Kolokvijum 1

1. zadatak (25)

a) $g(t)=(t-1)\cdot e^{-3|t-1|}+e^{-3|t-1|}=x(t-1)\Rightarrow x(t)=t\cdot e^{-3|t|}+e^{-3|t|}$

b)

$$e^{-3|t|}\to\frac{6}{9+\omega^2};\quad te^{-3|t|}\to j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{6}{9+\omega^2}\right)=-\frac{12j\omega}{(9+\omega^2)^2}$$

$$X(j\omega)=\frac{6}{9+\omega^2}-\frac{12j\omega}{(9+\omega^2)};G(j\omega)=X(j\omega)e^{-j\omega}$$

c)

$$\frac{2\sin\omega}{\omega(2+j\omega)}=\frac{\left(e^{j\omega}-e^{-j\omega}\right)}{j\omega(2+j\omega)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{j\omega}-\frac{1}{2+j\omega}\right)\left(e^{j\omega}-e^{-j\omega}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right)\left(e^{j\omega}-e^{-j\omega}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+j\omega}\right)\left(e^{j\omega}-e^{-j\omega}\right)$$

$$x(t)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{u}(t+1)-\mathrm{u}(t-1)\right)-\frac{1}{2}\left(e^{-2(t+1)}\mathrm{u}(t+1)-e^{-2(t-1)}\mathrm{u}(t-1)\right)$$

2. zadatak (25)

a)

$$y'(0^+)-y'(0^-)+3(y(0^+)-y(0^-))=1$$

$$y(0^+)-y(0^-)=0\Rightarrow y(0^+)=1/4, y'(0^+)=5/4$$

$$y_{us}(t)=\frac{(1-D)(\sin4t-1)}{(D+2)(D+1)}=\frac{\sin4t-1-4\cos4t}{(D+2)(D+1)}=$$

$$-1/2+(D-2)(D-1)\frac{\sin4t-4\cos4t}{(-4^2-4)(-4^2-1)}=-1/2+(D^2-3D+2)\frac{\sin4t-4\cos4t}{340}$$

$$y_{us}(t)=-1/2+\frac{-31\sin4t+22\cos4t}{170}$$

$$y(t)=-1/2+\frac{-31\sin4t+22\cos4t}{170}+C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}, t>0$$

$$y(0^+)=0=-1/2+\frac{22}{170}+C_1+C_2$$

$$y'(t)=\frac{-4\cdot31\cos4t-4\cdot22\sin4t}{170}-C_1e^{-t}-2C_2e^{-2t}, t>0$$

$$y'(0^+)=5/4=-\frac{62}{85}-C_1-2C_2\Rightarrow C_1=219/68, C_2=-13/5$$

b)

$$y'(0^-)=y(0^-)=1/4=y'(0^+)=y(0^+)$$

Ustaljeni odziv je fazno isprednjacen za $\pi/2$

$$y_{us}(t)=-1/2+\frac{-31\cos4t-22\sin4t}{170}$$

$y(t) = -1/2 + \dfrac{-31\cos 4t - 22\sin 4t}{170} + C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}, \; t > 0$

$y(0^+) = 1/4 = -1/2 - \dfrac{31}{170} + C_1 + C_2$

$y'(t) = \dfrac{4\cdot 31\sin 4t - 4\cdot 22\cos 4t}{170} - C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t}, \; t > 0$

$y'(0^+) = 1/4 = -\dfrac{88}{170} - C_1 - 2C_2$

$C_1 = 179/68, C_2 = -17/10$

3. zadatak (20)

a) Videti vežbe i predavanja.

b) Neka je $h_1[n]$ impulsni odziv sistema $h_1[n] - \dfrac{5}{6}h_1[n-1] + \dfrac{1}{6}h_1[n-2] = \delta[n]$. Tada je $h[n] = 2h_1[n-1]$ impulsni odziv traženog sistema.

