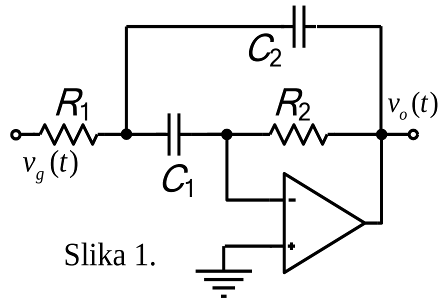
Signali i sistemi (Odsek za elektroniku) – II kolokvijum i integralni ispit 28.08.2016.

Popuniti potrebne podatke na omotnom listu. Obeležiti zadatke koji su rađeni, zaokruživanjem odgovarajućeg rednog broja. Svaki zadatak početi na novom listu. Redosled izrade zadataka nije bitan.

Studenti koji rade samo II kolokvijum rade zadatke 1 do 5. Kolokvijum traje 3 sata.
Studenti koji rade integralni ispit rade zadatke 1 do 7. Ispit traje 3 sata i 15 min.

1. zadatak (30 poena)

Za dato je električno kolo na slici 1.
a) Odrediti prenosnu funkciju kola od ulaza do izlaza. Koja je funkcija kola sa slike 1?
b) Ako su na raspolaganju kondenzatori vrednosti 1nF, odrediti otpornosti R_1 i R_2 tako da Q faktor prenosne funkcije bude jednak 5, a maksimum pojačanja se dobija na kružnoj učestanosti 10 krad/s.
c) Nacrtati amplitudsku i faznu karakteristiku kola.



Slika 1.

2. zadatak (20 poena)

Diskretni sistem je opisan diferencnom jednačinom $2y[n+2]-y[n+1]-y[n]=x[n]$. Primenom Z transformacije
a) odrediti impulsni odziv sistema,
b) odrediti odziv na pobudu $x[n]=\left(-2\right)^{-n}\mathrm{u}[n]$, ako su zadati uslovi $y[0]=2,\ \lim\limits_{n\to\infty} y[n]=4$.

3. zadatak (20 poena)

Dat je linearni sistem čiji je odziv na pobudu $x(t)=(t^2+3t+2)\mathrm{u}(t)$ jednak $y(t)=2t^3\mathrm{u}(t)$. Primenom Laplasove transformacije odrediti:
a) Impulsni odziv sistema
c) Odziv sistema na $x(t)=\mathrm{d}\delta(t)/\mathrm{d}t$
d) Odrediti diferencijalnu jednačinu koja opisuje sistem.

4. zadatak (15 poena)

Dat je signal $x[-n]=\mathrm{u}[k^2-n^2]\cdot\mathrm{u}[-n]$. Ako za signal $g[n]=x[n]*x[n-n_0]$ važi da je $g[n]=0$ za $n<4, n>16$, dok je za ostale vrednosti promenjive n različit od nule,
a) Odrediti k i n_0
b) Odrediti $X(z)$ a zatim, korišćenjem osobina Z transformacije pomerenog signala i konvolucije, odrediti $G(z)$.

5. zadatak (15 poena)

Furijeova transformacija diskretnog signala $x[n]$, $X(e^{j\Omega})$, jednaka je nuli u intervalu $\frac{3\pi}{4}\le|\Omega|\le\pi$. Iz ovog signala je rekonstruisan kontinualni signal :

$$x(t)=T\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\frac{\sin\frac{\pi}{T}(t-nT)}{\pi(t-nT)},\ T=10^{-3}\mathrm{s}$$

Odrediti vrednost granične učestanosti ω_c iznad koje će Furijeova transformacija kontinualnog signala $X(j\omega)$ biti jednaka nuli.

****************************** Integralni ispit ************************************

6. zadatak (10 poena)

Odrediti razvoj periodičnog diskretnog signala u kompleksni Furijeov red, ako su vrednosti signala u toku jednog perioda:

$$y[n]=\begin{cases} n, & |n|\leq 3 \\ 0, & 3<|n|\leq 6 \end{cases}$$

7. zadatak (30 poena)

Diskretni kauzalni sistem je opisan jednačinom

$$y[n]-y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]-\frac{1}{4}y[n-3]=x[n]\ .$$

a) Nacrtati blok dijagram sistema koristeći standardne blokove.
b) Naći impulsni odziv sistema.
c) Ispitati stabilnost sistema.
d) Odrediti konvoluciju $y[n]=x[n]*h[n]$ ako je $h[n]=3^{1-n}\,\mathrm{u}[n-2]$, a $x[n]=\mathrm{u}[1-n]$

Rešenja:

