Signali i sistemi – II kolokvijum i integralni ispit 12.06.2016.

Odsek za elektroniku

Rešenja

1. zadatak (25 poena)

a) $H(s)=\dfrac{1}{s^4-1}=\dfrac{1/4}{s-1}-\dfrac{1/4}{s+1}-\dfrac{1/2}{s^2+1}$

$$h(t)=\frac{1}{4}\left(e^{t}-e^{-t}\right)\mathrm{u}(t)-\frac{1}{2}\sin t\,\mathrm{u}(t)$$

b) Neka je $x_1(t)=Ae^{s_0t}=Ae^{at}\left(\cos(\omega_0t)+j\sin(\omega_0t)\right)$. Odziv na $x_1(t)$ je

$$g(t)=H(s_0)x_1(t)=H(s_0)Ae^{s_0t}.$$

$$y_{us}(t)=\mathrm{Re}\{g(t)\}=Ae^{at}\left(\mathrm{Re}\{H(s_0)\}\cos(\omega_0t)-\mathrm{Im}\{H(s_0)\}\sin(\omega_0t)\right)$$

c) Sada je $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$, gde je $x_1(t)=e^{s_0t}$, $s_0=2+j2$ i $x_2(t)=e^{s_1t}$, $s_1=2$. Računa se $y_{us1}(t)=-\dfrac{1}{65}e^{2t}\cos(2t)$, $y_{us2}(t)=\dfrac{1}{15}e^{2t}$, pa je $y(t)=y_{us1}(t)+y_{us2}(t)$.

2. zadatak (35 poena)

a)

$$Y_1(z)-z^{-2}Y_2(z)=X(z)$$

$$Y_2(z)-z^{-2}Y_1(z)=0$$

Dobija se da je $H_1(z)=\dfrac{z^4}{z^4-1}=1+z\,z^{-1}\dfrac{1/4}{z-1}-z\,z^{-1}\dfrac{1/4}{z+1}-z\,z^{-1}\dfrac{1/2}{z^2+1}$, pa je

$$h_1[n]=\delta[n]+\frac{1}{4}\mathrm{u}[n-1]-\frac{1}{4}(-1)^{n-1}\mathrm{u}[n-1]-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\mathrm{u}[n-1].$$

$$H_2(z)=z^{-2}H_1(z)=\frac{z^2}{z^4-1}=z\,z^{-1}\frac{1/4}{z-1}-z\,z^{-1}\frac{1/4}{z+1}+z\,z^{-1}\frac{1/2}{z^2+1}$$

$$h_2[n]=\frac{1}{4}\mathrm{u}[n-1]-\frac{1}{4}(-1)^{n-1}\mathrm{u}[n-1]+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\mathrm{u}[n-1].$$

b) Prostoperiodična pobuda daje prostoperiodičan ustaljeni odziv.

$$y_{1us}[n]=3\mathrm{Re}\left\{H_1\left(e^{j\frac{2\pi}{3}}\right)\right\}\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)-3\mathrm{Im}\left\{H_1\left(e^{j\frac{2\pi}{3}}\right)\right\}\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$$

$$y_{2us}[n]=3\mathrm{Re}\left\{H_2\left(e^{j\frac{2\pi}{3}}\right)\right\}\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)-3\mathrm{Im}\left\{H_2\left(e^{j\frac{2\pi}{3}}\right)\right\}\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$$

c) Sopstveni odziv se dobija na sledeći način.