Računaju se početni uslovi: $h_1[0] = 1$ i $h_1[1] = \dfrac{5}{6}$. Impulsni odziv je oblika

$$h_1[n] = (A\cdot 2^{-n} + B\cdot 3^{-n})\mathrm{u}[n].$$

Određuju se konstante na osnovu početnih uslova $A = 3$ i $B = -2$.

c) Sistem je stabilan.

d) Prinudni odziv se određuje konvolucijom. Kako je:

$$a^n\mathrm{u}[n] * b\mathrm{u}[n] = b\mathrm{u}[n]\sum_{m=0}^{n} a^m = b\mathrm{u}[n]\left.\frac{a^m}{a-1}\right|_0^{n+1} = b\mathrm{u}[n]\frac{a^{n+1}-1}{a-1},$$

$$a^n\mathrm{u}[n] * a^n\mathrm{u}[n] = a^n\mathrm{u}[n]\sum_{m=0}^{n} 1 = (n+1)a^n\mathrm{u}[n],$$

$$a^n\mathrm{u}[n] * b^n\mathrm{u}[n] = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b},$$

dobija se:

$$y_1[n] = h_1[n] * x[n] = \left(-36(2^{-(n+1)}-1) + 18(3^{-(n+1)}-1) + 3(n+1)2^{-n} + 12(3^{-(n+1)} - 2^{-(n+1)})\right)\mathrm{u}[n],$$

$$y[n] = 2y_1[n-1].$$

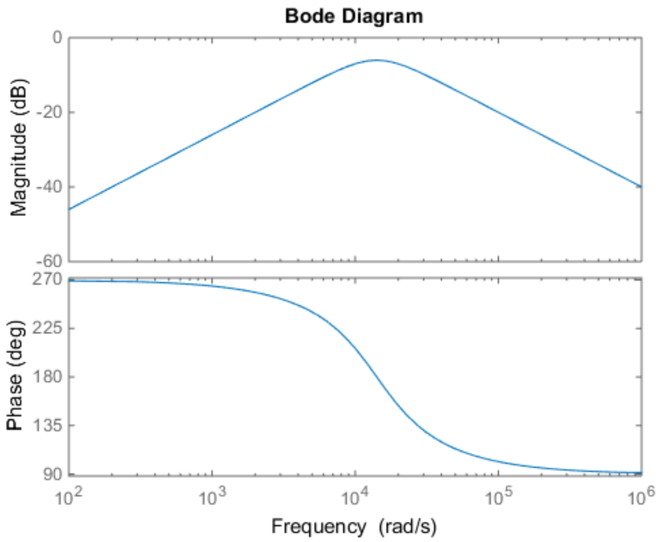
4. zadatak (30)

a) Prenosna funkcija je filtar propusnik niskih učestanosti:

$$H(s) = \frac{-\dfrac{s}{C_2R_1}}{s^2 + s\dfrac{C_1+C_2}{C_1C_2R_2} + \dfrac{R_1+R_0}{C_1C_2R_2R_1R_0}} = \frac{-\dfrac{s}{CR}}{s^2 + s\dfrac{2}{CR} + \dfrac{2}{(CR)^2}}$$

Očigledno je $\omega_P = \dfrac{\sqrt{2}}{CR}$ i $Q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Bodeovi dijagrami su prikazani na slici.



c) Prenosna funkcija se može napisati kao:

$$H(s) = -\frac{s\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2},$$

gde je $a=\omega_0=10000\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Kako je $V_U(s)=A\frac{a+s}{(a+s)^2+\omega_0^2}$ za $A=10\text{ mV}$, dobija se

$$V_I(s) = -A\frac{\omega_0 s(s+a)}{((a+s)^2+\omega_0^2)^2}.$$

Na osnovu teoreme je $\mathcal{F}\{t\sin(\omega_0 t)\mathrm{e}^{-at}\mathrm{u}(t)\} = \frac{2\omega_0(s+a)}{((a+s)^2+\omega_0^2)^2}$. Kako je $\mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s)$, dobija se da je

$$V_I(s) = -\frac{sA}{2}\cdot\mathcal{F}\{t\sin(\omega_0 t)\mathrm{e}^{-at}\mathrm{u}(t)\},$$

pa je $v_I(t) = -\frac{A}{2}\frac{d}{dt}\left(t\sin(\omega_0 t)\mathrm{e}^{-at}\mathrm{u}(t)\right) = -\frac{A}{2}((1-at)\sin(\omega_0 t)+\omega_0 t\cos(\omega_0 t))\mathrm{e}^{-at}\mathrm{u}(t)$.

d) Kako je ovo propusnik opsega učestanosti, jako je veliko slabljenje za $\omega=0$ i $\omega=10^8$. Dobija se isto kao pod c) samo što je $A=1\text{ V}$.

