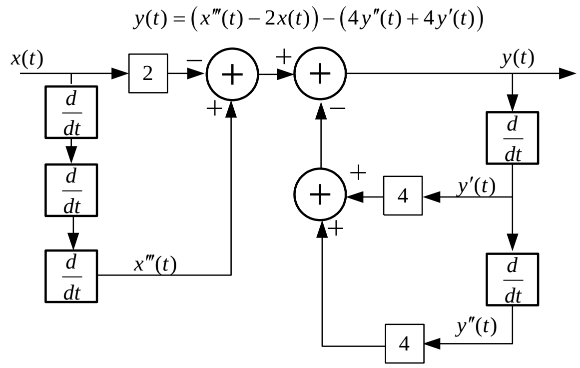
Signali i sistemi – II kolokvijum i integralni ispit 3.7.2016.

Odsek za elektroniku

Resenja

1. zadatak (30 poena)

a)



b) Impulsni odziv se traži zamenom $x(t)=\delta(t)$ i primenom Laplasove transformacije.

$$4s^2H(s)+4sH(s)+H(s)=s^3-2$$

$$H(s)=\frac{s^3-2}{4s^2+4s+1}=\frac{s}{4}-\frac{1}{4}+\frac{\frac{3}{4}s-\frac{7}{4}}{4s^2+4s+1}$$

$$H_1(s)=\frac{\frac{3}{4}s-\frac{7}{4}}{4s^2+4s+1}=\frac{\frac{3}{4}s-\frac{7}{4}}{(2s+1)^2}=\frac{1}{16}\left(\frac{A}{s+1/2}+\frac{B}{(s+1/2)^2}\right)$$

$$A=3,\ B=-\frac{17}{2}$$

$$h(t)=\frac{1}{4}\delta'(t)-\frac{1}{4}\delta(t)+\frac{3}{16}e^{-t/2}u(t)-\frac{17}{32}\,t\,e^{-t/2}u(t)$$

c) Dobijeni sistem je stabilan.

d) Rešava se

$$4(s^2Y(s)-sy(0^+)-y'(0^+))+4(sY(s)-y(0^+))+Y(s)=0$$

$$Y(s)=-\frac{s}{(s+1/2)^2}=\frac{A}{s+1/2}+\frac{B}{(s+1/2)^2}$$

$$A=-1,\ B=\frac{1}{2}$$

$$y_s(t)=\left(-1+\frac{t}{2}\right)e^{-t/2}u(t)$$

2. zadatak (20 poena)

a) $H(z) = \frac{3z}{(3z-1)^2} + \frac{3z}{3z-1} = \frac{9}{9-6z^{-1}+z^{-2}}$

$$(9-6z^{-1}+z^{-2})Y(z) = 9\,X(z)$$

$$9y[n]-6y[n-1]+y[n-2] = 9x[n]$$

b) Videti vežbe.

c) Sopstveni odziv se dobija na sledeći način.

$$9(z^2Y_S(z)-z^2\,y[0]-z\,y[1])-6(zY_S(z)-z\,y[0])+Y_S(z)=0$$

$$Y_S(z)=\frac{\frac{27}{5}z^2+\frac{117}{5}z}{9z^2-6z+1}=\frac{3z}{5(z-1/3)}+\frac{14z}{5(z-1/3)^2}$$

$$y_s[n]=\left(\frac{3}{5}+\frac{42}{5}n\right)3^{-n}$$

Prinudni odziv se određuje konvolucijom impulsnog odziva i signala na ulazu. U Z domenu postaje

$$Y_P(z)=X(z)H(z)=\frac{z^3}{(z-5)(z-1/3)^2}=\frac{Az}{z-5}+\frac{Bz}{z-1/3}+\frac{Cz}{(z-1/3)^2}$$

$$A=\frac{225}{196},\ \ B=-\frac{29}{196},\ \ C=-\frac{1}{42}$$

$$y_p(t)=-\frac{29}{196}3^{-n}\,u[n]-\frac{1}{14}3^{-n}\,nu[n]+\frac{225}{196}5^n\,u[n]$$

3. zadatak (20 poena)

Neka je $x(t)=\left(e^{-2t}+e^{-t}\cos(3t)\right)u(t)+e^{3t}u(-t)=x_1(t)+x_2(t)$, gde je $x_1(t)=\left(e^{-2t}+e^{-t}\cos(3t)\right)u(t)$ i predstavlja kauzalan signal, dok je $x_2(t)=e^{3t}u(-t)$ antikauzalan signal.

$$x_1(t)=\left(e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-(1+3j)t}+\frac{1}{2}e^{-(1-3j)t}\right)u(t)$$

$$X_1(s)=\frac{1}{s+2}+\frac{1/2}{s+(1+3j)}+\frac{1/2}{s+(1-3j)}$$

Prethodni signal ima oblast konvergencije redom ROC: $\sigma>-2$, ROC: $\sigma>-1$ i ROC: $\sigma>-1$. Tako da je ukupna oblast konvergencije ROC: $\sigma>-1$.

$$x_2(t)=e^{3t}u(-t)$$

$$X_2(s)=\frac{-1}{s-3}$$

Oblast konvergencije je za $\sigma-3<0$, to jest ROC: $\sigma<3$.

Ukupna oblast konvergencije je presek prethodnih i daje ROC: $-1<\sigma<3$.

4. zadatak (10 poena)

Imamo da je $H_1(z) = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}z^{-1}} = \dfrac{3}{3-z^{-1}}$. Takođe je: $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$. Onda je :

$$H_2(z) = H(z) - H_1(z) = \frac{-12+5z^{-1}}{12-7z^{-1}+z^{-2}} - \frac{3}{3-z^{-1}} = \frac{-12+5z^{-1}-12+3z^{-1}}{(4-z^{-1})(3-z^{-1})}$$

$$= -8\frac{3-z^{-1}}{(4-z^{-1})(3-z^{-1})} = -\frac{8}{4-z^{-1}} = -\frac{2}{1-\dfrac{1}{4}z^{-1}}$$

Konačno je:

$$h_2[n] = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

5. zadatak (20 poena)

$$x[-n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z^{-1})$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1/z)^{-n} 3^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

$$X(w) = \sum_{n=0}^{\infty} w^{-n} 3^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) = \frac{w\left(w-3\cos\left(\pi/4\right)\right)}{w^2 - 6w\cos\left(\pi/4\right)+9}$$

$$X(z) = \frac{z^{-1}\left(z^{-1}-3\cos\left(\pi/4\right)\right)}{z^{-2}-6z^{-1}\cos\left(\pi/4\right)+9} = \frac{z^{-1}\left(z^{-1}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)}{z^{-2}-z^{-1}\dfrac{6\sqrt{2}}{2}+9} = \frac{1-z\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}{1-z\cdot 3\sqrt{2}+9z^2}$$

Polovi z-transformacije su u tačkama:

$$z_{p1,2} = \frac{\sqrt{2}}{6}(1\pm j)$$

a zbog toga što je diskretni signal antikauzalan, oblast konvergencije z-transformacije je krug čiji je poluprečnik manji od modula najmanjeg pola. ROC: $|z| < 1/3$