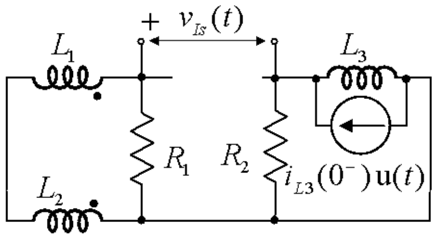
Signali i sistemi – II kolokvijum i integralni ispit Resenja
Odsek za elektroniku, Prof. Milan Ponjavić

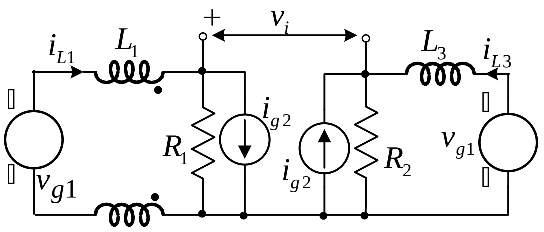
1. a)[5] $t > 0$



$$V_{Is}(s) = -\frac{1}{s} i_{L3}(0^-)\cdot\left(R_2 \parallel Z_{L3}\right) = -i_{L3}(0^-)\cdot\frac{R_2\cdot sL_3}{s(R_2+sL_3)} =$$

$$= -i_{L3}(0^-)\cdot\frac{R_2}{R_2/L_3+s} \Rightarrow v_{Is}(t) = -R_2 i_{L3}(0^-)\cdot e^{-tR_2/L_3}\,\mathrm{u}(t)$$

b)[15]



Pošto je $L_1 = L_2 = 1\,\mathrm{mH}$ i $v_{g1} = R_2 i_{g2}$ važi da je

$$V_{g1} + R_1 I_{g2} = \left(2(1-k)L_1 s + R_1\right) I_{L1} \Rightarrow I_{L1} = \frac{2V_{g1}}{0.2L_1 s + R_1}$$

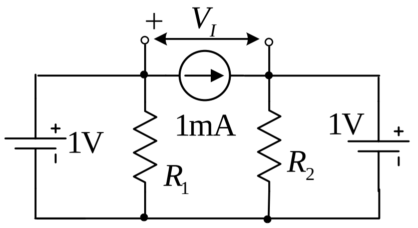
$$V_{g1} - R_2 I_{g2} = 0 = \left(L_3 s + R_2\right) I_{L3} \Rightarrow I_{L3} = 0$$

$$V_I = R_1(I_{L1} - I_{g2}) - R_2(I_{L3} + I_{g2}) = -(R_1 + R_2) I_{g2} + R_1 I_{L1}$$

$$V_I = -2V_{g1} + R_1\frac{2V_{g1}}{0.2L_1 s + R_1} = \frac{-2V_{g1}(0.2L_1 s + R_1) + 2R_1 V_{g1}}{0.2L_1 s + R_1}$$

$$V_I = \frac{-0.4L_1}{0.2L_1 s + R_1} \Rightarrow v_I(t) = -2e^{-t\frac{R_1}{0.2L_1}}\,\mathrm{u}(t)$$

c)[5]
Izgled kola u ustaljenom stanju, sve pobude su jednosmerne: Očigledno je da je $V_I = 0$



****

2.
a)[10]

$$x(t) = 4/\left(5+3\cos 4t\right) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-3)^{-k}\cos 4kt = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos k\omega_F t$$

$$A[0] = 1, A[k] = 2a^k, B[k] = 0, X[k] = a^k$$

b) [5]

$$y(t) = 4/\left(5+3\cos(\omega_F t - \pi/2)\right) = 4/\left(5+3\cos(\omega_F(t-\pi/2\omega_F))\right) = x(t-\pi/2\omega_F)$$

$$Y[k]=X[k]e^{-jk\omega_F\frac{\pi}{2\omega_F}}=a^k\left(\cos(k\pi/2)-j\sin(k\pi/2)\right)=\frac{A_Y[k]-jB_Y[k]}{2}$$

$$A_Y[k]=2a^k\cos(k\pi/2), B_Y[k]=2a^k\sin(k\pi/2), k\neq 0, A_Y[0]=1$$

c)[5]

$$\frac{1}{T}\int_c^{c+T}x(t)\mathrm{d}t=A[0]=1\Rightarrow\int_c^{c+T}x(t)\mathrm{d}t=T$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{0}x^2(t)\mathrm{d}t=1^2+2^2\sum_1^\infty\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)^2=1^2+2\sum_1^\infty\left(\frac{1}{9}\right)^k=1+2\frac{1/9}{1-1/9}=5/4$$

$$\int_{-T}^{0}x^2(t)\mathrm{d}t=\frac{5\pi}{8}$$

****

3.