Kolokvijum 2

5. zadatak (25)

a) Signal $x[n]$ predstavlja konvoluciju $x[n]=na^n\mathrm{u}[n]*\mathrm{u}[n]$, pa se njegova Z-transformacija računa kao

$$X(z)=\mathcal{Z}\{na^n\mathrm{u}[n]\}\mathcal{Z}\{\mathrm{u}[n]\}=\frac{az^2}{(z-1)(z-a)^2}.$$

b) Kako je $\lim_{z\to\infty}Y(z)=y[0]=5$, računa se

$$Y(z)=\frac{zy[0]}{z-2}-\frac{2z^2}{(z-1)(z+2)^2(z-2)}.$$

$$y[n]=\left(5\cdot 2^n+\frac{2}{9}-\frac{1}{4}2^n+\frac{n(-2)^n}{12}-\frac{2(-2)^n}{144}\right)\mathrm{u}[n]$$

6. zadatak (25)

a) Iz postavke zadatka se vidi da oblast konvergencije sadrži jedinični krug, jer je signal $x[n]$ apsolutno sumabilan. Dakle, oblast konvergencije je $1/2<|z|<r_o$. Ovakvu oblast konvergencije mogu imati dve vrste signala :

Ako je r_o konačan broj (ako postoje i drugi polovi), onda je signal $x[n]$ neograničen sa obe strane,

Ako je $r_o\to\infty$, onda je signal $x[n]$ ograničen samo sa leve strane,

b)

$$X[0]=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}x[n]=1/3$$

$$(-1)^n=e^{-j\pi n}=e^{-j(2\pi/6)3n}\Rightarrow a_3=\frac{1}{6}\sum_{n=2}^{7}x[n]e^{-j(2\pi/N)3n}=1/6$$

$$P=\sum_{k=0}^{5}\left|X[k]\right|^2$$

Pošto su $X[0]$ i $X[3]$ specificirani minimum se dobija ako su svi ostali koeficijenti nula!

$$X[k]=X[0]\delta[k]+X[3]\delta[k-3]$$

$$x[n]=X[0]+X[3]e^{j\pi n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(-1)^n$$

7 . zadatak (25)

a) $X_1(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},|z|>\dfrac{1}{2}$

$X_2(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}},|z|>\dfrac{1}{3}$

Koristeći osobinu pomeraja u vremenskom domenu:

$$x_1[n+3]\xleftrightarrow{z}z^3X_1(z),|z|>\frac{1}{2}$$

a koristeći osobine inverzije u vremenu i pomeraja u vremenskom domenu:

$$x_2[-n+1]\xleftrightarrow{z}z^{-1}X_2(z^{-1}),|z|<3$$

Konačno, koristeći osobinu konvolucije:

$$y[n] = x_1[n+3] * x_2[-n+1] \xleftrightarrow{z} Y(z) = z^3 X_1(z) z^{-1} X_2(z^{-1}) = \frac{z^2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z\right)}, \frac{1}{2} < |z| < 3$$

$$Y(z) = -\frac{3z^3}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-3\right)} = 3z\left(\frac{6}{5}\frac{z}{z-3} - \frac{2}{5}\frac{z}{z-1/2}\right)$$

$$y[n] = 3\left(-\frac{6}{5}3^{n+1}\mathrm{u}[-n] - \frac{2}{5}(0.5)^{n+1}\mathrm{u}[n+1]\right)$$

b)

$$H(j\Omega) = \frac{-12+5e^{-j\Omega}}{12-7e^{-j\Omega}+e^{-j2\Omega}} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - 2\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \mathrm{u}[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \mathrm{u}[n]$$

$$y[n] = 3\cdot H(j\Omega_0)e^{j\Omega_0 n} = 3\frac{-12+5e^{-j\Omega_0}}{12-7e^{-j\Omega_0}+e^{-j2\Omega_0}}e^{j\Omega_0 n}$$

8. zadatak (25)

a),b) [5,5]

$$H(s) = \frac{1-s}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2}$$

$$h(t) = \left(2e^{-t} - 3e^{-2t}\right)\mathrm{u}(t)$$

c) [10]

$$X(s) = -\frac{1}{s} + \frac{4}{s^2+16}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = -\frac{1}{2s} + \frac{42/17}{s+1} - \frac{21/10}{s+2} + \frac{-62+11s}{85(16+s^2)}$$

$$y(t) = \frac{1}{170}(-85 - 375e^{-2t} + 420e^{-t} + 22\cos(4t) - 31\sin(4t))\mathrm{u}(t)$$

d) [5]

$$X(s) = -\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+16}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = -\frac{1}{2s} + \frac{32/17}{s+1} - \frac{6/5}{s+2} + \frac{-88+31s}{170(16+s^2)}$$

$$y(t) = \frac{1}{170}(-85 - 204e^{-2t} + 320e^{-t} - 31\cos(4t) - 22\sin(4t))\mathrm{u}(t)$$