1. a) Kolo predstavlja filtar propusnik opsega učestanosti čija je prenosna funkcija jednaka

$$H(s) = \frac{-sR_2C_1}{s^2R_1R_2C_1C_2 + s(C_2R_1 + C_1R_1) + 1}.$$

b) Q faktor je dat formulom

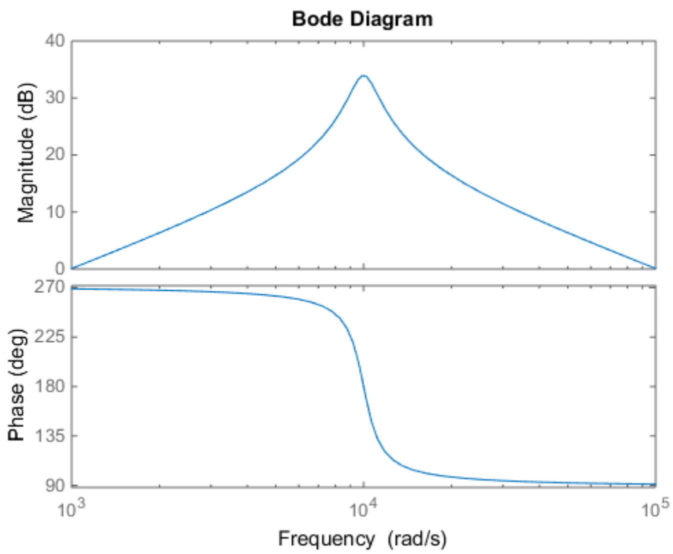
$$Q = \frac{\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}}{\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} + \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}},$$

pa se dobija da je $R_2 = 100R_1$. Kako je

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}},$$

dobija se $R_1 = 10\ \mathrm{k\Omega}$ i $R_2 = 1\ \mathrm{M\Omega}$.

c) Na slici su prikazani bodeovi dijagrami.



2. Z5.18

3. a) Impulsni odziv sistema:

$$X(s) = 2/s^3 + 3/s^2 + 2/s,\ \ Y(s) = 12/s^4$$

$$H(s) = Y(s)/X(s) = \frac{12}{s(2s^2+3s+2)} = \frac{6}{s} + \frac{A+Bs}{2s^2+3s+2}$$

$$\left.\begin{aligned} H(1) &= \frac{12}{7} = 6 + \frac{A+B}{7} \Rightarrow A+B = -30 \\ H(-1) &= -12 = -6 + A - B \Rightarrow A - B = -6 \end{aligned}\right\} A = -18, B = -12 \Rightarrow H(s) = 6\left(\frac{1}{s} - \frac{3+2s}{2s^2+3s+2}\right)$$

$$H(s)=6\left(\frac{1}{s}-\frac{3+2s}{2s^2+3s+2}\right)\Rightarrow h(t)=6\left(1-\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)e^{-3t/4}-\frac{3}{\sqrt{7}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)e^{-3t/4}\right)\mathrm{u}(t)$$

b) Odziv sistema na $x(t)=\mathrm{d}\delta(t)/\mathrm{d}t$

$$Y(s)=H(s)X(s)=6\left(\frac{1}{s}-\frac{3+2s}{2s^2+3s+2}\right)\cdot s=6\left(1-\frac{3s+2s^2}{2s^2+3s+2}\right)=$$

$$=1-\frac{3s+2s^2+2-2}{2s^2+3s+2}=\frac{2}{2s^2+3s+2}\Rightarrow y(t)=\left(\frac{24}{\sqrt{7}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)e^{-3t/4}\right)\mathrm{u}(t)$$

c) Diferencijalna jednačina koja opisuje sistem:

$$s(2s^2+3s+2)Y(s)=12X(s)$$

$$2y'''x(t)+3y''x(t)+2y'x(t)=12x(t)$$

5. Iz jednačine za rekonstrukciju se vidi da je rekonstrukcija obavljena idealnim niskofrekventnim filtrom, cija je granična učestanost $\omega_s/2=\pi/T=1000\pi$. Između digitalne i analogne učestanosti postoji linearna veza $\Omega=\omega T=10^{-3}\omega$. Granična učestanost kontinualnog signala iznad koje će spektar biti jednak nuli je onda $\omega_c=1000\dfrac{3\pi}{4}=750\pi$.