$$y_1[n+2]-y_2[n]=0$$
$$y_2[n+2]-y_1[n]=0$$

Primenom Z transformacije dobija se

$$z^2Y_1(z)-z^2y_1[0]-zy_1[1]-Y_2(z)=0,$$
$$z^2Y_2(z)-z^2y_2[0]-zy_2[1]-Y_1(z)=0,$$

pa je

$$Y_{1S}(z)=\frac{z^3+z^2}{z^4-1}=\frac{z^2}{(z-1)(z^2+1)}=z\frac{A}{z-1}+z\frac{Bz+C}{z^2+1}$$

$$A=\frac{1}{2},\ Q=\frac{1-j}{2},\ B=-C=-\frac{1}{2}$$

$$y_{1S}[n]=\frac{1}{2}\mathrm{u}[n]+\frac{1}{2}\sin(n\pi/2)\mathrm{u}[n]-\frac{1}{2}\cos(n\pi/2)\mathrm{u}[n]$$

$$Y_{2S}(z)=\frac{z^4+z}{z^4-1}=z\frac{z^2-z+1}{(z-1)(z^2+1)}=z\frac{A}{z-1}+z\frac{Bz+C}{z^2+1}$$

$$A=\frac{1}{2},\ Q=\frac{-1+j}{2},\ B=-C=\frac{1}{2}$$

$$y_{2S}[n]=\frac{1}{2}\mathrm{u}[n]-\frac{1}{2}\sin(n\pi/2)\mathrm{u}[n]+\frac{1}{2}\cos(n\pi/2)\mathrm{u}[n]$$

Prinudni odziv se određuje konvolucijom impulsnog odziva i signala na ulazu. U Z domenu postaje

$$Y_{1P}(z)=X(z)H_1(z)=\frac{z^5}{(z-2)(z^4-1)}=\frac{Az}{z-1}+\frac{Bz}{z+1}+\frac{Cz}{z-2}+z\frac{Dz+E}{z^2+1}$$

$$A=-\frac{1}{4},\ B=\frac{1}{12},\ C=\frac{16}{15},\ Q=\frac{2+j}{10},\ D=\frac{1}{10},\ E=\frac{1}{5}$$

$$y_{1P}(t)=-\frac{1}{4}\mathrm{u}[n]+\frac{1}{12}(-1)^n\mathrm{u}[n]+\frac{16}{15}2^n\mathrm{u}[n]+\frac{1}{10}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{u}[n]+\frac{1}{5}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{u}[n]$$

$$Y_{2P}(z)=X(z)H_2(z)=\frac{z^3}{(z-2)(z^4-1)}=\frac{Az}{z-1}+\frac{Bz}{z+1}+\frac{Cz}{z-2}+z\frac{Dz+E}{z^2+1}$$

$$A=-\frac{1}{4},\ B=\frac{1}{12},\ C=\frac{4}{15},\ Q=\frac{-2-j}{10},\ D=-\frac{1}{10},\ E=-\frac{1}{5}$$

$$y_{2P}(t)=-\frac{1}{4}\mathrm{u}[n]+\frac{1}{12}(-1)^n\mathrm{u}[n]+\frac{4}{15}2^n\mathrm{u}[n]-\frac{1}{10}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{u}[n]-\frac{1}{5}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{u}[n]$$

3. zadatak (10 poena)

Prvo treba odrediti $Y(j\omega)$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{3+j\omega} - \frac{1}{4+j\omega} = \frac{1}{(3+j\omega)(4+j\omega)}$$

Na osnovu definicije frekvencijske karakteristike imamo:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

odakle se dobija

$$X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{H(j\omega)} = \frac{1}{4+j\omega}$$

odakle sledi:

$$x(t) = e^{-4t}u(t)$$

4. zadatak (10 poena)

Na osnovu tablice Furijeovih transformacija diskretnih signala imamo:

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-\frac{4}{5}e^{-j\Omega}}$$

Koristeći osobinu diferenciranja u frekvencijskom domenu dobija se:

$$Y(e^{j\Omega}) = j\frac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega} = \frac{\frac{4}{5}e^{-j\Omega}}{(1-\frac{4}{5}e^{-j\Omega})^2}$$

pa je:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = \frac{\frac{4}{5}e^{-j\Omega}}{1-\frac{4}{5}e^{-j\Omega}}$$

Polazeći od poslednje jednakosti dobijamo:

$$Y(e^{j\Omega})(1-\frac{4}{5}e^{-j\Omega}) = X(e^{j\Omega})\frac{4}{5}e^{-j\Omega}$$

odakle se inverznom Furijeovom transformacijom dobija:

$$y[n] - \frac{4}{5}y[n-1] = \frac{4}{5}x[n-1]$$

5. zadatak (10 poena)