a)[20]

$$-z\frac{d}{dz}\left(zY(z)-zy[0]\right)+zY(z)-zy[0]+2z\frac{d}{dz}Y(z)-6Y(z)=0\,.$$

$$-z\left(zY'(z)+Y(z)-y[0]\right)+zY(z)-zy[0]+2zY'(z)-6Y(z)=0\,.$$

$$\left(-z^2+2z\right)Y'(z)-6Y(z)=0\,.$$

$$\frac{Y'(z)}{Y(z)}=-\frac{6}{z(z-2)}\Rightarrow\int\frac{dY(z)}{Y(z)}=3\int\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z-2}\right)dz.$$

$$\ln Y(z)=\ln c+3\ln\frac{z}{z-2}\Rightarrow Y(z)=c\frac{z^3}{(z-2)^3}\Rightarrow y[n]=c(n+1)(n+2)\cdot 2^n$$

Pošto je $y[0]=2$ znači da je c = 1.

b) [10] Homogena diferencna jednačina iz prethodne tačke za svako $n\geq 0$ glasi $(n+1)y[n+1]-2(n+3)y[n]=0$ pri čemu je dat početni uslov. Za $n=0$ ta jednačina je oblika

$$y[1]-2\cdot 3\cdot y[0]=0\Leftrightarrow y[1]=12$$

2

Za $n=0$, ukoliko je početni uslov jednak nuli, jednačina mora da ima istu formu da bi odziv bio jednak: $y[1]-2\cdot 3\cdot y[0]=x[0]=12$. Prema tome pobuda treba da bude oblika $x[n]=12\delta[n]$

0

****

4. [30] Signal $x(t)=2\sin(\omega_0 t+\pi/6), \omega_0=100\pi$ dovodi se na ulaz kola sa slike. Prekidač u kolu sa slike kontroliše se logičkim signalom oblika $s(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{u}(t+\varepsilon-kT_s)-\mathrm{u}(t-\varepsilon-kT_s)\right),\ 2\pi/T_s=800\pi, \varepsilon\to 0$ tako da kada signal ima vrednost 1 prekidač je u položaju 1.

a) [5]

$$T_s = 1/400, \omega_S = 800\pi, \omega_0 = 100\pi$$

$$x(t) = 2\sin(\omega_0 t + \pi/6) = \frac{e^{j\omega_0 t}e^{j\pi/6} - e^{-j\omega_0 t}e^{-j\pi/6}}{j}$$

$$X(j\omega) = 2j\pi(\delta(\omega+\omega_0)e^{-j\pi/6} - \delta(\omega-\omega_0)e^{j\pi/6})$$

$$X_s(j\omega) = \frac{1-e^{-j\omega T_s}}{j\omega}\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_S))$$

alternativno

$$X_s(j\omega) = 2\frac{1-e^{-j\omega T_s}}{j\omega}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sin(k\pi/4+\pi/6)e^{-j\omega k T_s}$$

b) [5] Važi da je $g[n] = x_s(nT_s + 0.3T_s) = x(nT_s + \varepsilon) =$ stepenasta sinusoida $g[n] = 2\sin(\omega_0 n T_s + \pi/6) = 2\sin(\Omega_0 n + \pi/6), \Omega_0 = \omega_0 T_s = 100\pi/400 = \pi/4$

$$X(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2j\pi(\delta(\Omega+\Omega_0-2k\pi)e^{-j\pi/6} - \delta(\Omega-\Omega_0-2k\pi)e^{+j\pi/6})$$

c) [10] Ako se signal $x_s(t)$ obradi idealnim filterom $H(j\omega) = a\cdot \mathrm{rect}(\omega/b)$ odrediti konstante a i b tako da se kao rezultat obrade dobije signal tačno $y(t) = \sin(\omega_0 t + \pi/6 + \varphi)$