6.

$$y[0]=0,\ y[1]=1,\ y[-1]=-1,\ y[2]=2,\ y[-2]=-2,\ y[3]=3,\ y[-3]=-3,\ y[\pm4]=0,\ y[\pm5]=0,\ y[\pm6]=0,\ldots$$

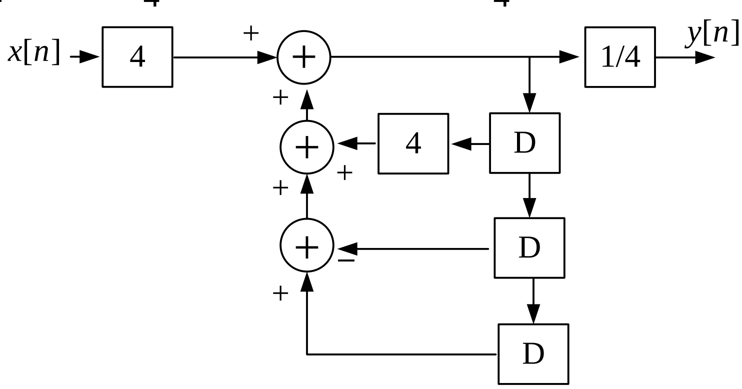
Period signala je $N=12$, pa je $\Omega_0=2\pi/12=\pi/6$. Koeficijenti razvoja u Furijeov red su:

$$Y[k]=\frac{1}{12}\sum_{n=-5}^{6}y[n]e^{-jk\frac{\pi}{6}n}=\frac{1}{12}\left[\left(e^{-jk\frac{\pi}{6}}-e^{jk\frac{\pi}{6}}\right)+2\left(e^{-jk\frac{2\pi}{6}}-e^{jk\frac{2\pi}{6}}\right)+3\left(e^{-jk\frac{3\pi}{6}}-e^{-jk\frac{3\pi}{6}}\right)\right]=$$

$$=-j\frac{1}{6}\left[\sin(k\frac{\pi}{6})+2\sin(k\frac{\pi}{3})+3\sin(k\frac{\pi}{2})\right]$$

7. a) Transformisana jednačina i blok dijagram sistema, slika 2.19:

$$y[n]-y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]-\frac{1}{4}y[n-3]=x[n]\Leftrightarrow y[n]=\frac{1}{4}\big(4x[n]+4y[n-1]-y[n-2]+y[n-3]\big)$$



b) Određivanje ekvivalentnih početnih uslova:

$$h[0]=1,$$
$$h[1]-h[0]=0 \Rightarrow h[1]=1,$$
$$h[2]-h[1]+\frac{1}{4}h[0]=0 \Rightarrow h[2]=3/4.$$

Karakteristični polinom i opšte rešenje:

$$P(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2+\lambda/4-1/4=\lambda^2(\lambda-1)+(\lambda-1)/4=(\lambda^2+1/4)(\lambda-1)$$
$$P(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=1, \lambda_{2,3}=\pm j\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}\pm j\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$h[n]=\left(C_1 1^n+C_2\frac{1}{2^n}\cos n\frac{\pi}{2}+C_3\sin n\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{u}[n].$$

Određivanje koeficijenata

$$h[0]=1 \Rightarrow C_1+C_2=1$$
$$h[1]=1 \Rightarrow C_1+\frac{1}{2}C_3=1$$
$$h[2]=3/4 \Rightarrow C_1-\frac{1}{4}C_2=3/4$$
$$C_2=1/5, C_1=4/5, C_3=2/5$$
$$h[n]=\frac{1}{5}\left(4+\frac{1}{2^n}\left(\cos n\frac{\pi}{2}+2\sin n\frac{\pi}{2}\right)\right)\mathrm{u}[n]$$

c)

Uslov stabilnosti je

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|<\infty \Leftrightarrow \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left|4+\frac{1}{2^k}\left(\cos k\frac{\pi}{2}+2\sin k\frac{\pi}{2}\right)\right|<\infty$$

međutim, kao sto se vidi red ima beskonačnu vrednost pa je sistem nestabilan.

d)

$$x[n]=\mathrm{u}[1-n]=1-\mathrm{u}[n-2],\ h[n]=\frac{1}{3}\frac{1}{3^{n-2}}\mathrm{u}[n-2]$$
$$y_1[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{3^m}\mathrm{u}[m]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{3^m}=\frac{3}{2}$$
$$y_2[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{3^m}\mathrm{u}[m]\mathrm{u}[n-m]=\mathrm{u}[n]\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{3^m}=3\frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{2}\mathrm{u}[n]$$
$$y[n]=h[n]*x[n]=\left(\frac{1}{3}\frac{1}{3^{n-2}}\mathrm{u}[n-2]\right)*\left(1-\mathrm{u}[n-2]\right)=\frac{1}{3}\left(y_1[n-2]-y_2[n-2-2]\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n-3}}\right)\mathrm{u}[n]\right)=\frac{1}{2}\left(1-\left(1-\frac{1}{3^{n-3}}\right)\mathrm{u}[n-4]\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{u}[3-n]+\frac{1}{3^{n-3}}\mathrm{u}[n-4]\right)$$