Furijeova transformacija proizvoda dva signala $y(t) = x_1(t)x_2(t)$ je:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$

pa je

$$Y(j\omega)=0, \text{za } |\omega|>\omega_1+\omega_2$$

Minimalna učestanost odabiranja mora biti dva puta veća od maksimalne učestanosti u spektru signala, odnosno:

$$\omega_{smin} = 2(\omega_1 + \omega_2)$$

pa je maksimalna vrednost periode odabiranja za koju se dobija korektna rekonstrukcija signala $y(t)$ iz njegovih odbiraka:

$$T_{smax} = \frac{2\pi}{\omega_{smin}} = \frac{2\pi}{2(\omega_1+\omega_2)} = \frac{\pi}{\omega_1+\omega_2}$$

6. zadatak (10 poena)

Poznato nam je da kada se pravougaoni signal konvoluira sam sa sobom dobija se trougaoni signal. Prva nenulta vrednost signala $x[n] * x[n-n_0]$ pojaviće se u trenutku n_0, odakle sledi da je $n_0 = 2$.

Na osnovu definicije *z* transformacije imamo:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{5} z^{-n} = \frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}}$$

a na osnovu osobine pomeraja:

$$Z\{x[n-2]\} = z^{-2}X(z) = z^{-2}\frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}}$$

Na osnovu osobine *z* transformacije konvolucije imamo:

$$G(z) = Z\{x[n]*x[n-2]\} = X(z)z^{-2}X(z) = z^{-2}\left(\frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}}\right)^2$$

****
****

7. zadatak (30 poena)

Početni uslovi za homogenu diferencnu jednačinu:

$$h[0]=1,\ h[1]=0,\ h[2]=0\ .$$

Karakteristična jednačina ima rešenja:

$$\lambda^3-1=0, \quad \lambda_1=1, \quad \lambda_{2,3}=\cos\frac{2\pi}{3}\pm j\sin\frac{2\pi}{3},$$

jer za svaki kompleksni broj važi $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\cdot\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}$.

Opšte rešenje za impulsni odziv

$$h[n]=\left(C_1+C_2\cos\frac{2n\pi}{3}+C_3\sin\frac{2n\pi}{3}\right)\mathrm{u}[n]$$

$$n = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow C_1 - \frac{1}{2}C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_3 = 0$$

$$n = 2 \Rightarrow C_1 - \frac{1}{2}C_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}C_3 = 0$$

Rešeavanjem ovog sistema dobijaju se konstante

$$C_1 = \frac{1}{3}, \quad C_2 = \frac{2}{3}, \quad C_3 = 0,$$

tako da je impulsni odziv

$$h[n] = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\frac{2n\pi}{3}\right)\mathrm{u}[n]$$

Napomena: Pošto je vrednost funkcije $\cos\frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} 1, & \text{za } n \text{ deljivo sa } 3 \\ -1/2, & \text{za ostale vrednosti} \end{cases}$

može da se napiše

$$h[n] = \begin{cases} 1, n \bmod 3 = 0 \\ 0, n \bmod 3 \neq 0 \end{cases}, n > 0$$

Odziv je suma svakog trećeg jediničnog impulsa, što je očigledno ako se rekurzivno izračunavaju sukcesivne vrednosti po formuli $h[n] = h[n-3]$ za $n > 0$.

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\,\mathrm{u}[m]\,\mathrm{u}[n-m] =$$

$$= \mathrm{u}[n]\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\frac{2m\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}(n+1) + \frac{2}{3}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{3}\pi\right)\cos\left(\frac{n}{3}\pi\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)\mathrm{u}[n]$$

Pri tome je upotrebljen identitet iz prve glave

$$\sum_{m=0}^{n}\cos nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \cdot \cos\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

8. zadatak (10 poena)

Sistem je linearan i vremenski nepromenljiv i stabilan.