.7)^n\right)\mathrm{u}[n]$$

4.

$x(t) = \beta e^{-t}\mathrm{u}(t) \Rightarrow X(s) = \beta \frac{1}{s+1}, ROC: \sigma > -1$

$x(-t) = \beta e^{t}\mathrm{u}(-t) \Rightarrow L\{x(-t)\} = -\beta \frac{1}{s-1}, ROC: \sigma < 1$

$G(s) = \beta \frac{1}{s+1} - \beta\alpha \frac{1}{s-1} = \beta \frac{s-1-\alpha(s+1)}{s^2-1} = \beta \frac{s(1-\alpha)-(1+\alpha)}{s^2-1} \frac{s}{s^2-1}; ROC: -1 < \sigma < 1$

$\alpha = -1$, $\beta = \frac{1}{2}$

5.

d)

$e^{j4\pi(n+N_1)/7} = e^{j4\pi n/7 + j2m\pi} \Rightarrow 4\pi N_1/7 = 2m\pi$

Funkcija $e^{j4\pi n/7}$ je periodična sa periodom $N_1 = m\frac{2\pi}{4\pi/7} = 7$ ($m = 2$),

Ffunkcija $e^{j2\pi n/5}$ je periodična sa periodom $N_2 = m\frac{2\pi}{2\pi/5} = 5$ ($m = 1$).

Osnovni period signal je $x[n] = 1 + e^{j4\pi n/7} - e^{j2\pi n/5}$ je $N = NZS(N_1, N_2) = 35$.

e)

$x(t) = \mathrm{u}(t+3) * \mathrm{u}(t-5);$

$\mathrm{u}(t) * \mathrm{u}(t) = t \cdot \mathrm{u}(t) \Rightarrow \mathrm{u}(t+3) * \mathrm{u}(t-5) = (t-2) \cdot \mathrm{u}(t-2)$

f) Osnovna kružna učestanost periodičnog signala $x(t)$ je $\omega_0 = \pi$, a koeficijenti razvoja signala $x(t)$ u kompleksni Furijeov red su $X[0] = 2$, $X[1] = 1$, $X[3] = 0.5e^{j\pi/4}$ i $X[-3] = 0.5e^{-j\pi/4}$. Odrediti realni i maginarni deo signala $x(t)$.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\omega_0 t} = X[0] + X[1]e^{j\omega_0 t} + X[3]e^{j3\omega_0 t} + X[-3]e^{-j3\omega_0 t}$$

$$= 2 + e^{j\pi t} + 0.5e^{j\pi/4}e^{j3\pi t} + 0.5e^{-j\pi/4}e^{-j3\pi t} = 2 + e^{j\pi t} + \frac{e^{j(3\pi t+\pi/4)} + e^{-j(3\pi t+\pi/4)}}{2}$$

$$= 2 + e^{j\pi t} + \cos(3\pi t + \pi/4) = 2 + \cos(\pi t) + j\sin(\pi t) + \cos(3\pi t + \pi/4)$$

$\mathrm{Re}\{x(t)\} = 2 + \cos(\pi t) + \cos(3\pi t + \pi/4)$

$\mathrm{Im}\{x(t)\} = \sin(\pi t)$

6. a)

$s_1''(t) + \frac{10}{3}s_1'(t) + s_1(t) = \mathrm{u}(t)$

$s_1(t) = (Ae^{-3t} + Be^{-t/3}) + 1/P(0) = (Ae^{-3t} + Be^{-t/3}) + 1;$ za $t > 0$

$s_1'(t) = -3Ae^{-3t} - 1/3 \cdot Be^{-t/3}$, za $t > 0$

$s_1(0^+) = s_1'(0^+) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} A + B + 1 = 0 \\ -3A - 1/3 \cdot B = 0 \end{array} \right\} B = -9/8, A = 1/8$

$h_1(t) = s_1(t) = -\frac{3}{8}e^{-3t} + \frac{3}{8}e^{-t/3};$ za $t > 0 \Rightarrow h(t) = h_1'(t) = \left(\frac{9}{8}e^{-3t} - \frac{1}{8}e^{-t/3}\right)\mathrm{u}(t)$

b)

$x(t) = 2\delta''(t) + 2\cos(50\pi \cdot 0)\delta(t) = 2\delta''(t) + 2\delta(t) \Rightarrow y(t) = 2h(t) + 2h''(t)$

$y(t) = 2\left(\frac{90}{8}e^{-3t} - \frac{10}{72}e^{-t/3}\right)\mathrm{u}(t) - \frac{20}{3}\delta(t) + 2\delta'(t)$