Pošto je $\omega_s = 4\omega_0$, širina propusnog opsega filtera $b/2 = \omega_c$ može da bude $2\omega_0, \Rightarrow b/2 = 2\omega_0 \Rightarrow b = \omega_s$ (može i manje!) Time se izdvaja samo osnovni opseg signala $x_s(t)$.
Pojačanje na ω_0 treba da bude 1/2

$$a\left|\frac{1-e^{-j\omega_0 T_s}}{j\omega_0}\frac{1}{T_s}\right| = 1/2 = a\left|\frac{1-e^{-j\pi/4}}{100\pi j}400\right| = a\left|4\frac{1-\cos(\pi/4)+j\sin(\pi/4)}{\pi}\right| = a\frac{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\pi}$$

$$a = \frac{\pi}{8\sqrt{2-\sqrt{2}}} \approx 0.513$$

d) [10] odrediti φ

$$\varphi = \arg\left(\frac{1-e^{-j\pi/4}}{j}\right) = \arg\left(\frac{1-\sqrt{2}/2+j\sqrt{2}/2}{j}\right) = \arg\left(\sqrt{2}/2 - j(1-\sqrt{2}/2)\right)$$

$$\varphi = arctg\left(-\frac{1-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}\right) \approx -\pi/8$$

****

5.[10]

a) Laplasova transformacija signala $X(s)$ je:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5t}u(t-1)e^{-st}dt = \int_{1}^{+\infty} e^{-(5+s)t}dt = \frac{e^{-(5+s)}}{s+5}$$

u oblasti konvergencije $\mathrm{Re}(s) > -5$.

b) Takođe je:

$$G(s) = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5t}u(-t-t_0)e^{-st}dt = A\int_{-\infty}^{-t_0} e^{-(5+s)t}dt = -A\frac{e^{(5+s)t_0}}{s+5}$$

u oblasti konvergencije $\mathrm{Re}(s) < -5$.

Lako se vidi da je:

$$A = -1,\ t_0 = -1$$

b)

Iz postavke zadatka se vidi da oblast konvergencije sadrži jedinični krug, jer je signal $x[n]$ apsolutno sumabilan. Dakle, oblast konvergencije je $1/2 < |z| < r_o$. Ovakvu oblast konvergencije mogu imati dve vrste signala :

a) Ako je r_o konačan broj, onda je signal $x[n]$ neograničen sa obe strane,

b) Ako je $r_o \to \infty$, onda je signal $x[n]$ ograničen samo sa leve strane,

****

6. Polazna jednacina se napise u alterantivnoj formi, a zatim resenje sleduje pravolinijski:

$$y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = 3x[n+1] + 5x[n]$$

$$y[0] = 3, y[1] = 7$$

$$x[n] = 2^{-n}u[n]$$

$$\mathrm{Z}\{x[n+1]\} = z\left(X(z) - \underbrace{x[0]}_{1}\right) = zX(z) - z$$

$$\mathrm{Z}\{x[n+n_0]\} = z^{n_0}\left(X(z) - \sum_{k=0}^{n_0-1} x[k]z^{-k}\right), \quad n_0 > 0$$

$$z^2\left(Y(z) - y[0] - y[1]z^{-1}\right) - 5z\left(Y(z) - y[0]\right) + 6Y(z) = 3\left(zX(z) - z\right) + 5X(z)$$

$$y[0] = 3, y[1] = 7$$

$$\underbrace{\left(z^2 - 5z + 6\right)}_{P(z)}Y(z) - \left(3z^2 + 7z\right) + 15z = \underbrace{\left(3z+5\right)}_{Q(z)}X(z) - 3z$$

$$\underbrace{\left(z^2 - 5z + 6\right)}_{P(z)}Y(z) - \left(3z^2 - 11z\right) = \underbrace{\left(3z+5\right)}_{Q(z)}X(z)$$

$$Y(z) = \overbrace{\underbrace{\left(\frac{3z+5}{z^2 - 5z + 6}\right)}_{H(z)}X(z)}^{prinudni \quad odziv} + \overbrace{\frac{3z^2 - 11z}{z^2 - 5z + 6}}^{sopstveni}$$

$$y[n] = \left[\underbrace{5(2)^n - 2(3)^n}_{sopstveni} \underbrace{- \frac{22}{3}(2)^n + \frac{28}{5}(3)^n + \frac{26}{15}(0.5)^n}_{prinudni}\right]u[n]$$

$$y[n] = \left[\frac{26}{15}(0.5)^n - \frac{7}{3}(2)^n + \frac{18}{5}(3)^n\right]u[n]$$